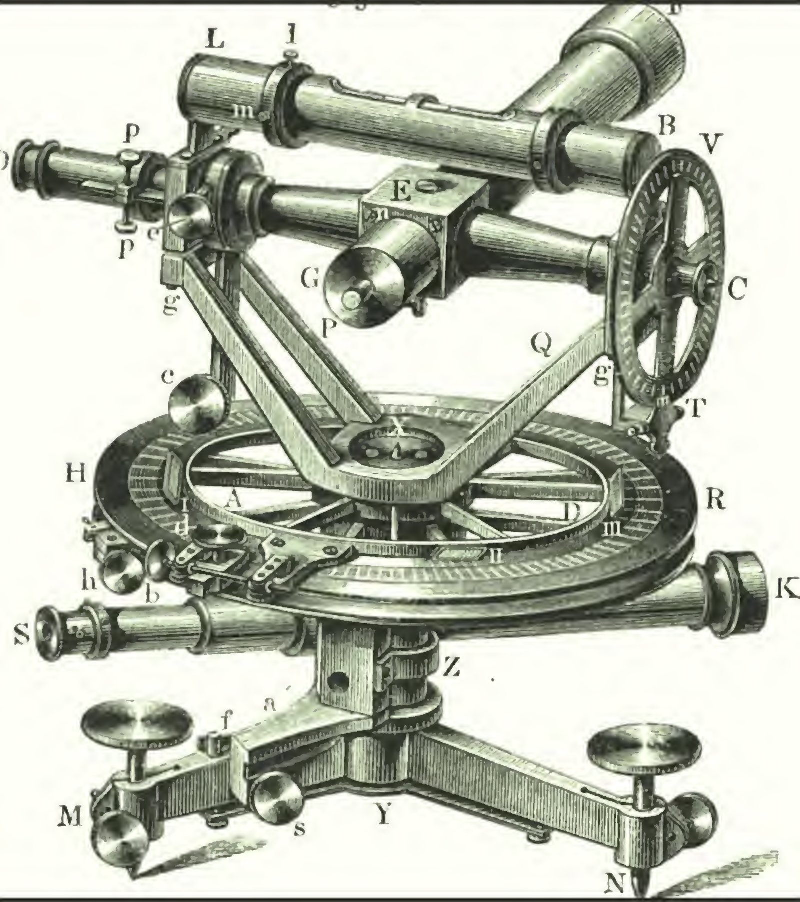


Der Ingenieur

Julius Ludwig Weisbach

J. L. Jernegan.
Bergstudent
Freiberg.

Der

Ingenieur.

Sammlung

von

Tafeln, Formeln und Regeln

der

Arithmetik, der theoretischen und praktischen Geometrie sowie der Mechanik und des Ingenieurwesens.

Holzstiche
aus dem xylographischen Atelier
von Friedrich Vieweg und Sohn
in Braunschweig.

Papier
aus der mechanischen Papier-Fabrik
der Gebrüder Vieweg zu Wendhausen
bei Braunschweig.

Der

Ingenieur.

Sammlung

von

Tafeln, Formeln und Regeln

der

Arithmetik, der theoretischen und praktischen Geometrie
sowie der Mechanik und des Ingenieurwesens.

Für

praktische Geometer, Mechaniker, Architekten, Civilingenieure, Berg- und Hüttenbeamte, Baugewerksmeister und andere Techniker

bearbeitet von

Dr. phil. Julius Weisbach,

Königl. sächsischer Ober-Bergrath und Professor an der königl. sächsischen Bergakademie zu Freiberg; Ritter des königl. sächsischen Verdienstordens und des kaiserl. russischen St. Annenordens II. Classe, correspondirendes Mitglied der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, auswärtiges Mitglied der königlichen Akademie der Wissenschaften zu Stockholm, Ehrenmitglied des Vereins deutscher Ingenieure, Ehrenmitglied des Architekten- und Ingenieurvereins für das Königreich Hannover, sowie correspondirendes Mitglied des Vereins für Eisenbahnkunde u. s. w.

Mit 491 in den Text eingedruckten Holzstichen.

Fünfte verbesserte Auflage.

Braunschweig,

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1868.

Vorrede zur ersten und zweiten Auflage.

Der »Ingenieur« soll ein Hülfsbuch oder Vademecum für praktische Geometer, Mechaniker und Techniker überhaupt sein; derselbe soll dem Praktiker als Rathgeber und Gehülfe zugleich an die Hand gehen, und enthält deshalb die brauchbarsten praktischen Regeln, Formeln und Tabellen der Arithmetik, Geometrie und Mechanik. Man erwarte in diesem Werke kein Lehrbuch mit vollständigen Entwickelungen und Beweisen, man suche vielmehr in ihm ein nur Regeln, Thatsachen und Ergebnisse enthaltendes Handbuch. Ein vollständiges Lehrbuch ist, um es immer mit sich umherführen zu können, zu voluminös, und um in demselben das Gesuchte schnell aufschlagen zu können, auch zu unbequem, weil man in demselben die gewonnenen Regeln, Formeln u. s. w. nicht systematisch nebeneinander, sondern im ganzen Buche an verschiedenen Orten zerstreut vorfindet, und weil in dem Lehrbuche auch Manches des Zusammenhanges und Interesses wegen mit abgehandelt werden muß, was eine unmittelbare Anwendung in der Praxis nicht zuläßt.

Die Haupterfordernisse eines Werkes, welches dem Praktiker als Hand-, Hülfs- und Taschenbuch dienen soll, sind Leichtigkeit, Bequemlichkeit und Sicherheit im Gebrauche; diesen aber wird entsprochen durch eine gedrängte und möglichst geordnete Zusammenstellung von solchen sorgfältig ausgewählten Regeln, Formeln und Tabellen, welche auf die sichersten Theorien und Thatsachen der Erfahrung basirt sind, und in dem Ingenieurwesen, der praktischen Geometrie und Mechanik, dem Maschinenwesen, der Baukunst und der Technik überhaupt ihre Anwendung

finden. Der Verfasser hofft in dem »Ingenieur« ein solches, das praktische Bedürfniß befriedigendes Werk zu liefern, um so mehr, da er denselben mit seinem Lehrbuche der Ingenieur- und Maschinenmechanik in den innigsten Zusammenhang gebracht hat. Dieses Lehrbuch liefert nicht allein die Ableitung und Begründung der in dem »Ingenieur« mitgetheilten Regeln und Formeln, sondern es enthält auch dasselbe manche Ergänzungen zu dem »Ingenieur«, sowie auch dieser Ergänzungen zu jenem. Uebrigens ist der Verfasser bei Bearbeitung des »Ingenieur« ganz den Ansichten nachgegangen, welche er schon früher in den Vorreden zu seiner Mechanik ausgesprochen hat.

Um dieses Buch nicht zu voluminös zu machen, mußten alle Lehren, welche dem ersten Unterrichte angehören, und welche aus dem Gedächtnisse nicht so leicht verschwinden können, wie z. B. einfache Constructionen der Geometrie und Mechanik, aus demselben wegbleiben. Das Formel- und Zahlenwerk ist dagegen möglichst vollständig mitgetheilt worden, besonders hat man sich bemüht, den Gebrauch der Formeln und Regeln durch Beispiele vor Augen zu führen, und durch Tabellen zu erleichtern oder zu ersetzen. Eine große Sorgfalt ist endlich von dem Verfasser noch auf die Zusammensetzung der Formeln und auf die Auswahl der Buchstaben in denselben verwendet worden. Die Uebersicht sehr erleichternd und das Verständniß gewiß sehr befördernd ist es, daß für eine gewisse Art von Größen auch nur gewisse Buchstaben gebraucht werden, daß z. B. durch die kleinen lateinischen Buchstaben nur Linien, durch die großen nur Flächenräume, Volumina und Gewichte, und durch die griechischen Buchstaben stets Coefficienten, Winkel und unmeßbar kleine Größen repräsentirt werden.

Ein Buch wie das vorliegende muß natürlich sein Material von sehr verschiedenen Orten her zusammentragen; das Wenigste in demselben kann Eigenthum des Verfassers sein. Wenn nun diese so höchst mannigfaltigen und verschiedenartigen Hülfsquellen hier nicht angeführt worden sind, so hat dies seinen Grund darin, daß der »Ingenieur« in der engsten Verbindung mit des Verfassers Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik steht, worin nicht allein eine vollständige Literatur, sondern auch eine genaue Angabe der Hülfsquellen mitgetheilt wird.

Das preußische Maß- und Gewichtssystem ist hier wie auch in der Mechanik zu Grunde gelegt, und ist auf das metrische Maß- und Gewichtssystem nicht selten Bezug genommen worden. Uebrigens aber sind auch in dem Werke mehrere Vergleichungstabellen zwischen den in Deutschland üblichen Maß- und Gewichts-

einheiten enthalten, wodurch das Umrechnen aus einem Maße in ein anderes sehr erleichtert wird.

Die an verschiedenen Stellen des Werkes gemachten Angaben über die Leistungen verschiedener Maschinen u. s. w. lassen noch Manches zu wünschen übrig. Es fehlt hier noch zu sehr an sicheren Beobachtungs- und Erfahrungsresultaten! Der Verfasser bittet die Herren Ingenieure und andere Sachverständigen, ihn durch hier einschlagende Angaben zu unterstützen, und hofft dadurch in den Stand gesetzt zu werden, in einer etwa nöthigen dritten Ausgabe dieses Werkes hierin etwas Vollständigeres zu liefern.

Freiberg, den 5. September 1850.

Julius Weisbach.

Vorrede zur dritten Auflage.

Die vorliegende dritte Auflage meines »Ingenieur« kann ich wohl mit Recht eine neu bearbeitete und wesentlich bereicherte Auflage nennen, da ich in derselben nicht bloß vielfache Verbesserungen und Ergänzungen angebracht, sondern auch mehrere Capitel umgearbeitet und eine ganze Abtheilung unter dem Titel »Technik« neu hinzugefügt habe. Um bei dieser Reichhaltigkeit an Stoff das Volumen des Buches nicht zu sehr zu vergrößern und dasselbe noch immer als Taschenbuch gebrauchen zu können, ist auch die äußere Form des »Ingenieur« eine andere, namentlich der Druck etwas enger und die Columnen-Höhe des Buches vergrößert worden. Daß auch die Ausstattung des »Ingenieur« sowohl in Hinsicht auf Druck als auch in Hinsicht auf die Abbildungen bei dieser neuen Auflage gegen die erste Auflage gewonnen hat, wird beim bloßen Durchblättern des Buches sogleich wahrzunehmen sein. Da mir es darum zu thun ist, den »Ingenieur« so viel wie möglich an meine Ingenieur- und Maschinenmechanik anzuschließen, so habe ich in dieser neuen Auflage desselben auch die Hauptformeln der Differential- und Integralrechnung, nebst der Anwendung derselben auf Geometrie und Mechanik mit aufgenommen, mich jedoch hierbei immer nur auf das Elementare und Praktisch-Wichtige beschränkt. Auch habe ich die analytische Geometrie dem

praktischen Bedürfniß entsprechender umgearbeitet und erweitert, sowie im Abschnitt über die praktische Geometrie, namentlich über Eisenbahn- und cubische Aufnahmen, Mehreres hinzugefügt.

In der zweiten Abtheilung des Buches, welche die theoretische und praktische Mechanik enthält, habe ich die praktische Anwendung besonders ins Auge gefaßt, Alles Speculative zur Seite gelassen, und soviel wie möglich aus meiner »Ingenieur- und Maschinenmechanik« geschöpft, sowie mit derselben in den Formeln eine gleiche Buchstabenbezeichnung in Anwendung gebracht. Die Begründung und Herleitung der Formeln und Regeln mußte natürlich der »Ingenieur- und Maschinenmechanik« überlassen bleiben. Abweichend von den ersten beiden Auflagen des »Ingenieur« habe ich in dieser Auflage statt des alten preußischen, das Neu- oder Zollvereinspfund zu Grunde gelegt, und neben dem preußischen Fußmaß noch besonders das Metermaß in Anwendung gebracht. Daß nicht alles Neue hier einen Platz finden konnte, möchte dem Buche nicht als ein Mangel anzurechnen sein, da dasselbe doch vorzüglich nur praktische und im Läuterungsproceß der Praxis erprobte Regeln und Erfahrungsresultate enthalten soll. Meiner »Ingenieur- und Maschinenmechanik« liegt es dagegen ob, so viel wie möglich auch den neuesten Erfindungen und Fortschritten Rechenschaft zu tragen.

In der zweiten Abtheilung habe ich unter der Ueberschrift »praktische Mechanik« nur die Statik der Baukunst und die Mechanik der Umtriebsmaschinen abgehandelt, dagegen die Maschinenbaukunst der dritten Abtheilung einverleibt. Die neue Theorie der Wärme- und Dampfmaschinen konnte im Ingenieur noch keinen Platz finden, da es sich hier doch nur um die Aufstellung praktischer und möglichst einfacher Annäherungsformeln handelt. Sie wird dagegen ein Gegenstand meiner »Ingenieur- und Maschinenmechanik« sein, wo auch die calorischen Maschinen mit abgehandelt werden sollen. In dem Capitel über Maschinenelemente und Zwischenmaschinen habe ich zwar Vieles aus anderen Werken benutzt; jedoch auch Manches aus meinen eigenen Forschungen entlehnt. Fast ebenso ist es mit dem Capitel über die fortschaffende Mechanik. Die mechanische Technologie und die allgemeine Straßen-, Eisenbahn-, Wasser- und Brücken-Baukunst, welche den zweiten und dritten Abschnitt der dritten Abtheilung bilden, sind natürlich in der Hauptsache nur kurze Auszüge aus größeren Werken. In der ersteren habe ich der mechanischen Eisenhüttenkunde eine größere Ausdehnung gegeben, weil dieselbe das vorzüglichste Constructionsmaterial liefert, und mit der Maschinenbaukunst eng verbunden ist. Bei Aufsetzung

dieses Artikels konnte ich nebst mehreren gedruckten Schriften besonders noch ein Manuscript benutzen, welches mir der Herr Ingenieur Buschbeck in Lauchhammer, einer meiner vorzüglichsten alten Schüler, zur Verfügung gestellt hatte. Nicht immer habe ich die Quellen meiner Angaben angeben können, deshalb will ich hier nur noch die Namen der Schriftsteller, deren Arbeiten in dem »Ingenieur« benutzt worden sind, in alphabetischer Ordnung anführen, ohne jedoch für die Vollständigkeit derselben einstehen zu können.

M. Armengaud ainé, M. Becker, J. G. Bourne, J. Gaudry, G. Hagen, J. A. Hülsse, B. Kerl, F. v. Kobell, K. Karmarsch, A. Morin, M. Péclet, J. V. Poncelet, M. Rankine, F. Redtenbacher, F. Reuleaux, N. H. Schilling, C. H. Schmidt, T. F. Scholl, W. Truran, P. Tunner, F. K. H. Wiebe. Ueberdies des Ingenieurs Taschenbuch »die Hütte«.

Endlich sind die in der ersten und zweiten Auflage des Buches bemerkten Druck=, Rechnungs= und andere Fehler in dieser neuen Auflage mit möglichster Sorgfalt beseitigt worden.

Freiberg, den 24. October 1863.

Julius Weisbach.

Inhalt.

Erster Theil.

Arithmetik.

Erster Abschnitt.

Tabellen.

Zweiter Abschnitt.

Regeln und Formeln.

Erstes Capitel.

Grundoperationen.

Zweites Capitel.

Gleichungen.

Drittes Capitel.

Reihen.

Zweiter Theil.

Geometrie.

Erster Abschnitt.

Tafeln.

I. Maßtafeln.

II. Trigonometrische Tabellen.

III. Kreistafeln.

Zweiter Abschnitt.

Formeln und Regeln der theoretischen Geometrie.

Erstes Capitel.

Planimetrie.

Zweites Capitel.

Stereometrie.

Dritter Abschnitt.

Formeln und Regeln der praktischen Geometrie.

Erstes Capitel.

Prüfen und Justiren der Instrumente.

Zweites Capitel.

Formeln und Regeln.

Dritter Theil.

Mechanik.

Erster Abschnitt.

Formeln, Regeln und Tabellen für die theoretische Mechanik.

Erstes Capitel.

Gewichtstabellen.

Zweites Capitel.

Formeln, Regeln und Tabellen der allgemeinen Mechanik.

Drittes Capitel.

Statik.

Viertes Capitel.

Dynamik.

Fünftes Capitel.

Hydraulik.

Zweiter Abschnitt.

Formeln, Regeln und Tabellen für die praktische Mechanik.

Erstes Capitel.

Statik der Baukunst.

Zweites Capitel.

Mechanik der Umtriebsmaschinen.

Drittes Capitel.

Die Wärme und die Mechanik der Dampfmaschinen.

Vierter Theil.

Technik.

Erster Abschnitt.

Formeln, Regeln und Tabellen der allgemeinen Maschinenbaukunst.

Erstes Capitel.

Maschinentheile und Zwischenmaschinen.

Zweites Capitel.

Die Arbeitsmaschinen zum Heben und Fortschaffen von Lasten.

Zweiter Abschnitt.

Formeln, Regeln, Erfahrungssätze und Tabellen der mechanischen Technologie.

Erstes Capitel.

Baumaterialien, deren Gewinnung und Bearbeitung.

Zweites Capitel.

Mühlen.

Drittes Capitel.

Manufacturmaschinen.

Viertes Capitel.

Feuerungs-, Lüftungs- und Beleuchtungsanlagen.

Dritter Abschnitt.

Formeln, Regeln, Erfahrungssätze und Tabellen der Baukunst.

Erstes Capitel.

Baumaterialien, deren Gewinnung und Bearbeitung.

Zweites Capitel.

Stein-, Holz- und Eisenconstructionen.

Drittes Capitel.

Strassen und Eisenbahnen.

Viertes Capitel.

Wasser- und Brückenbau.

Erster Theil.

Arithmetik.

Erster Abschnitt.

Tabellen.

Einleitung.

Die Grundoperationen der Arithmetik sind das Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, Dividiren, Potenziren und Wurzelausziehen, nächstdem etwa noch die Logarithmenrechnung. Die ersten beiden Rechnungsarten werden wegen ihrer Einfachheit in vorkommenden Fällen unmittelbar vollzogen, die übrigen aber lassen sich mit Hülfe von besonders hierzu berechneten Tabellen meist weit kürzer ausführen. Zur Erleichterung der Multiplication und Division dienen die Producten- und Reciprokentafeln, zur Bestimmung von Potenzen und Wurzeln hat man besondere Potenzen- und Wurzelntafeln; zur Ausführung aller dieser vier Rechnungsarten werden außerdem noch die Logarithmentafeln gebraucht.

Wegen ihres beschränkten Umfanges können solche Tabellen nicht alle vorkommenden Fälle in sich enthalten; man findet in diesen vielmehr nur die Rechnungsresultate von aus nur wenigen Ziffern bestehenden und die gesuchten Werthe meist nur annähernd ausdrückenden Zahlen. Will man nun auf die größere Genauigkeit des gesuchten Resultates nicht verzichten, so muß man noch eine Correction anbringen, die sich durch diejenige mit benachbarten Zahlen in der Tabelle vorzunehmende Rechnung ergiebt, welche man Interpolation nennt.

Es stehen also dem Rechner mehrere Wege offen, um zu einem in Frage stehenden Zahlenergebniß zu gelangen! Er kann die Rechnung unmittelbar ausführen, er kann sich der Logarithmentafeln bedienen, er kann endlich auch für jede Rechnungsart besonders construirte Tafeln anwenden.

Das unmittelbare Ausrechnen ist, wenn die gegebenen Zahlen aus vielen Ziffern bestehen, sehr umständlich, und kommt deshalb in der Regel nur dann zur Anwendung, wenn von dem Ergebnisse eine Genauigkeit verlangt wird, die beim Gebrauch von Tafeln nicht erreicht werden kann. Am häufigsten bedient man sich der Logarithmentafeln, um zu Resultaten der genannten Zahlenoperationen zu gelangen. Wenn auch diese Tafeln nicht unmittelbar auf das Ergebniß führen, so sind doch die noch übrig bleibenden Operationen, wodurch man dieses erlangt, so einfach, daß der Gewinn an Zeit in Hinsicht auf die unmittelbare Berechnung in fast allen Fällen noch immer ein beträchtlicher ist.

Je nachdem von dem Resultate eine größere oder kleinere Genauigkeit verlangt wird, wendet man die Logarithmen mit mehr oder weniger Decimalen an. In dem großen Tafelwerke von Vega: Thesaurus logarithmicus completus (Lips. Weidmann, 1794), gehen die Logarithmen bis zur zehnten Decimalstelle. Die durch Anwendung dieser Logarithmen erlangte Genauigkeit liegt aber meist außer den Grenzen, innerhalb welcher die Zahlenergebnisse des Ingenieurwesens enthalten sind.

Zu den gewöhnlichsten, eine große Genauigkeit erfordernden Rechnungen dienen die Logarithmentafeln mit siebenstelligen Logarithmen. Hierher gehört:

1) Georgs Freiherrn von Vega logarithmisch-trigonometrisches Handbuch, wovon die 42. Stereotyp-Auflage, bearbeitet von Bremiker, 1858 erschienen ist. (Berlin, Weidmann'sche Buchhandlung).

2) Köhlers logarithmisch-trigonometrisches Handbuch, 6. Stereotyp-Ausgabe, 1859. (Leipzig, bei Bernhard Tauchnitz).

3) Schrön's logarithmisch-trigonometrisches Handbuch, (Braunschweig, bei Friedrich Vieweg und Sohn) 1859.

Dieses werthvolle Werk besteht aus drei Theilen, wovon der erste die Logarithmen der Zahlen, der zweite die der trigonometrischen Linien und der dritte eine sehr zweckmäßig eingerichtete Productentafel enthält.

Der zweite Theil giebt die Logarithmen der trigonometrischen Linien von Winkeln, welche bis auf Secunden genau angegeben sind und ist daher zu genauen trigonometrischen Tabellen besonders zu empfehlen.

In vielen Fällen noch hinreichend genau sind die Tafeln mit sechs- oder fünfstelligen Logarithmen. Es gehören unter anderen hierher: die logarithmisch-trigonometrischen Tafeln u. s. w. von S. Stampfer, sowie auch die logarithmisch-trigonometrischen Tafeln u. s. w. von M. Rühlmann und die Tables de Logarithmes par Jérome de la Lande (Paris etc.). Diese und ähnliche Tafeln empfehlen sich durch ihr kleines Format zum Gebrauch auf Excursionen und Reisen.

In Fällen, wenn die gegebenen Zahlen nur aus wenig Ziffern bestehen, oder wenn es nur auf die Ausmittelung

eines genäherten oder an und für sich unsicheren und nicht scharf bestimmbaren Werthes ankommt, bedient man sich mit der größten Bequemlichkeit solcher Tabellen, welche die Resultate der vorgeschriebenen Zahlenoperationen unmittelbar angeben. Und wenn auch zuweilen durch den Gebrauch dieser der Zeitgewinn nicht bedeutend ausfällt, so besteht doch schon darin ein Gewinn, daß man dadurch die Ausführung von Operationen umgeht, welche eine gespannte Aufmerksamkeit erfordern und deshalb bald zur Geistesermüdung führen. Man hält durch Anwendung von Tafeln die Geistesthätigkeit mehr zusammen und sichert sich dadurch vor dem Einschleichen von übrigens vermeidlichen Fehlern!

Die Genauigkeit der auf die eine oder die andere Weise ausgeführten Rechnung muß der Schärfe von den der Rechnung zum Grunde gelegten Zahlenwerthen entsprechen. Durch ein scharf gerechnetes und in vielen Ziffern ausgedrücktes Rechnungsresultat ist nichts mehr gewonnen, als durch ein weniger genau berechnetes, aus weniger Ziffern bestehendes Rechnungsergebniß, wenn jenes über die möglichen Grenzen der Genauigkeit weit hinausgeht, dieses denselben aber noch vollkommen entspricht. So ist es z. B. ebenso genau, $1/7 = 0{,}143$ oder $0{,}1429$ statt $0{,}14285714\ldots$ zu setzen, wenn man weiß, daß der etwa durch Beobachtungen oder Messungen gefundene Divisor oder Nenner (7) ebenso gut um ein Zehntel seines Werthes größer als kleiner sein kann.

Die in die Rechnung eintretenden Zahlen werden meist durch Messungen oder Beobachtungen gefunden; sie enthalten deshalb auch die Fehler, Mängel und Unrichtigkeiten, welche aus der Unvollkommenheit unserer Sinne und Meßwerkzeuge entspringen. Um daher die Genauigkeit und Brauchbarkeit eines Rechnungsresultates beurtheilen zu können, hat man nicht allein den Grad der Genauigkeit der Rechnung, sondern auch die Stufe der Schärfe der Messungen und Beobachtungen zu wissen nöthig.

In den gewöhnlichen Fällen des Ingenieurwesens und besonders in der Mechanik und Hydraulik hat man es meist mit Größen zu thun, die sich mit Sicherheit nur durch drei- bis vierzifferige Zahlen ausdrücken lassen, ja es kommen Fälle vor, wo die Genauigkeit selbst noch geringer ist; es sind deshalb dem Ingenieur Tabellen, in welchen nur durch wenig Ziffern ausgedrückte Zahlenwerthe enthalten sind, von besonderem Nutzen, zumal, wenn das Aufsuchen in denselben große Bequemlichkeit gewährt und die übrige Rechnung mit den aufgesuchten Zahlen Einfachheit besitzt. Solche Tabellen sind aber die folgenden Producten-, Reciproken-, Potenzen- und Wurzeltafeln, deren Werth der längere Gebrauch besonders vor Augen führen wird.

I. Productentafel.

Einrichtung und Gebrauch der Productentafel.

Die nachstehende Productentafel enthält die 2=, 3=, 4=, 5=, 6=, 7=, 8=, 9fachen aller Zahlen von 1 bis 100; sie ist daher nichts weiter als ein größeres Einmaleins. Sie besteht aus 9 Verticalcolumnen, wovon die erste die natürlichen Zahlen von 1 bis 100, die zweite die zweifachen, die dritte die dreifachen dieser Zahlen u. s. w. enthält. Diesem zufolge giebt jede horizontale Zeile die 2=, 3=, 4fachen u. s. w. der vorstehenden Zahl an. So steht z. B. in der mit der Zahl 28 anfangenden Zeile und zugleich in der siebenten Verticalcolumne die Zahl 196, weil diese das Siebenfache der vorstehenden Zahl 28 ist.

Die Productentafel wird zur Erleichterung der Multiplication gebraucht. Bei Anwendung derselben erfordert das Multipliciren mehrzifferiger Zahlen eine bloße Addition, wie in folgenden Beispielen vor Augen geführt wird:

1) $38 \times 67 = 38 \times 6 \times 10 + 38 \times 7$

$$= \left\{ \begin{array}{r} 2280 \\ 266 \end{array} \right\} = 2546.$$

(S. Seite 6, Zeile 39.)

2) $67 \times 489 = 67 \times 4 \times 100 + 67 \times 8 \times 10 + 67 \times 9$

$$= \left\{ \begin{array}{r} 26800 \\ 5360 \\ 603 \end{array} \right\} = 32763.$$

(S. Seite 7 Zeile 18.)

3) $78 \times 2573 = 78 \times 2 \times 1000 + 78 \times 5 \times 100 + 78 \times 7 \times 10 + 78 \times 3$

$$= \left\{ \begin{array}{r} 156000 \\ 39000 \\ 5460 \\ 234 \end{array} \right\} = 200694.$$

(S. Seite 7 Zeile 29.)

So lange der eine Factor des gesuchten Productes nur aus zwei Ziffern besteht, hat die Ausmittelung des Productes mit Hülfe dieser Tabelle keine Schwierigkeit, bestehen aber beide Factoren aus mehr als zwei Ziffern, so muß man die Rechnung in mehrere Theile zerlegen, wie in folgenden Beispielen gezeigt wird:

4) $854 \times 279 = 850 \times 279 + 4 \times 279$

$$= \left\{ \begin{array}{r} 170000 \\ 59500 \\ 7650 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{r} 800 \\ 280 \\ 36 \end{array} \right\}$$

$$= 237150 + 1116 = 238266.$$

5) $7213 \times 3645 = 7200 \times 3645 + 13 \times 3645$

$$= \left\{\begin{array}{r} 21600000 \\ 4320000 \\ 288000 \\ 36000 \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{r} 39000 \\ 7800 \\ 520 \\ 65 \end{array}\right\}$$

$$= 26244000 + 47385 = 26291385.$$

Besondere Vortheile gewährt der Gebrauch der Productentafel bei der abgekürzten Multiplication, wo es nur auf einen genäherten Werth des Productes ankommt. Z. B.:

$$6) \quad 0{,}3645 \times 0{,}769 = \left\{\begin{array}{r} 0{,}2520 \\ 216 \\ 32 \\ 32 \\ 3 \end{array}\right\} = 0{,}2803$$

$$7) \quad 0{,}5763 \times 0{,}3854 = \left\{\begin{array}{r} 0{,}1710 \\ 456 \\ 29 \\ 2 \\ 19 \\ 5 \end{array}\right\} = 0{,}2221.$$

$$8) \quad 0{,}8744 \times 0{,}0904 = \left\{\begin{array}{r} 0{,}07830 \\ 35 \\ 40 \end{array}\right\} = 0{,}07905.$$

$$9) \quad 0{,}728 \,.\, 0{,}0037094 = \left\{\begin{array}{r} 0{,}0021600 \\ 5040 \\ 65 \\ 3 \\ 240 \\ 56 \\ 1 \end{array}\right\} = 0{,}0027005.$$

Productentafel. 1 — 39.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81
10	20	30	40	50	60	70	80	90
11	22	33	44	55	66	77	88	99
12	24	36	48	60	72	84	96	108
13	26	39	52	65	78	91	104	117
14	28	42	56	70	84	98	112	126
15	30	45	60	75	90	105	120	135
16	32	48	64	80	96	112	128	144
17	34	51	68	85	102	119	136	153
18	36	54	72	90	108	126	144	162
19	38	57	76	95	114	133	152	171
20	40	60	80	100	120	140	160	180
21	42	63	84	105	126	147	168	189
22	44	66	88	110	132	154	176	198
23	46	69	92	115	138	161	184	207
24	48	72	96	120	144	168	192	216
25	50	75	100	125	150	175	200	225
26	52	78	104	130	156	182	208	234
27	54	81	108	135	162	189	216	243
28	56	84	112	140	168	196	224	252
29	58	87	116	145	174	203	232	261
30	60	90	120	150	180	210	240	270
31	62	93	124	155	186	217	248	279
32	64	96	128	160	192	224	256	288
33	66	99	132	165	198	231	264	297
34	68	102	136	170	204	238	272	306
35	70	105	140	175	210	245	280	315
36	72	108	144	180	216	252	288	324
37	74	111	148	185	222	259	296	333
38	76	114	152	190	228	266	304	342
39	78	117	156	195	234	273	312	351

Productentafel. 40 — 79.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
40	80	120	160	200	240	280	320	360
41	82	123	164	205	246	287	328	369
42	84	126	168	210	252	294	336	378
43	86	129	172	215	258	301	344	387
44	88	132	176	220	264	308	352	396
45	90	135	180	225	270	315	360	405
46	92	138	184	230	276	322	368	414
47	94	141	188	235	282	329	376	423
48	96	144	192	240	288	336	384	432
49	98	147	196	245	294	343	392	441
50	100	150	200	250	300	350	400	450
51	102	153	204	255	306	357	408	459
52	104	156	208	260	312	364	416	468
53	106	159	212	265	318	371	424	477
54	108	162	216	270	324	378	432	486
55	110	165	220	275	330	385	440	495
56	112	168	224	280	336	392	448	504
57	114	171	228	285	342	399	456	513
58	116	174	232	290	348	406	464	522
59	118	177	236	295	354	413	472	531
60	120	180	240	300	360	420	480	540
61	122	183	244	305	366	427	488	549
62	124	186	248	310	372	434	496	558
63	126	189	252	315	378	441	504	567
64	128	192	256	320	384	448	512	576
65	130	195	260	325	390	455	520	585
66	132	198	264	330	396	462	528	594
67	134	201	268	335	402	469	536	603
68	136	204	272	340	408	476	544	612
69	138	207	276	345	414	483	552	621
70	140	210	280	350	420	490	560	630
71	142	213	284	355	426	497	568	639
72	144	216	288	360	432	504	576	648
73	146	219	292	365	438	511	584	657
74	148	222	296	370	444	518	592	666
75	150	225	300	375	450	525	600	675
76	152	228	304	380	456	532	608	684
77	154	231	308	385	462	539	616	693
78	156	234	312	390	468	546	624	702
79	158	237	316	395	474	553	632	711

Productentafel. 80 — 99.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
80	160	240	320	400	480	560	640	720
81	162	243	324	405	486	567	648	729
82	164	246	328	410	492	574	656	738
83	166	249	332	415	498	581	664	747
84	168	252	336	420	504	588	672	756
85	170	255	340	425	510	595	680	765
86	172	258	344	430	516	602	688	774
87	174	261	348	435	522	609	696	783
88	176	264	352	440	528	616	704	792
89	178	267	356	445	534	623	712	801
90	180	270	360	450	540	630	720	810
91	182	273	364	455	546	637	728	819
92	184	276	368	460	552	644	736	828
93	186	279	372	465	558	651	744	837
94	188	282	376	470	564	658	752	846
95	190	285	380	475	570	665	760	855
96	192	288	384	480	576	672	768	864
97	194	291	388	485	582	679	776	873
98	196	294	392	490	588	686	784	882
99	198	297	396	495	594	693	792	891

II. Reciprokentafel.

Einrichtung und Gebrauch der Reciprokentafel. Die nachfolgende Reciprokentafel enthält die reciproken Werthe der natürlichen Zahlenreihe von 1 bis 1000, oder giebt die Stammbrüche $^1/_1$, $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ u. s. w. bis $^1/_{1000}$ in Decimalbrüchen ausgedrückt an. Die erste Verticalcolumne dieser Tafel drückt die Einer und Zehner, die oberste Horizontalcolumne hingegen die hierzu gehörigen Hunderte der gegebenen Zahl oder des Nenners vom gegebenen Stammbruche aus; die übrigen Zahlen sind die den gegebenen Zahlen entsprechenden Reciproken oder Decimalbrüche. Jede dieser Zahlen gehört demjenigen Grundwerthe oder Stammbruche an, welcher mit derselben in einerlei Vertical- und Horizontalcolumne liegt. So entspricht z. B. der Werth 0,0042194 dem Grundwerthe 237 oder Stammbruche $^1/_{237}$, weil derselbe in der mit 37 anfangenden Horizontal- und mit 200 beginnenden Verticalcolumne befindlich ist. Umgekehrt folgt aus der Tafel der reciproke Werth von 546 oder der Stamm-

bruch $^1/_{546}$, = 0,0018315, weil diese Zahl in dem Durchschnitt der mit 46 anfangenden Horizontal- und der mit 500 beginnenden Verticalcolumne zugleich steht. Hiernach findet man auch $^1/_{837}$ = 0,0011947 und 0,0019763 = $^1/_{506}$.

Besteht die gegebene Zahl oder der Nenner des gegebenen Stammbruches aus vier Ziffern, z. B. 2376, so findet man den gesuchten reciproken Werth oder Stammbruch durch Interpolation auf folgende Weise. Der reciproke Werth von der kleinern Zahl 2370 ist 0,00042194 und der von um 10 größeren Zahl 2380, = 0,00042017; es ist also der letztere Werth um

$$0{,}00042194 - 0{,}00042017 = 0{,}00000177$$

kleiner als der erstere. Die gegebene Zahl 2376 ist aber um 6 größer als die kleinere Zahl 2370; deshalb hat man denn auch ihren reciproken Werth um $^6/_{10} \times 0{,}00000177 = 0{,}00000106$ kleiner als den reciproken Werth 0,00042194 von 2370; es ist demnach der in Frage stehende reciproke Werth von 2376 $= 0{,}00042194 - 0{,}00000106 = 0{,}00042088$.

Auf gleiche Weise findet man den reciproken Werth von

$$304{,}2 = 0{,}0032895 - {}^2/_{10} \times (0{,}0032895 - 0{,}0032787)$$
$$= 0{,}0032895 - 0{,}0000022 = 0{,}0032873.$$

Ebenso ist $\frac{1}{41{,}27} = 0{,}024272 - 0{,}7 \times 0{,}000059$
$$= 0{,}024272 - 0{,}000041 = 0{,}024231.$$

Mit Hülfe der reciproken Werthe läßt sich die Division in Multiplication umsetzen, denn der reciproke Werth des Divisors giebt durch Multiplication mit dem Dividenden den Quotienten. Z. B. $\frac{385}{237}$ ist $= \frac{1}{237} \times 385 = 0{,}0042194 \times 385 = 1{,}6245\ldots$; ferner $\frac{9{,}2}{0{,}638} = \frac{9200}{638} = 0{,}0015674 . 9200 = 14{,}42\ldots.$

Besonders vortheilhaft stellen sich die Producten- und Reciprokentafeln bei Auflösung von Proportionen heraus, wie folgendes Beispiel vor Augen führt:

Wenn $x : 32{,}5 = 179 : 623$; so ist

$$x = \frac{32{,}5 \times 179}{623} = 0{,}0016051 \times 58175 = 9{,}3377.$$

Reciprokentafel. 1 — 39.

Nr.	0	100	200	300	400
0	∞	0100000	0050000	0033333	0025000
1	1,0000000	0099010	0049751	0033223	0024938
2	5000000	0098039	0049505	0033113	0024876
3	3333333	0097087	0049261	0033003	0024814
4	2500000	0096154	0049020	0032895	0024752
5	2000000	0095238	0048780	0032787	0024691
6	1666667	0094340	0048544	0032680	0024631
7	1428571	0093458	0048309	0032573	0024570
8	1250000	0092593	0048077	0032468	0024510
9	1111111	0091743	0047847	0032362	0024450
10	1000000	0090909	0047619	0032258	0024390
11	0909091	0090090	0047393	0032154	0024331
12	0833333	0089286	0047170	0032051	0024272
13	0769231	0088496	0046948	0031949	0024213
14	0714286	0087719	0046729	0031847	0024155
15	0666667	0086957	0046512	0031746	0024096
16	0625000	0086207	0046296	0031646	0024038
17	0588235	0085470	0046083	0031546	0023981
18	0555556	0084746	0045872	0031447	0023923
19	0526316	0084034	0045662	0031348	0023866
20	0500000	0083333	0045455	0031250	0023810
21	0476190	0082645	0045249	0031153	0023753
22	0454545	0081967	0045045	0031056	0023697
23	0434783	0081301	0044843	0030960	0023641
24	0416667	0080645	0044643	0030864	0023585
25	0400000	0080000	0044444	0030769	0023529
26	0384615	0079365	0044248	0030675	0023474
27	0370370	0078740	0044053	0030581	0023419
28	0357143	0078125	0043860	0030488	0023364
29	0344828	0077519	0043668	0030395	0023310
30	0333333	0076923	0043478	0030303	0023256
31	0322581	0076336	0043290	0030211	0023202
32	0312500	0075758	0043103	0030120	0023148
33	0303030	0075188	0042918	0030030	0023095
34	0294118	0074627	0042735	0029940	0023041
35	0285714	0074074	0042553	0029851	0022989
36	0277778	0073529	0042373	0029762	0022936
37	0270270	0072993	0042194	0029674	0022883
38	0263158	0072464	0042017	0029586	0022831
39	0256410	0071942	0041841	0029499	0022779

Reciprokentafel. 1 — 39.

Nr.	500	600	700	800	900
0	0020000	0016667	0014286	0012500	0011111
1	0019960	0016639	0014265	0012484	0011099
2	0019920	0016611	0014245	0012469	0011086
3	0019881	0016584	0014225	0012453	0011074
4	0019841	0016556	0014205	0012438	0011062
5	0019802	0016529	0014184	0012422	0011050
6	0019763	0016502	0014164	0012407	0011038
7	0019724	0016474	0014144	0012392	0011025
8	0019685	0016447	0014124	0012376	0011013
9	0019646	0016420	0014104	0012361	0011001
10	0019608	0016393	0014085	0012346	0010989
11	0019569	0016367	0014065	0012330	0010977
12	0019531	0016340	0014045	0012315	0010965
13	0019493	0016313	0014025	0012300	0010953
14	0019455	0016287	0014006	0012285	0010941
15	0019417	0016260	0013986	0012270	0010929
16	0019380	0016234	0013966	0012255	0010917
17	0019342	0016207	0013947	0012240	0010905
18	0019305	0016181	0013928	0012225	0010893
19	0019268	0016155	0013908	0012210	0010881
20	0019231	0016129	0013889	0012195	0010870
21	0019194	0016103	0013870	0012180	0010858
22	0019157	0016077	0013850	0012165	0010846
23	0019120	0016051	0013831	0012151	0010834
24	0019084	0016026	0013812	0012136	0010823
25	0019048	0016000	0013793	0012121	0010811
26	0019011	0015974	0013774	0012107	0010799
27	0018975	0015949	0013755	0012092	0010787
28	0018939	0015924	0013736	0012077	0010776
29	0018904	0015898	0013717	0012063	0010764
30	0018868	0015873	0013699	0012048	0010753
31	0018832	0015848	0013680	0012034	0010741
32	0018797	0015823	0013661	0012019	0010730
33	0018762	0015798	0013643	0012005	0010718
34	0018727	0015773	0013624	0011990	0010707
35	0018692	0015748	0013605	0011976	0010695
36	0018657	0015723	0013587	0011962	0010684
37	0018622	0015699	0013569	0011947	0010672
38	0018587	0015674	0013550	0011933	0010661
39	0018553	0015649	0013532	0011919	0010650

Reciprokentafel. 40 — 79.

Nr.	0	100	200	300	400
40	0250000	0071429	0041667	0029412	0022727
41	0243902	0070922	0041494	0029326	0022676
42	0238095	0070423	0041322	0029240	0022624
43	0232558	0069930	0041152	0029155	0022573
44	0227273	0069444	0040984	0029070	0022523
45	0222222	0068966	0040816	0028986	0022472
46	0217391	0068493	0040650	0028902	0022422
47	0212766	0068027	0040486	0028818	0022371
48	0208333	0067568	0040323	0028736	0022321
49	0204082	0067114	0040161	0028653	0022272
50	0200000	0066667	0040000	0028571	0022222
51	0196078	0066225	0039841	0028490	0022173
52	0192308	0065789	0039683	0028409	0022124
53	0188679	0065359	0039526	0028329	0022075
54	0185185	0064935	0039370	0028249	0022026
55	0181818	0064516	0039216	0028169	0021978
56	0178571	0064103	0039062	0028090	0021930
57	0175439	0063694	0038911	0028011	0021882
58	0172414	0063291	0038760	0027933	0021834
59	0169492	0062893	0038610	0027855	0021786
60	0166667	0062500	0038462	0027778	0021739
61	0163934	0062112	0038314	0027701	0021692
62	0161290	0061728	0038168	0027624	0021645
63	0158730	0061350	0038023	0027548	0021598
64	0156250	0060976	0037879	0027473	0021552
65	0153846	0060606	0037736	0027397	0021505
66	0151515	0060241	0037594	0027322	0021459
67	0149254	0059880	0037453	0027248	0021413
68	0147059	0059524	0037313	0027174	0021368
69	0144928	0059172	0037175	0027100	0021322
70	0142857	0058824	0037037	0027027	0021277
71	0140845	0058480	0036900	0026954	0021231
72	0138889	0058140	0036765	0026882	0021186
73	0136986	0057803	0036630	0026810	0021142
74	0135135	0057471	0036496	0026738	0021097
75	0133333	0057143	0036364	0026667	0021053
76	0131579	0056818	0036232	0026596	0021008
77	0129870	0056497	0036101	0026525	0020964
78	0128205	0056180	0035971	0026455	0020921
79	0126582	0055866	0035842	0026385	0020877

Reciprokentafel. 40 — 79.

Nr.	500	600	700	800	900
40	0018519	0015625	0013514	0011905	0010638
41	0018484	0015601	0013495	0011891	0010627
42	0018450	0015576	0013477	0011876	0010616
43	0018416	0015552	0013459	0011862	0010604
44	0018382	0015528	0013441	0011848	0010593
45	0018349	0015504	0013423	0011834	0010582
46	0018315	0015480	0013405	0011820	0010571
47	0018282	0015456	0013387	0011806	0010560
48	0018248	0015432	0013369	0011792	0010549
49	0018215	0015408	0013351	0011779	0010537
50	0018182	0015385	0013333	0011765	0010526
51	0018149	0015361	0013316	0011751	0010515
52	0018116	0015337	0013298	0011737	0010504
53	0018083	0015314	0013280	0011723	0010493
54	0018051	0015291	0013263	0011710	0010482
55	0018018	0015267	0013245	0011696	0010471
56	0017986	0015244	0013228	0011682	0010460
57	0017953	0015221	0013210	0011669	0010449
58	0017921	0015198	0013193	0011655	0010438
59	0017889	0015175	0013175	0011641	0010428
60	0017857	0015152	0013158	0011628	0010417
61	0017825	0015129	0013141	0011614	0010406
62	0017794	0015106	0013123	0011601	0010395
63	0017762	0015083	0013106	0011587	0010384
64	0017730	0015060	0013089	0011574	0010373
65	0017699	0015038	0013072	0011561	0010363
66	0017668	0015015	0013055	0011547	0010352
67	0017637	0014993	0013038	0011534	0010341
68	0017606	0014970	0013021	0011521	0010331
69	0017575	0014948	0013004	0011507	0010320
70	0017544	0014925	0012987	0011494	0010309
71	0017513	0014903	0012970	0011481	0010299
72	0017483	0014881	0012953	0011468	0010288
73	0017452	0014859	0012937	0011455	0010277
74	0017422	0014837	0012920	0011442	0010267
75	0017391	0014815	0012903	0011429	0010256
76	0017361	0014793	0012887	0011416	0010246
77	0017331	0014771	0012870	0011403	0010235
78	0017301	0014749	0012853	0011390	0010225
79	0017271	0014728	0012837	0011377	0010215

Reciprokentafel. 80 — 99.

Nr.	0	100	200	300	400
80	0125000	0055556	0035714	0026316	0020833
81	0123457	0055249	0035587	0026247	0020790
82	0121951	0054945	0035461	0026178	0020747
83	0120482	0054645	0035336	0026110	0020704
84	0119048	0054348	0035211	0026042	0020661
85	0117647	0054054	0035088	0025974	0020619
86	0116279	0053763	0034965	0025907	0020576
87	0114943	0053476	0034843	0025840	0020534
88	0113636	0053191	0034722	0025773	0020492
89	0112360	0052910	0034602	0025707	0020450
90	0111111	0052632	0034483	0025641	0020408
91	0109890	0052356	0034364	0025575	0020367
92	0108696	0052083	0034247	0025510	0020325
93	0107527	0051813	0034130	0025445	0020284
94	0106383	0051546	0034014	0025381	0020243
95	0105263	0051282	0033898	0025316	0020202
96	0104167	0051020	0033784	0025253	0020161
97	0103093	0050761	0033670	0025189	0020121
98	0102041	0050505	0033557	0025126	0020080
99	0101010	0050251	0033445	0025063	0020040

III. Potenzentafel.

Einrichtung und Gebrauch der Potenzentafel.

Die Potenzentafel besteht aus zwei Theilen; der eine enthält die Quadrate, und der andere die Cuben aller Zahlen von 1 bis 1000. Die Ziffern in der ersten Verticalreihe geben die Einer und Zehner, die der ersten Horizontalreihe hingegen die Hunderte der gegebenen Grundzahl an, die entsprechende Potenz (Quadrat oder Cubus) befindet sich mit den ersten Ziffern in einerlei Horizontalreihe und mit den die Hunderte bezeichnenden Ziffern in einerlei Verticalreihe. Man findet hiernach zu einer gegebenen Zahl das Quadrat oder den Cubus, indem man die erste Ziffer der vorgelegten Zahl in der ersten Horizontal-, die aus den beiden andern Ziffern bestehende Zahl aber in der ersten Verticalreihe aufsucht, und nun von der ersten Stelle abwärts sowie von der zweiten seitwärts bis zur Begegnung fortrückt; an der so gefundenen Stelle steht die in Frage stehende Potenz. Hiernach findet man z. B. 467^2 oder das Quadrat von 467, = 218089, weil diese Zahl im Durchschnitt von der mit 400 anfangenden Vertical- und der 67 an der Spitze habenden Horizontalcolumne steht; ebenso ist 547^3, oder der Cubus von 547, = 163667323, weil diese dem zweiten Theil der Tafel angehörige Zahl in der

Reciprokentafel. 80 — 99.

Nr.	500	600	700	800	900
80	0017241	0014706	0012821	0011364	0010204
81	0017212	0014684	0012804	0011351	0010194
82	0017182	0014663	0012788	0011338	0010183
83	0017153	0014641	0012771	0011325	0010173
84	0017123	0014620	0012755	0011312	0010163
85	0017094	0014599	0012739	0011299	0010152
86	0017065	0014577	0012723	0011287	0010142
87	0017036	0014556	0012706	0011274	0010132
88	0017007	0014535	0012690	0011261	0010121
89	0016978	0014514	0012674	0011249	0010111
90	0016949	0014493	0012658	0011236	0010101
91	0016920	0014472	0012642	0011223	0010091
92	0016892	0014451	0012626	0011211	0010081
93	0016863	0014430	0012610	0011198	0010070
94	0016835	0014409	0012594	0011186	0010060
95	0016807	0014388	0012579	0011173	0010050
96	0016779	0014368	0012563	0011161	0010040
97	0016750	0014347	0012547	0011148	0010030
98	0016722	0014327	0012531	0011136	0010020
99	0016694	0014306	0012516	0011123	0010010

mit 500 überschriebenen Vertical- und in der siebenundvierzigsten Horizontalcolumne zugleich enthalten ist.

Besteht die gegebene Zahl aus mehr als drei Ziffern, so findet man ihre Potenz entweder durch Interpolation, oder durch Anwendung einer besondern arithmetischen Regel. Die einfache Interpolation giebt z. B. für $3{,}754^2$, da $3{,}76^2 = 14{,}1376$ und $3{,}75^2 = 14{,}0625$ ist,

$$= 14{,}0625 + 0{,}4 \times (14{,}1376 - 14{,}0625)$$
$$= 14{,}0625 + 0{,}4 \times 0{,}0751$$
$$= 14{,}0625 + 0{,}0300 = 14{,}0925.$$

Ebenso giebt sie, da $27{,}7^3 = 21253{,}9 \ldots$ und $27{,}6^3 = 21024{,}6$ ist, $27{,}68^3 = 21024{,}6 + 0{,}8 \times (253{,}9 - 24{,}6)$
$$= 21024{,}6 + 183{,}4 = 21208.$$

Der Algebra zu Folge, hat man $(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab$
und $(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2b$,
wofern b gegen a sehr klein ist. Wie beide Formeln zur Auffindung der Quadrate und Cuben mehrzifferiger Zahlen zu gebrauchen sind, mögen folgende Beispiele vor Augen führen;

$$0{,}9367^2 = 0{,}9360^2 + 2 . 0{,}9360 \times 0{,}0007$$
$$= 0{,}876096 + 0{,}001310 = 0{,}8774.$$
$$0{,}4802^3 = 0{,}4800^3 + 3 . 0{,}4800^2 \times 0{,}0002$$
$$\doteq 0{,}110592 + 0{,}23040 \times 0{,}0006$$
$$= 0{,}11059 + 0{,}00014 = 0{,}11073.$$

Potenzentafel. 0 — 39. 1) Quadrate.

	0	100	200	300	400
0	0	10000	40000	90000	160000
1	1	10201	40401	90601	160801
2	4	10404	40804	91204	161604
3	9	10609	41209	91809	162409
4	16	10816	41616	92416	163216
5	25	11025	42025	93025	164025
6	36	11236	42436	93636	164836
7	49	11449	42849	94249	165649
8	64	11664	43264	94864	166464
9	81	11881	43681	95481	167281
10	100	12100	44100	96100	168100
11	121	12321	44521	96721	168921
12	144	12544	44944	97344	169744
13	169	12769	45369	97969	170569
14	196	12996	45796	98596	171396
15	225	13225	46225	99225	172225
16	256	13456	46656	99856	173056
17	289	13689	47089	100489	173889
18	324	13924	47524	101124	174724
19	361	14161	47961	101761	175561
20	400	14400	48400	102400	176400
21	441	14641	48841	103041	177241
22	484	14884	49284	103684	178084
23	529	15129	49729	104329	178929
24	576	15376	50176	104976	179776
25	625	15625	50625	105625	180625
26	676	15876	51076	106276	181476
27	729	16129	51529	106929	182329
28	784	16384	51984	107584	183184
29	841	16641	52441	108241	184041
30	900	16900	52900	108900	184900
31	961	17161	53361	109561	185761
32	1024	17424	53824	110224	186624
33	1089	17689	54289	110889	187489
34	1156	17956	54756	111556	188356
35	1225	18225	55225	112225	189225
36	1296	18496	55696	112896	190096
37	1369	18769	56169	113569	190969
38	1444	19044	56644	114244	191844
39	1521	19321	57121	114921	192721

Potenzentafel. 0 — 39. 1) Quadrate.

	500	600	700	800	900
0	250000	360000	490000	640000	810000
1	251001	361201	491401	641601	811801
2	252004	362404	492804	643204	813604
3	253009	363609	494209	644809	815409
4	254016	364816	495616	646416	817216
5	255025	366025	497025	648025	819025
6	256036	367236	498436	649636	820836
7	257049	368449	499849	651249	822649
8	258064	369664	501264	652864	824464
9	259081	370881	502681	654481	826281
10	260100	372100	504100	656100	828100
11	261121	373321	505521	657721	829921
12	262144	374544	506944	659344	831744
13	263169	375769	508369	660969	833569
14	264196	376996	509796	662596	835396
15	265225	378225	511225	664225	837225
16	266256	379456	512656	665856	839056
17	267289	380689	514089	667489	840889
18	268324	381924	515524	669124	842724
19	269361	383161	516961	670761	844561
20	270400	384400	518400	672400	846400
21	271441	385641	519841	674041	848241
22	272484	386884	521284	675684	850084
23	273529	388129	522729	677329	851929
24	274576	389376	524176	678976	853776
25	275625	390625	525625	680625	855625
26	276676	391876	527076	682276	857476
27	277729	393129	528529	683929	859329
28	278784	394384	529984	685584	861184
29	279841	395641	531441	687241	863041
30	280900	396900	532900	688900	864900
31	281961	398161	534361	690561	866761
32	283024	399424	535824	692224	868624
33	284089	400689	537289	693889	870489
34	285156	401956	538756	695556	872356
35	286225	403225	540225	697225	874225
36	287296	404496	541696	698896	876096
37	288369	405769	543169	700569	877969
38	289444	407044	544644	702244	879844
39	290521	408321	546121	703921	881721

Potenzentafel. 40 — 79. 1) Quadrate.

	0	100	200	300	400
40	1600	19600	57600	115600	193600
41	1681	19881	58081	116281	194481
42	1764	20164	58564	116964	195364
43	1849	20449	59049	117649	196249
44	1936	20736	59536	118336	197136
45	2025	21025	60025	119025	198025
46	2116	21316	60516	119716	198916
47	2209	21609	61009	120409	199809
48	2304	21904	61504	121104	200704
49	2401	22201	62001	121801	201601
50	2500	22500	62500	122500	202500
51	2601	22801	63001	123201	203401
52	2704	23104	63504	123904	204304
53	2809	23409	64009	124609	205209
54	2916	23716	64516	125316	206116
55	3025	24025	65025	126025	207025
56	3136	24336	65536	126736	207936
57	3249	24649	66049	127449	208849
58	3364	24964	66564	128164	209764
59	3481	25281	67081	128881	210681
60	3600	25600	67600	129600	211600
61	3721	25921	68121	130321	212521
62	3844	26244	68644	131044	213444
63	3969	26569	69169	131769	214369
64	4096	26896	69696	132496	215296
65	4225	27225	70225	133225	216225
66	4356	27556	70756	133956	217156
67	4489	27889	71289	134689	218089
68	4624	28224	71824	135424	219024
69	4761	28561	72361	136161	219961
70	4900	28900	72900	136900	220900
71	5041	29241	73441	137641	221841
72	5184	29584	73984	138384	222784
73	5329	29929	74529	139129	223729
74	5476	30276	75076	139876	224676
75	5625	30625	75625	140625	225625
76	5776	30976	76176	141376	226576
77	5929	31329	76729	142129	227529
78	6084	31684	77284	142884	228484
79	6241	32041	77841	143641	229441

Potenzentafel. 40 — 79. 1) Quadrate.

	500	600	700	800	900
40	291600	409600	547600	705600	883600
41	292681	410881	549081	707281	885481
42	293764	412164	550564	708964	887364
43	294849	413449	552049	710649	889249
44	295936	414736	553536	712336	891136
45	297025	416025	555025	714025	893025
46	298116	417316	556516	715716	894916
47	299209	418609	558009	717409	896809
48	300304	419904	559504	719104	898704
49	301401	421201	561001	720801	900601
50	302500	422500	562500	722500	902500
51	303601	423801	564001	724201	904401
52	304704	425104	565504	725904	906304
53	305809	426409	567009	727609	908209
54	306916	427716	568516	729316	910116
55	308025	429025	570025	731025	912025
56	309136	430336	571536	732736	913936
57	310249	431649	573049	734449	915849
58	311364	432964	574564	736164	917764
59	312481	434281	576081	737881	919681
60	313600	435600	577600	739600	921600
61	314721	436921	579121	741321	923521
62	315844	438244	580644	743044	925444
63	316969	439569	582169	744769	927369
64	318096	440896	583696	746496	929296
65	319225	442225	585225	748225	931225
66	320356	443556	586756	749956	933156
67	321489	444889	588289	751689	935089
68	322624	446224	589824	753424	937024
69	323761	447561	591361	755161	938961
70	324900	448900	592900	756900	940900
71	326041	450241	594441	758641	942841
72	327184	451584	595984	760384	944784
73	328329	452929	597529	762129	946729
74	329476	454276	599076	763876	948676
75	330625	455625	600625	765625	950625
76	331776	456976	602176	767376	952576
77	332929	458329	603729	769129	954529
78	334084	459684	605284	770884	956484
79	335241	461041	606841	772641	958441

Potenzentafel. 80 — 99. 1) Quadrate.

	0	100	200	300	400
80	6400	32400	78400	144400	230400
81	6561	32761	78961	145161	231361
82	6724	33124	79524	145924	232324
83	6889	33489	80089	146689	233289
84	7056	33856	80656	147456	234256
85	7225	34225	81225	148225	235225
86	7396	34596	81796	148996	236196
87	7569	34969	82369	149769	237169
88	7744	35344	82944	150544	238144
89	7921	35721	83521	151321	239121
90	8100	36100	84100	152100	240100
91	8281	36481	84681	152881	241081
92	8464	36864	85264	153664	242064
93	8649	37249	85849	154449	243049
94	8836	37636	86436	155236	244036
95	9025	38025	87025	156025	245025
96	9216	38416	87616	156816	246016
97	9409	38809	88209	157609	247009
98	9604	39204	88804	158404	248004
99	9801	39601	89401	159201	249001

2) Cuben. 0 — 9.

	0	100	200	300	400
0	0	1000000	8000000	27000000	64000000
1	1	1030301	8120601	27270901	64481201
2	8	1061208	8242408	27543608	64964808
3	27	1092727	8365427	27818127	65450827
4	64	1124864	8489664	28094464	65939264
5	125	1157625	8615125	28372625	66430125
6	216	1191016	8741816	28652616	66923416
7	343	1225043	8869743	28934443	67419143
8	512	1259712	8998912	29218112	67917312
9	729	1295029	9129329	29503629	68417929

Potenzentafel. 80 — 99. 1) Quadrate.

	500	600	700	800	900
80	336400	462400	608400	774400	960400
81	337561	463761	609961	776161	962361
82	338724	465124	611524	777924	964324
83	339889	466489	613089	779689	966289
84	341056	467856	614656	781456	968256
85	342225	469225	616225	783225	970225
86	343396	470596	617796	784996	972196
87	344569	471969	619369	786769	974169
88	345744	473344	620944	788544	976144
89	346921	474721	622521	790321	978121
90	348100	476100	624100	792100	980100
91	349281	477481	625681	793881	982081
92	350464	478864	627264	795664	984064
93	351649	480249	628849	797449	986049
94	352836	481636	630436	799236	988036
95	354025	483025	632025	801025	990025
96	355216	484416	633616	802816	992016
97	356409	485809	635209	804609	994009
98	357604	487204	636804	806404	996004
99	358801	488601	638401	808201	998001

2) Cuben. 0 — 9.

	500	600	700	800	900
0	125000000	216000000	343000000	512000000	729000000
1	125751501	217081801	344472101	513922401	731432701
2	126506008	218167208	345948408	515849608	733870808
3	127263527	219256227	347428927	517781627	736314327
4	128024064	220348864	348913664	519718464	738763264
5	128787625	221445125	350402625	521660125	741217625
6	129554216	222545016	351895816	523606616	743677416
7	130323843	223648543	353393243	525557943	746142643
8	131096512	224755712	354894912	527514112	748613312
9	131872229	225866529	356400829	529475129	751089429

Potenzentafel. 10 — 49. 2) Cuben.

	0	100	200	300	400
10	1000	1331000	9261000	29791000	68921000
11	1331	1367631	9393931	30080231	69426531
12	1728	1404928	9528128	30371328	69934528
13	2197	1442897	9663597	30664297	70444997
14	2744	1481544	9800344	30959144	70957944
15	3375	1520875	9938375	31255875	71473375
16	4096	1560896	10077696	31554496	71991296
17	4913	1601613	10218313	31855013	72511713
18	5832	1643032	10360232	32157432	73034632
19	6859	1685159	10503459	32461759	73560059
20	8000	1728000	10648000	32768000	74088000
21	9261	1771561	10793861	33076161	74618461
22	10648	1815848	10941048	33386248	75151448
23	12167	1860867	11089567	33698267	75686967
24	13824	1906624	11239424	34012224	76225024
25	15625	1953125	11390625	34328125	76765625
26	17576	2000376	11543176	34645976	77308776
27	19683	2048383	11697083	34965783	77854483
28	21952	2097152	11852352	35287552	78402752
29	24389	2146689	12008989	35611289	78953589
30	27000	2197000	12167000	35937000	79507000
31	29791	2248091	12326391	36264691	80062991
32	32768	2299968	12487168	36594368	80621568
33	35937	2352637	12649337	36926037	81182737
34	39304	2406104	12812904	37259704	81746504
35	42875	2460375	12977875	37595375	82312875
36	46656	2515456	13144256	37933056	82881856
37	50653	2571353	13312053	38272753	83453453
38	54872	2628072	13481272	38614472	84027672
39	59319	2685619	13651919	38958219	84604519
40	64000	2744000	13824000	39304000	85184000
41	68921	2803221	13997521	39651821	85766121
42	74088	2863288	14172488	40001688	86350888
43	79507	2924207	14348907	40353607	86938307
44	85184	2985984	14526784	40707584	87528384
45	91125	3048625	14706125	41063625	88121125
46	97336	3112136	14886936	41421736	88716536
47	103823	3176523	15069223	41781923	89314623
48	110592	3241792	15252992	42144192	89915392
49	117649	3307949	15438249	42508549	90518849

Potenzentafel. 10 — 49. 2) Cuben.

	500	600	700	800	900
10	132651000	226981000	357911000	531441000	753571000
11	133432831	228099131	359425431	533411731	756058031
12	134217728	229220928	360944128	535387328	758550528
13	135005697	230346397	362467097	537367797	761048497
14	135796744	231475544	363994344	539353144	763551944
15	136590875	232608375	365525875	541343375	766060875
16	137388096	233744896	367061696	543338496	768575296
17	138188413	234885113	368601813	545338513	771095213
18	138991832	236029032	370146232	547343432	773620632
19	139798359	237176659	371694959	549353259	776151559
20	140608000	238328000	373248000	551368000	778688000
21	141420761	239483061	374805361	553387661	781229961
22	142236648	240641848	376367048	555412248	783777448
23	143055667	241804367	377933067	557441767	786330467
24	143877824	242970624	379503424	559476224	788889024
25	144703125	244140625	381078125	561515625	791453125
26	145531576	245314376	382657176	563559976	794022776
27	146363183	246491883	384240583	565609283	796597983
28	147197952	247673152	385828352	567663552	799178752
29	148035889	248858189	387420489	569722789	801765089
30	148877000	250047000	389017000	571787000	804357000
31	149721291	251239591	390617891	573856191	806954491
32	150568768	252435968	392223168	575930368	809557568
33	151419437	253636137	393832837	578009537	812166237
34	152273304	254840104	395446904	580093704	814780504
35	153130375	256047875	397065375	582182875	817400375
36	153990656	257259456	398688256	584277056	820025856
37	154854153	258474853	400315553	586376253	822656953
38	155720872	259694072	401947272	588480472	825293672
39	156590819	260917119	403583419	590589719	827936019
40	157464000	262144000	405224000	592704000	830584000
41	158340421	263374721	406869021	594823321	833237621
42	159220088	264609288	408518488	596947688	835896888
43	160103007	265847707	410172407	599077107	838561807
44	160989184	267089984	411830784	601211584	841232384
45	161878625	268336125	413493625	603351125	843908625
46	162771336	269586136	415160936	605495736	846590536
47	163667323	270840023	416832723	607645423	849278123
48	164566592	272097792	418508992	609800192	851971392
49	165469149	273359449	420189749	611960049	854670349

Potenztafel. 50 — 89. 2) Cuben.

	0	100	200	300	400
50	125000	3375000	15625000	42875000	91125000
51	132651	3442951	15813251	43243551	91733851
52	140608	3511808	16003008	43614208	92345408
53	148877	3581577	16194277	43986977	92959677
54	157464	3652264	16387064	44361864	93576664
55	166375	3723875	16581375	44738875	94196375
56	175616	3796416	16777216	45118016	94818816
57	185193	3869893	16974593	45499293	95443993
58	195112	3944312	17173512	45882712	96071912
59	205379	4019679	17373979	46268279	96702579
60	216000	4096000	17576000	46656000	97336000
61	226981	4173281	17779581	47045881	97972181
62	238328	4251528	17984728	47437928	98611128
63	250047	4330747	18191447	47832147	99252847
64	262144	4410944	18399744	48228544	99897344
65	274625	4492125	18609625	48627125	100544625
66	287496	4574296	18821096	49027896	101194696
67	300763	4657463	19034163	49430863	101847563
68	314432	4741632	19248832	49836032	102503232
69	328509	4826809	19465109	50243409	103161709
70	343000	4913000	19683000	50653000	103823000
71	357911	5000211	19902511	51064811	104487111
72	373248	5088448	20123648	51478848	105154048
73	389017	5177717	20346417	51895117	105823817
74	405224	5268024	20570824	52313624	106496424
75	421875	5359375	20796875	52734375	107171875
76	438976	5451776	21024576	53157376	107850176
77	456533	5545233	21253933	53582633	108531333
78	474552	5639752	21484952	54010152	109215352
79	493039	5735339	21717639	54439939	109902239
80	512000	5832000	21952000	54872000	110592000
81	531441	5929741	22188041	55306341	111284641
82	551368	6028568	22425768	55742968	111980168
83	571787	6128487	22665187	56181887	112678587
84	592704	6229504	22906304	56623104	113379904
85	614125	6331625	23149125	57066625	114084125
86	636056	6434856	23393656	57512456	114791256
87	658503	6539203	23639903	57960603	115501303
88	681472	6644672	23887872	58411072	116214272
89	704969	6751269	24137569	58863869	116930169

Potenzentafel. 50 — 89. 2) Cuben.

	500	600	700	800	900
50	166375000	274625000	421875000	614125000	857375000
51	167284151	275894451	423564751	616295051	860085351
52	168196608	277167808	425259008	618470208	862801408
53	169112377	278445077	426957777	620650477	865523177
54	170031464	279726264	428661064	622835864	868250664
55	170953875	281011375	430368875	625026375	870983875
56	171879616	282300416	432081216	627222016	873722816
57	172808693	283593393	433798093	629422793	876467493
58	173741112	284890312	435519512	631628712	879217912
59	174676879	286191179	437245479	633839779	881974079
60	175616000	287496000	438976000	636056000	884736000
61	176558481	288804781	440711081	638277381	887503681
62	177504328	290117528	442450728	640503928	890277128
63	178453547	291434247	444194947	642735647	893056347
64	179406144	292754944	445943744	644972544	895841344
65	180362125	294079625	447697125	647214625	898632125
66	181321496	295408296	449455096	649461896	901428696
67	182284263	296740963	451217663	651714363	904231063
68	183250432	298077632	452984832	653972032	907039232
69	184220009	299418309	454756609	656234909	909853209
70	185193000	300763000	456533000	658503000	912673000
71	186169411	302111711	458314011	660776311	915498611
72	187149248	303464448	460099648	663054848	918330048
73	188132517	304821217	461889917	665338617	921167317
74	189119224	306182024	463684824	667627624	924010424
75	190109375	307546875	465484375	669921875	926859375
76	191102976	308915776	467288576	672221376	929714176
77	192100033	310288733	469097433	674526133	932574833
78	193100552	311665752	470910952	676836152	935441352
79	194104539	313046839	472729139	679151439	938313739
80	195112000	314432000	474552000	681472000	941192000
81	196122941	315821241	476379541	683797841	944076141
82	197137368	317214568	478211768	686128968	946966168
83	198155287	318611987	480048687	688465387	949862087
84	199176704	320013504	481890304	690807104	952763904
85	200201625	321419125	483736625	693154125	955671625
86	201230056	322828856	485587656	695506456	958585256
87	202262003	324242703	487443403	697864103	961504803
88	203297472	325660672	489303872	700227072	964430272
89	204336469	327082769	491169069	702595369	967361669

Potenzentafel. 90 — 99. 2) Cuben.

	0	100	200	300	400
90	729000	6859000	24389000	59319000	117649000
91	753571	6967871	24642171	59776471	118370771
92	778688	7077888	24897088	60236288	119095488
93	804357	7189057	25153757	60698457	119823157
94	830584	7301384	25412184	61162984	120553784
95	857375	7414875	25672375	61629875	121287375
96	884736	7529536	25934336	62099136	122023936
97	912673	7645373	26198073	62570773	122763473
98	941192	7762392	26463592	63044792	123505992
99	970299	7880599	26730899	63521199	124251499

IV. Wurzeltafel.

Einrichtung und Gebrauch der Wurzeltafel.

Die Wurzeltafel enthält die Quadrat- und Cubikwurzeln aller Zahlen der Reihe 1, 2, 3 ... bis 1000; ihre Einrichtung ist vollkommen übereinstimmend mit der Einrichtung der Potenzentafel. Man findet dieser zufolge die Quadrat- oder Cubikwurzel einer dreizifferigen Zahl, wenn man die durch die letzten beiden Ziffern ausgedrückte Zahl in der ersten Verticalcolumne aufsucht und von da horizontal fortgeht, bis man in die Verticalcolumne kommt, an deren Spitze die erste Ziffer der gegebenen Zahl steht.

Hiernach ist z. B. die Quadratwurzel von 567 oder $\sqrt{567} = 23{,}8118$, denn diese Zahl steht unter 500 in derjenigen horizontalen Zeile, an deren Spitze die Zahl 67 steht. Ferner ist $\sqrt{5{,}67} = 2{,}38118$; auch $\sqrt{0{,}0567} = 0{,}238118$ u. s. w. Ebenso findet man die Cubikwurzel aus 279 oder $\sqrt[3]{279} = 6{,}5343$, auch $\sqrt[3]{0{,}279} = 0{,}65343$.

Besteht die gegebene Zahl aus mehr als drei Ziffern, so ist zur Ermittelung der Wurzel das Interpolationsverfahren oder die Anwendung einer besondern Regel der Arithmetik nöthig. Das Interpoliren ist das gewöhnliche. Durch dasselbe findet man z. B.:

$$\sqrt{1845} = \sqrt{1800 + 45} = 42{,}426 + 0{,}45 \times (43{,}589 - 42{,}426)$$
$$= 42{,}426 + 0{,}45 \times 1{,}163 = 42{,}426 + 0{,}523 = 42{,}95;$$

ebenso: $\sqrt{18{,}45} = 4{,}295$ und $\sqrt{0{,}1845} = 0{,}4295$.

Ferner:

$$\sqrt[3]{7451} = \sqrt[3]{7000 + 451} = 19{,}129 + 0{,}451 \times (20{,}000 - 19{,}129)$$
$$= 19{,}129 + 0{,}451 \times 0{,}871 = 19{,}129 + 0{,}393$$
$$= 19{,}52 \ldots \text{ (richtiger } 19{,}53),$$

ebenso: $\sqrt[3]{7{,}451} = 1{,}953 \ldots$ u. s. w.

Auch in folgenden Fällen, wo die gegebene Zahl nur aus drei Ziffern besteht, oder Nullen anzuhängen sind, um die Zahl zur Wurzelextraction geschickt zu machen, ist die Interpolation nothwendig, z. B.:

Potenzentafel. 90 — 99. 2) Cuben.

	500	600	700	800	900
90	205379000	328509000	493039000	704969000	970299000
91	206425071	329939371	494913671	707347971	973242271
92	207474688	331373888	496793088	709732288	976191488
93	208527857	332812557	498677257	712121957	979146657
94	209584584	334255384	500566184	714516984	982107784
95	210644875	335702375	502459875	716917375	985074875
96	211708736	337153536	504358336	719323136	988047936
97	212776173	338608873	506261573	721734273	991026973
98	213847192	340068392	508169592	724150792	994011992
99	214921799	341532099	510082399	726572699	997002999

$$\sqrt[2]{59,3} = \sqrt[2]{59,30} = \sqrt{59 + 0,30}$$
$$= 7,6811 + 0,3 \times (7,7460 - 7,6811)$$
$$= 7,6811 + 0,0195 = 7,7006,$$
$$\sqrt[3]{6,29} = \sqrt[3]{6,290} = \sqrt[3]{6 + 0,29}$$
$$= 1,8171 + 0,29 \times (1,9129 - 1,8171)$$
$$= 1,8171 + 0,0278 = 1,845 \text{ (richtiger } 1,846).$$

Statt der Interpolation läßt sich bei Erreichung einer größeren Genauigkeit von folgenden Formeln Gebrauch machen, wobei aber nicht die Wurzel-, sondern die Potenzentafel in Anwendung zu bringen ist. Man hat annähernd

$$\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \frac{b}{2\,a} \text{ und } \sqrt[3]{a^3 \pm b} = a \pm \frac{b}{3\,a^2},$$

wofern nur b viel kleiner ist als a. Hiernach findet man z. B.:

$$\sqrt{5521} = \sqrt{5476 + 45} = 74 + \frac{45}{2\,.\,74}$$
$$= 74,304 \text{ (richtiger } 74,303).$$

ebenso $\sqrt{74,8} = \sqrt{74,80} = \sqrt{73,96 + 0,84}$

$$= 8,6 + \frac{0,84}{2\,.\,8,6} = 8,6 + 0,0488 = 8,649.$$

Ferner: $\sqrt[3]{14,53} = \sqrt[3]{14,530} = \sqrt[3]{13,824 + 0,706}$

$$= 2,4 + \frac{0,706}{3 \times (2,4)^2} = 2,4 + \frac{0,706}{17,28} = 2,440\ldots$$

und $\sqrt[3]{0,5631} = \sqrt[3]{0,563100} = \sqrt[3]{0,551368 + 0.011732}$

$$= 0,82 + \frac{0,011732}{3\,.\,0,6724} = 0,8258.$$

In manchen Fällen sind folgende Regeln anzuwenden.

$$\sqrt{a} = \frac{\sqrt{a\,b^2}}{b}, \text{ z. B. } \sqrt{13,4} = {}^1/_5 \sqrt{13,4\,.\,25}$$
$$= 0,2 \sqrt{335} = 3,6606, \text{ und}$$
$$\sqrt[3]{a} = \frac{\sqrt[3]{a\,b^3}}{b}, \text{ z. B. } \sqrt{4,57} = {}^1/_5 \sqrt[3]{4,57\,.\,125}$$
$$= 0,2 \sqrt[3]{565} = 1,6534.$$

Wurzeltafel. 0 — 39. Quadratwurzel.

Nr.	0	100	200	300	400
0	0,0000	10,0000	14,1421	17,3205	20,0000
1	1,0000	10,0499	14,1774	17,3494	20,0250
2	1,4142	10,0995	14,2127	17,3781	20,0499
3	1,7321	10,1489	14,2478	17,4069	20,0749
4	2,0000	10,1980	14,2829	17,4356	20,0998
5	2,2361	10,2470	14,3178	17,4642	20,1246
6	2,4495	10,2956	14,3527	17,4929	20,1494
7	2,6458	10,3441	14,3875	17,5214	20,1742
8	2,8284	10,3923	14,4222	17,5499	20,1990
9	3,0000	10,4403	14,4568	17,5784	20,2237
10	3,1623	10,4881	14,4914	17,6068	20,2485
11	3,3166	10,5357	14,5258	17,6352	20,2731
12	3,4641	10,5830	14,5602	17,6635	20,2978
13	3,6056	10,6301	14.5945	17,6918	20,3224
14	3,7417	10,6771	14,6287	17,7200	20,3470
15	3,8730	10,7238	14,6629	17,7482	20,3715
16	4,0000	10,7703	14,6969	17,7764	20,3961
17	4,1231	10,8167	14,7309	17,8045	20,4206
18	4,2426	10,8628	14,7648	17,8326	20,4450
19	4,3589	10,9087	14,7986	17,8606	20,4695
20	4,4721	10,9545	14,8324	17,8885	20,4939
21	4,5826	11,0000	14,8661	17,9165	20,5183
22	4,6904	11,0454	14,8997	17,9444	20,5426
23	4,7958	11,0905	14,9332	17,9722	20,5670
24	4,8990	11,1355	14,9666	18,0000	20,5913
25	5,0000	11,1803	15,0000	18,0278	20,6155
26	5,0990	11,2250	15,0333	18,0555	20,6398
27	5,1962	11,2694	15,0665	18,0831	20,6640
28	5,2915	11,3137	15,0997	18,1108	20,6882
29	5,3852	11,3578	15,1327	18,1384	20,7123
30	5,4772	11,4018	15,1658	18,1659	20,7364
31	5,5678	11,4455	15,1987	18,1934	20,7605
32	5,6569	11,4891	15,2315	18,2209	20,7846
33	5,7446	11.5326	15,2643	18,2483	20,8087
34	5,8310	11,5758	15,2971	18,2757	20,8327
35	5,9161	11,6190	15,3297	18,3030	20,8567
36	6,0000	11,6619	15,3623	18,3303	20,8806
37	6,0828	11,7047	15,3948	18,3576	20,9045
38	6,1644	11,7473	15,4272	18,3848	20,9284
39	6,2450	11,7898	15,4596	18,4120	20,9523

Wurzeltafel. 0 — 39. Quadratwurzeln.

Nr.	500	600	700	800	900
0	22,3607	24,4949	26,4575	28,2843	30,0000
1	22,3830	24,5153	26,4764	28,3019	30,0167
2	22,4054	24,5357	26,4953	28,3196	30,0333
3	22,4277	24,5561	26,5141	28,3373	30,0500
4	22,4499	24,5764	26,5330	28,3549	30,0666
5	22,4722	24,5967	26,5518	28,3725	30,0832
6	22,4944	24,6171	26,5707	28,3901	30,0998
7	22,5167	24,6374	26,5895	28,4077	30,1164
8	22,5389	24,6577	26,6083	28,4253	30,1330
9	22,5610	24,6779	26,6271	28,4429	30,1496
10	22,5832	24,6982	26,6458	28,4605	30,1662
11	22,6053	24,7184	26,6646	28,4781	30,1828
12	22,6274	24,7386	26,6833	28,4956	30,1993
13	22,6495	24,7588	26,7021	28,5132	30,2159
14	22,6716	24,7790	26,7208	28,5307	30,2324
15	22,6936	24,7992	26,7395	28,5482	30,2490
16	22,7156	24,8193	26,7582	28,5657	30,2655
17	22,7376	24,8395	26,7769	28,5832	30,2820
18	22,7596	24,8596	26,7955	28,6007	30,2985
19	22,7816	24,8797	26,8142	28,6182	30,3150
20	22,8035	24,8998	26,8328	28,6356	30,3315
21	22,8254	24,9199	26,8514	28,6531	30,3480
22	22,8473	24,9399	26,8701	28,6705	30,3645
23	22,8692	24,9600	26,8887	28,6880	30,3809
24	22,8910	24,9800	26,9072	28,7054	30,3974
25	22,9129	25,0000	26,9258	28,7228	30,4138
26	22,9347	25,0200	26,9444	28,7402	30,4302
27	22,9565	25,0400	26,9629	28,7576	30,4467
28	22,9783	25,0599	26,9815	28,7750	30,4631
29	23,0000	25,0799	27,0000	28,7924	30,4795
30	23,0217	25,0998	27,0185	28,8097	30,4959
31	23,0434	25,1197	27,0370	28,8271	30,5123
32	23,0651	25,1396	27,0555	28,8444	30,5287
33	23,0868	25,1595	27,0740	28,8617	30,5450
34	23,1084	25,1794	27,0924	28,8791	30,5614
35	23,1301	25,1992	27,1109	28,8964	30,5778
36	23,1517	25,2190	27,1293	28,9137	30,5941
37	23,1733	25,2389	27,1477	28,9310	30,6105
38	23,1948	25,2587	27,1662	28,9482	30,6268
39	23,2164	25,2784	27,1846	28,9655	30,6431

Wurzeltafel. 40 — 79. Quadratwurzeln.

Nr.	0	100	200	300	400
40	6,3246	11,8322	15,4919	18,4391	20,9762
41	6,4031	11,8743	15,5242	18,4662	21,0000
42	6,4807	11,9164	15,5563	18,4932	21,0238
43	6,5574	11,9583	15,5885	18,5203	21,0476
44	6,6332	12,0000	15,6205	18,5472	21,0713
45	6,7082	12,0416	15,6525	18,5742	21,0950
46	6,7823	12,0830	15,6844	18,6011	21,1187
47	6,8557	12,1244	15,7162	18,6279	21,1424
48	6,9282	12,1655	15,7480	18,6548	21,1660
49	7,0000	12,2066	15,7797	18,6815	21,1896
50	7,0711	12,2474	15,8114	18,7083	21,2132
51	7,1414	12,2882	15,8430	18,7350	21,2368
52	7,2111	12,3288	15,8745	18,7617	21,2603
53	7,2801	12,3693	15,9060	18,7883	21,2838
54	7,3485	12,4097	15,9374	18,8149	21,3073
55	7,4162	12,4499	15,9687	18,8414	21,3307
56	7,4833	12,4900	16,0000	18,8680	21,3542
57	7,5498	12,5300	16,0312	18,8944	21,3776
58	7,6158	12,5698	16,0624	18,9209	21,4009
59	7,6811	12,6095	16,0935	18,9473	21,4243
60	7,7460	12,6491	16,1245	18,9737	21,4476
61	7,8102	12,6886	16,1555	19,0000	21,4709
62	7,8740	12,7279	16,1864	19,0263	21,4942
63	7,9373	12,7671	16,2173	19,0526	21,5174
64	8,0000	12,8062	16,2481	19,0788	21,5407
65	8,0623	12,8452	16,2788	19,1050	21,5639
66	8,1240	12,8841	16,3095	19,1311	21,5870
67	8,1854	12,9228	16,3401	19,1572	21 6102
68	8,2462	12,9615	16,3707	19,1833	21,6333
69	8,3066	13,0000	16,4012	19,2094	21,6564
70	8,3666	13,0384	16,4317	19,2354	21,6795
71	8,4261	13,0767	16,4621	19,2614	21,7025
72	8,4853	13,1149	16,4924	19,2873	21,7256
73	8,5440	13,1529	16,5227	19,3132	21,7486
74	8,6023	13,1909	16,5529	19,3391	21,7715
75	8,6603	13,2288	16,5831	19,3649	21,7945
76	8,7178	13,2665	16,6132	19,3907	21,8174
77	8,7750	13,3041	16,6433	19,4165	21,8403
78	8,8318	13,3417	16,6733	19,4422	21,8632
79	8,8882	13,3791	16,7033	19,4679	21,8861

Wurzeltafel. 40 -- 79. Quadratwurzeln.

Nr.	500	600	700	800	900
40	23,2379	25,2982	27,2029	28,9828	30,6594
41	23,2594	25,3180	27,2213	29,0000	30,6757
42	23,2809	25,3377	27,2397	29,0172	30,6920
43	23,3024	25,3574	27,2580	29,0345	30,7083
44	23,3238	25,3772	27,2764	29,0517	30,7246
45	23,3452	25,3969	27,2947	29,0689	30,7409
46	23,3666	25,4165	27,3130	29,0861	30,7571
47	23,3880	25,4362	27,3313	29,1033	30,7734
48	23,4094	25,4558	27,3496	29,1204	30,7896
49	23,4307	25,4755	27,3679	29,1376	30,8058
50	23,4521	25,4951	27,3861	29,1548	30,8221
51	23,4734	25,5147	27,4044	29,1719	30,8383
52	23,4947	25,5343	27,4226	29,1890	30,8545
53	23,5160	25,5539	27,4408	29,2062	30,8707
54	23,5372	25,5734	27,4591	29,2233	30,8869
55	23,5584	25,5930	27,4773	29,2404	30,9031
56	23,5797	25,6125	27,4955	29,2575	30,9192
57	23,6008	25,6320	27,5136	29,2746	30,9354
58	23,6220	25,6515	27,5318	29,2916	30,9516
59	23,6432	25,6710	27,5500	29,3087	30,9677
60	23,6643	25,6905	27,5681	29,3258	30,9839
61	23,6854	25,7099	27,5862	29,3428	31,0000
62	23,7065	25,7294	27,6043	29,3598	31,0161
63	23,7276	25,7488	27,6225	29,3769	31,0322
64	23,7487	25,7682	27,6405	29,3939	31,0483
65	23,7697	25,7876	27,6586	29,4109	31,0644
66	23,7908	25,8070	27,6767	29,4279	31,0805
67	23,8118	25,8263	27,6948	29,4449	31,0966
68	23,8328	25,8457	27,7128	29,4618	31,1127
69	23,8537	25,8650	27,7308	29,4788	31,1288
70	23,8747	25,8844	27,7489	29,4958	31,1448
71	23,8956	25,9037	27,7669	29,5127	31,1609
72	23,9165	25,9230	27,7849	29,5296	31,1769
73	23,9374	25,9422	27,8029	29,5466	31,1929
74	23,9583	25,9615	27,8209	29,5635	31,2090
75	23,9792	25,9808	27,8388	29,5804	31,2250
76	24,0000	26,0000	27,8568	29,5973	31,2410
77	24,0208	26,0192	27,8747	29,6142	31,2570
78	24,0416	26,0384	27,8927	29,6311	31,2730
79	24,0624	26,0576	27,9106	29,6479	31,2890

Wurzeltafel. 80 — 100. Quadratwurzeln.

Nr.	0	100	200	300	400
80	8,9443	13,4164	16,7332	19,4936	21,9089
81	9,0000	13,4536	16,7631	19,5192	21,9317
82	9,0554	13,4907	16,7929	19,5448	21,9545
83	9,1104	13,5277	16,8226	19,5704	21,9773
84	9,1652	13,5647	16,8523	19,5959	22,0000
85	9,2195	13,6015	16,8819	19,6214	22,0227
86	9,2736	13,6382	16,9115	19,6469	22,0454
87	9,3274	13,6748	16,9411	19,6723	22,0681
88	9,3808	13,7113	16,9706	19,6977	22,0907
89	9,4340	13,7477	17,0000	19,7231	22,1133
90	9,4868	13,7840	17,0294	19,7484	22,1359
91	9,5394	13,8203	17,0587	19,7737	22,1585
92	9,5917	13,8564	17,0880	19,7990	22,1811
93	9,6437	13,8924	17,1172	19,8242	22,2036
94	9,6954	13,9284	17,1464	19,8494	22,2261
95	9,7468	13,9642	17,1756	19,8746	22,2486
96	9,7980	14,0000	17,2047	19,8997	22,2711
97	9,8489	14,0357	17,2337	19,9249	22,2935
98	9,8995	14,0712	17,2627	19,9499	22,3159
99	9,9499	14,1067	17,2916	19,9750	22,3383
100	10,0000	14,1421	17,3205	20,0000	22,3607

Cubikwurzeln. 0 — 9.

Nr.	0	100	200	300	400
0	0,0000	4,6416	5,8480	6,6943	7,3681
1	1,0000	4,6570	5,8578	6,7018	7,3742
2	1,2599	4,6723	5,8675	6,7092	7,3803
3	1,4422	4,6875	5,8771	6,7166	7,3864
4	1,5874	4,7027	5,8868	6,7240	7,3925
5	1,7100	4,7177	5,8964	6,7313	7,3986
6	1,8171	4,7326	5,9059	6,7387	7,4047
7	1,9129	4,7475	5,9155	6,7460	7,4108
8	2,0000	4,7622	5,9250	6,7533	7,4169
9	2,0801	4,7769	5,9345	6,7606	7,4229

Wurzeltafel. 80 — 100. Quadratwurzeln.

Nr.	500	600	700	800	900
80	24,0832	26,0768	27,9285	29,6648	31,3050
81	24,1039	26,0960	27,9464	29,6816	31,3209
82	24,1247	26,1151	27,9643	29,6985	31,3369
83	24,1454	26,1343	27,9821	29,7153	31,3528
84	24,1661	26,1534	28,0000	29,7321	31,3688
85	24,1868	26,1725	28,0179	29,7489	31,3847
86	24,2074	26,1916	28,0357	29,7658	31,4006
87	24,2281	26,2107	28,0535	29,7825	31,4166
88	24,2487	26,2298	28,0713	29,7993	31,4325
89	24,2693	26,2488	28,0891	29,8161	31,4484
90	24,2899	26,2679	28,1069	29,8329	31,4643
91	24,3105	26,2869	28,1247	29,8496	31,4802
92	24,3311	26,3059	28,1425	29,8664	31,4960
93	24,3516	26,3249	28,1603	29,8831	31,5119
94	24,3721	26,3439	28,1780	29,8998	31,5278
95	24,3926	26,3629	28,1957	29,9166	31,5436
96	24,4131	26,3818	28,2135	29,9333	31,5595
97	24,4336	26,4008	28,2312	29,9500	31;5753
98	24,4540	26,4197	28,2489	29,9666	31,5911
99	24,4745	26,4386	28,2666	29,9833	31,6070
100	24,4949	26,4575	28,2843	30,0000	31,6228

Cubikwurzeln. 0 — 9.

Nr.	500	600	700	800	900
0	7,9370	8,4343	8,8790	9,2832	9,6549
1	7,9423	8,4390	8,8833	9,2870	9,6585
2	7,9476	8,4437	8,8875	9,2909	9,6620
3	7,9528	8,4484	8,8917	9,2948	9,6656
4	7,9581	8,4530	8,8959	9,2986	9,6692
5	7,9634	8,4577	8,9001	9,3025	9,6727
6	7,9686	8,4623	8,9043	9,3063	9,6763
7	7,9739	8,4670	8,9085	9,3102	9,6799
8	7,9791	8,4716	8,9127	9,3140	9,6834
9	7,9843	8,4763	8,9169	9,3179	9,6870

Wurzeltafel. 10 — 49. Cubikwurzeln.

Nr.	0	100	200	300	400
10	2,1544	4,7914	5,9439	6,7679	7,4290
11	2,2240	4,8059	5,9533	6,7752	7,4350
12	2,2894	4,8203	5,9627	6,7824	7,4410
13	2,3513	4,8346	5,9721	6,7897	7,4470
14	2,4101	4,8488	5,9814	6,7969	7,4530
15	2.4662	4,8629	5,9907	6,8041	7,4590
16	2,5198	4,8770	6,0000	6,8113	7,4650
17	2,5713	4,8910	6,0092	6,8185	7,4710
18	2,6207	4,9049	6,0185	6,8256	7,4770
19	2,6684	4,9187	6,0277	6,8328	7,4829
20	2,7144	4,9324	6,0368	6,8399	7,4889
21	2,7589	4,9461	6,0459	6,8470	7,4948
22	2,8020	4,9597	6,0550	6,8541	7,5007
23	2,8439	4,9732	6,0641	6,8612	7,5067
24	2,8845	4,9866	6,0732	6,8683	7,5126
25	2,9240	5,0000	6,0822	6,8753	7,5185
26	2,9625	5,0133	6,0912	6,8824	7,5244
27	3,0000	5,0265	6,1002	6,8894	7,5302
28	3,0366	5,0397	6,1091	6,8964	7,5361
29	3,0723	5,0528	6,1180	6,9034	7,5420
30	3,1072	5,0658	6,1269	6,9104	7,5478
31	3,1414	5,0788	6,1358	6,9174	7,5537
32	3,1748	5,0916	6,1446	6,9244	7,5595
33	3,2075	5,1045	6,1534	6,9313	7,5654
34	3,2396	5,1172	6,1622	6,9382	7,5712
35	3,2711	5,1299	6,1710	6,9451	7,5770
36	3,3019	5,1426	6,1797	6,9521	7,5828
37	3,3322	5,1551	6,1885	6,9589	7,5886
38	3,3620	5,1676	6,1972	6,9658	7,5944
39	3,3912	5,1801	6,2058	6,9727	7,6001
40	3,4200	5,1925	6,2145	6,9795	7,6059
41	3,4482	5,2048	6,2231	6,9864	7,6117
42	3,4760	5,2171	6,2317	6,9932	7,6174
43	3,5034	5,2293	6,2403	7,0000	7,6232
44	3,5303	5,2415	6,2488	7,0068	7,6289
45	3,5569	5,2536	6,2573	7,0136	7,6346
46	3,5830	5,2656	6,2658	7,0203	7,6403
47	3,6088	5,2776	6,2743	7,0271	7,6460
48	3,6342	5,2896	6,2828	7,0338	7,6517
49	3,6593	5,3015	6,2912	7.0406	7,6574

Wurzeltafel. 10 — 49. Cubikwurzeln.

Nr.	500	600	700	800	900
10	7,9896	8,4809	8,9211	9,3217	9,6905
11	7,9948	8,4856	8,9253	9,3255	9,6941
12	8,0000	8,4902	8,9295	9,3294	9,6976
13	8,0052	8,4948	8,9337	9,3332	9,7012
14	8,0104	8,4994	8,9378	9,3370	9,7047
15	8,0156	8,5040	8,9420	9,3408	9,7082
16	8,0208	8 5086	8,9462	9,3447	9,7118
17	8,0260	8,5132	8,9503	9,3485	9,7153
18	8,0311	8,5178	8,9545	9.3523	9,7188
19	8,0363	8,5224	8,9587	9,3561	9,7224
20	8,0415	8,5270	8,9628	9,3599	9,7259
21	8,0466	8,5316	8,9670	9,3637	9,7294
22	8,0517	8,5362	8,9711	9,3675	9,7329
23	8,0569	8,5408	8,9752	9,3713	9,7364
24	8,0620	8,5453	8,9794	9,3751	9,7400
25	8,0671	8,5499	8,9835	9,3789	9,7435
26	8,0723	8,5544	8,9876	9,3827	9,7470
27	8,0774	8,5590	8,9918	9,3865	9,7505
28	8,0825	8,5635	8,9959	9,3902	9,7540
29	8,0876	8,5681	9,0000	9,3940	9,7575
30	8,0927	8,5726	9,0041	9,3978	9,7610
31	8,0978	8,5772	9,0082	9,4016	9,7645
32	8,1028	8,5817	9,0123	9,4053	9,7680
33	8,1079	8,5862	9,0164	9,4091	9,7715
34	8,1130	8,5907	9,0205	9,4129	9,7750
35	8,1180	8,5952	9,0246	9,4166	9,7785
36	8,1231	8,5997	9,0287	9,4204	9,7819
37	8,1281	8,6043	9,0328	9,4241	9,7854
38	8,1332	8,6088	9,0369	9,4279	9,7889
39	8,1382	8,6132	9,0410	9,4316	9,7924
40	8,1433	8,6177	9,0450	9,4354	9,7959
41	8,1483	8,6222	9,0491	9,4391	9,7993
42	8,1533	8,6267	9,0532	9,4429	9,8028
43	8,1583	8,6312	9,0572	9,4466	9,8063
44	8,1633	8,6357	9,0613	9,4503	9,8097
45	8,1683	8,6401	9,0654	9,4541	9,8132
46	8,1733	8,6446	9,0694	9,4578	9,8167
47	8,1783	8,6490	9,0735	9,4615	9,8201
48	8,1833	8,6535	9,0775	9,4652	9,8236
49	8,1882	8,6579	9,0816	9,4690	9,8270

Wurzeltafel. 50 — 89. Cubikwurzeln.

Nr.	0	100	200	300	400
50	3,6840	5,3133	6,2996	7,0473	7,6631
51	3,7084	5,3251	6,3080	7,0540	7,6688
52	3,7325	5,3368	6,3164	7,0607	7,6744
53	3,7563	5,3485	6,3247	7,0674	7,6801
54	3,7798	5,3601	6,3330	7,0740	7,6857
55	3,8030	5,3717	6,3413	7,0807	7,6914
56	3,8259	5,3832	6,3496	7,0873	7,6970
57	3,8485	5,3947	6,3579	7,0940	7,7026
58	3,8709	5,4061	6,3661	7,1006	7,7082
59	3,8930	5,4175	6,3743	7,1072	7,7138
60	3,9149	5,4288	6,3825	7,1138	7,7194
61	3,9365	5.4401	6,3907	7,1204	7,7250
62	3,9579	5,4514	6,3988	7,1269	7,7306
63	3,9791	5,4626	6,4070	7,1335	7,7362
64	4,0000	5,4737	6,4151	7,1400	7,7418
65	4,0207	5,4848	6,4232	7,1466	7,7473
66	4,0412	5,4959	6,4312	7,1531	7,7529
67	4,0615	5,5069	6,4393	7,1596	7,7584
68	4,0817	5,5178	6,4473	7,1661	7,7639
69	4,1016	5,5288	6,4553	7,1726	7,7695
70	4,1213	5,5397	6,4633	7,1791	7,7750
71	4,1408	5,5505	6,4713	7,1855	7,7805
72	4,1602	5,5613	6,4792	7,1920	7,7860
73	4,1793	5,5721	6,4872	7,1984	7,7915
74	4,1983	5,5828	6,4951	7,2048	7,7970
75	4,2172	5,5934	6,5030	7,2112	7,8025
76	4,2358	5,6041	6,5108	7,2177	7,8079
77	4,2543	5,6147	6,5187	7,2240	7,8134
78	4,2727	5,6252	6,5265	7,2304	7,8188
79	4,2908	5,6357	6,5343	7,2368	7,8243
80	4,3089	5,6462	6,5421	7,2432	7,8297
81	4,3267	5,6567	6,5499	7,2495	7,8352
82	4,3445	5,6671	6,5577	7,2558	7,8406
83	4,3621	5,6774	6,5654	7,2622	7,8460
84	4,3795	5,6877	6,5731	7,2685	7,8514
85	4,3968	5,6980	6,5808	7,2748	7,8568
86	4,4140	5,7083	6,5885	7,2811	7,8622
87	4,4310	5,7185	6,5962	7,2874	7,8676
88	4,4480	5,7287	6,6039	7,2936	7,8730
89	4,4647	5,7388	6,6115	7,2999	7,8784

Wurzeltafel. 50 — 89. Cubikwurzeln.

Nr.	500	600	700	800	900
50	8,1932	8,6624	9,0856	9,4727	9,8305
51	8,1982	8,6668	9,0896	9,4764	9,8339
52	8,2031	8,6713	9,0937	9,4801	9,8374
53	8,2081	8,6757	9,0977	9,4838	9,8408
54	8,2130	8,6801	9,1017	9,4875	9,8443
55	8,2180	8,6845	9,1057	9,4912	9,8477
56	8,2229	8,6890	9,1098	9,4949	9,8511
57	8,2278	8,6934	9,1138	9,4986	9,8546
58	8,2327	8,6978	9,1178	9,5023	9,8580
59	8,2377	8,7022	9,1218	9,5060	9,8614
60	8,2426	8,7066	9,1258	9,5097	9,8648
61	8,2475	8,7110	9,1298	9,5134	9,8683
62	8,2524	8,7154	9,1338	9,5171	9,8717
63	8,2573	8,7198	9,1378	9,5207	9,8751
64	8,2621	8,7241	9,1418	9,5244	9,8785
65	8,2670	8,7285	9,1458	9,5281	9,8819
66	8,2719	8,7329	9,1498	9,5317	9,8854
67	8,2768	8,7373	9,1537	9,5354	9,8888
68	8,2816	8,7416	9,1577	9,5391	9,8922
69	8,2865	8,7460	9,1617	9,5427	9,8956
70	8,2913	8,7503	9,1657	9,5464	9,8990
71	8,2962	8,7547	9,1696	9,5501	9,9024
72	8,3010	8,7590	9,1736	9,5537	9,9058
73	8,3059	8,7634	9,1775	9,5574	9,9092
74	8,3107	8,7677	9,1815	9,5610	9,9126
75	8,3155	8,7721	9,1855	9,5647	9,9160
76	8,3203	8,7764	9,1894	9,5683	9,9194
77	8,3251	8,7807	9,1933	9,5719	9,9227
78	8,3300	8,7850	9,1973	9,5756	9,9261
79	8,3348	8,7893	9,2012	9,5792	9,9295
80	8,3396	8,7937	9,2052	9,5828	9,9329
81	8,3443	8,7980	9,2091	9,5865	9,9363
82	8,3491	8,8023	9,2130	9,5901	9,9396
83	8,3539	8,8066	9,2170	9,5937	9,9430
84	8,3587	8,8109	9,2209	9,5973	9,9464
85	8,3634	8,8152	9,2248	9,6010	9,9497
86	8,3682	8,8194	9,2287	9,6046	9.9531
87	8,3730	8,8237	9,2326	9,6082	9,9565
88	8,3777	8,8280	9,2365	9,6118	9,9598
89	8,3825	8,8323	9,2404	9,6154	9,9632

Wurzeltafel. 90 — 100. Cubikwurzeln.

Nr.	0	100	200	300	400
90	4,4814	5,7489	6,6191	7,3061	7,8837
91	4,4979	5,7590	6,6267	7,3124	7,8891
92	4,5144	5,7690	6,6343	7,3186	7,8944
93	4,5307	5,7790	6,6419	7,3248	7,8998
94	4,5468	5,7890	6,6494	7,3310	7,9051
95	4,5629	5,7989	6,6569	7,3372	7,9105
96	4,5789	5,8088	6,6644	7,3434	7,9158
97	4,5947	5,8186	6,6719	7,3496	7,9211
98	4,6104	5,8285	6,6794	7,3558	7,9264
99	4,6261	5,8383	6,6869	7,3619	7,9317
100	4,6416	5,8480	6,6943	7,3681	7,9370

V. Logarithmentafel.

Einrichtung und Gebrauch der Logarithmentafel. Die Logarithmentafel enthält die fünf ersten Decimalziffern (Mantisse) der gemeinen Logarithmen aller ganzen Zahlen von 100 bis 2199. Die Ziffern in der ersten Vertical- und in der ersten Horizontalcolumne entsprechen den Nummern oder Zahlenwerthen, die übrigen Ziffern aber sind die diesen angehörigen Logarithmen oder Kennziffern (Charakteristik) oder Ganze. Hat man die vordersten zwei oder drei Ziffern einer Zahl in der ersten Verticalcolumme und die hinterste derselben in der ersten Horizontalreihe aufgesucht, so findet man den dieser Zahl entsprechenden Logarithmen, indem man den Zifferncomplex aufsucht, der mit den ersten Ziffern in einerlei Horizontal- und mit der letzten Ziffer in einerlei Verticalreihe zugleich steht. Z. B. für die Zahl 365 ist die Mantisse = 56229, weil diese Zahl in der mit 36 anfangenden Horizontal- und in der mit 5 anfangenden Verticalreihe zugleich steht. Ebenso ist die Mantisse oder der die Decimalstellen bildende Theil des Logarithmen von der Zahl 1379, = 13956, weil diese Zahl denjenigen Ort einnimmt, wo die durch (137) gehende Horizontal- und die durch (9) gehende Verticallinie sich begegnen.

Besteht die gegebene Zahl aus weniger als drei Ziffern, so hat man dieselbe durch Anhängen von Nullen in eine dreiziffrige Zahl umzuändern, und nun das Aufsuchen auf die eben gezeigte Weise zu vollziehen. Hiernach hat man also statt 29 die Zahl 290 zu schreiben und findet die Mantisse des Logarithmen von 29 oder von 290, = 46240; ebenso findet man dieselbe für die Zahl 6 oder 60 oder 600, = 77815. Will man diese

Wurzeltafel. 90 — 100. Cubikwurzeln.

Nr.	500	600	700	800	900
90	8,3872	8,8366	9,2443	9,6190	9,9666
91	8,3919	8,8408	9,2482	9,6226	9,9699
92	8,3967	8,8451	9,2521	9,6262	9,9733
93	8,4014	8,8493	9,2560	9,6298	9,9766
94	8,4061	8,8536	9,2599	9,6334	9,9800
95	8,4108	8,8578	9,2638	9,6370	9,9833
96	8,4155	8,8621	9,2677	9,6406	9,9866
97	8,4202	8,8663	9,2716	9,6442	9,9900
98	8,4249	8,8706	9,2754	9,6477	9,9933
99	8,4296	8,8748	9,2793	9,6513	9,9967
100	8,4343	8,8790	9,2832	9,6549	10,0000

kleine Logarithmentafel auch zum Aufsuchen von Zahlen über 2199 gebrauchen, so muß man sich des Interpolirens bedienen, wobei die in der hinteren Verticalcolumne enthaltenen Differenzen in Anwendung zu bringen sind. Hiernach findet man z. B. die Mantisse des Logarithmen von 3452, $= 53782 + 0,2 \times 126 = 53782 + 25 = 53807$, weil 53782 der Zahl 345 entspricht und die Differenz zwischen den Logarithmen dieser Zahl und der nächstfolgenden (346) = 126 ist. Auf gleiche Weise findet man zur Zahl 7915 die logarithmische Mantisse $= 89818 + 0,5 \times 55 = 89818 + 27 = 89845$, weil 89818 der Zahl 791 entspricht und 55 die Differenz zwischen den Logarithmen von 791 und 792 ist.

Zur Auffindung der die Ganzen angebenden Kennziffer dient die Regel: die um Eins verminderte Anzahl der die Ganzen der gegebenen Zahl ausdrückenden Ziffern giebt die Ganzen oder die Charakteristik des entsprechenden Logarithmen. Hiernach ist z. B. die Kennziffer des Logarithmen von 365, $= 3 - 1 = 2$, weil 365, aus drei, lauter Ganze anzeigenden Ziffern besteht; dagegen die Kennziffer des Logarithmen von 36,5, $= 2 - 1 = 1$, weil 36,5 nur zwei Ziffern (3) und (6) enthält, welche Ganze ausdrücken; es ist ferner die Kennziffer zum Logarithmen aus 3,65, $= 1 - 1 = 0$, weil in dieser Zahl nur eine Ziffer (3) vorhanden ist, welche Ganze angiebt; endlich hat man für den Logarithmen aus 3650 die Charakteristik $= 4 - 1 = 3$, weil es hier vier Ziffern giebt, wodurch Ganze ausgedrückt werden. Solchemnach ist:

$$\begin{aligned} \log.\ 3650 &= 3,56229, \\ \log.\ 365 &= 2,56229, \\ \log.\ 36,5 &= 1,56229, \\ \log.\ 3,65 &= 0,56229, \end{aligned}$$

Hat der Zahlenwerth keine Ganzen, fängt also derselbe mit Nullen an, so hat man am Ende der Mantisse eine **negative Charakteristik** hinzuzufügen, die aus soviel Einheiten besteht, als der Zahl selbst Nullen voranstehen. So ist z. B. für die Zahl 0,1379 die logarithmische Charakteristik = — 1 und für 0,01379 dieselbe = — 2 u. s. w., weil jene Zahl (0,1379) mit einer, diese Zahl (0,01379) aber mit zwei Nullen anfängt. Man hat solchemnach:

$$\log. 0{,}1379 = 0{,}13956 - 1,$$
$$\log. 0{,}01379 = 0{,}13956 - 2,$$
$$\log. 0{,}001379 = 0{,}13956 - 3 \text{ u. s. w.}$$

Um zu einem gegebenen Logarithmen den Numerus zu finden, hat man die vollständige Mantisse mit Berücksichtigung der etwa vorstehenden Nullen in der Tabelle aufzusuchen und von der so gefundenen Stelle aus horizontal herüber und vertical aufwärts zu gehen; die sich an den Enden dieser Bewegungen vorfindenden Ziffern geben, neben einander gesetzt, die entsprechende Zahl, wenn man noch so viel Ziffern als Ganze abschneidet, als die um Eins vermehrte Charakteristik Einheiten hat, oder nach Befinden so viel Nullen vorsetzt, als die etwa vorkommende negative Kennziffer Einheiten enthält.

Hiernach ist z. B. der Numerus für den Logarithmen 2,93146, = 854, denn von der Mantisse 93146 aus links und aufwärts gegangen, stößt man auf die Ziffern 85 und 4, und die um Eins vermehrte Charakteristik (2) zeigt an, daß die Ganzen des Numerus aus (2 + 1) = 3 Ziffern bestehen soll. Dagegen ist der Numerus des Logarithmen 0,78319, = 6,07, denn die Mantisse 78319 steht in der mit 60 anfangenden Horizontal- und in der mit 7 anfangenden Verticalreihe, und es ist als Ganze nur eine Ziffer (6) abzuschneiden, weil, wenn man zur Charakteristik (Null) Eins hinzufügt, wieder Eins daraus hervorgeht. Für den Logarithmen 0,61805 — 2 ist endlich der Numerus = 0,0415, denn 41 und 5 stehen mit 61805 in einerlei Horizontal- und Verticallinie und die beiden Nullen (0,0) entsprechen der negativen Kennziffer (— 2).

Auf gleiche Weise findet man:

$$num.\ log.\ 3{,}67852 = 4770$$
$$\text{» » } 1{,}67852 = 47{,}7$$
$$\text{» » } 0{,}67852 - 1 = 0{,}477.$$
$$\text{» » } 0{,}67852 - 3 = 0{,}00477.$$

Findet man die Mantisse des gegebenen Logarithmen nicht genau in der Tabelle, so hat man den Numerus der nächst kleineren Mantisse aufzusuchen, und, wenn eine größere Genauigkeit verlangt wird, den fehlenden Theil durch Interpolation zu finden. Z. B. für den Logarithmen 1,79407 ist annähernd der Numerus = 62,2, denn dieser entspricht dem nächst kleinern Logarithmen 1,79379. Nun ist aber die Differenz der zwei Mantissen 79407 und 79379, = 28, und die Differenz der zu-

nächst aufeinander folgenden Mantissen in der Tafel $= 79449 - 79379 = 70$; es folgt daher die nöthige Correction $= \frac{28}{70} = 0,4$, also die gesuchte Zahl $= 62,24$.

Auf gleiche Weise folgt:

$$num. log. 0,65118 = 4,47 + \frac{118 - 31}{9700} = 4,47 + \frac{87}{9700}$$

$= 4,479$, denn 87 ist die Differenz zwischen den Mantissen des gegebenen und des nächst kleinern Logarithmen, und 97 ist die zwischen der nächst größern und nächst kleinern Mantisse.

Ebenso $num. log. 0,46951 - 2 = 0,0294 + \frac{951 - 835}{1470000}$ $= 0,0294 + \frac{0,0116}{147} = 0,02948$.

Ist die Mantisse des gegebenen Logarithmen kleiner als 34223, so kann man die Interpolation vereinfachen oder gar unnöthig machen, wenn man sich der zweiten Hälfte der Tafel bedient, indem man die gegebene Mantisse in dieser aufsucht. So giebt dieselbe für den Logarithmen 3,26174 den vierzifferigen Numerus 1827 unmittelbar; auch erhält man den Numerus des Logarithmen 0,21152, $= 1,627$ mit der Correction $\frac{52 - 39}{26} = \frac{13}{26}$ $= 0,5$, also $num. log. 0,21152 = 1,6275$.

Anwendung der Logarithmen auf das Rechnen.

1) Das Product zweier Zahlen wird erhalten, wenn man die Logarithmen der Zahlen addirt und zur Summe den Numerus aufsucht. Z. B. für $34,5 \times 12,79$ hat man

$$\begin{aligned} log. 34,5 &= 1,53782 \\ log. 12,79 &= 1,10687 \\ log. (34,5 \times 12,79) &= 2,64469; \text{ daher} \end{aligned}$$

$$34,5 \times 12,79 = num. log. 2,64469 = 441,26.$$

Für $609 \times 27,5 \times 0,01865$ ist:

$$\begin{aligned} log. 609 &= 2,78462 \\ log. 27,5 &= 1,43933 \\ log. 0,01865 &= 0,27068 - 2 \\ log. (609 \times 27,5 \times 0,01865) &= 2,49463, \end{aligned}$$

$$609 \times 27,5 \times 0,01865 = num. log. 2,49463 = 312,34.$$

2) Der Quotient zweier Zahlen ergiebt sich, wenn man den Logarithmen des Divisors von dem Logarithmen des Dividenden abzieht und zu dem erhaltenen Reste die Zahl aufsucht.

Z. B. für $\frac{1054}{8,06}$ ist

$$\begin{aligned} log. 1054 &= 3,02284 \\ log. 8,06 &= 0,90634 \\ log. \left(\frac{1054}{8,06}\right) &= 2,11650, \end{aligned}$$

daher $\frac{1054}{8,06} = num.\ log.\ 2,11650 = 130,77.$

Für $\frac{0,693}{45,2 \times 0,910}$ hat man:

$$\begin{aligned} log.\ 45,2 &= 1,65514 \\ log.\ 0,910 &= \underline{0,95904 - 1} \\ &\ 1,61418 \\ log.\ 0,693 &= \underline{0,84073 - 1} \\ log.\left(\frac{0,693}{45,2 \times 0,91}\right) &= 0,22655 - 2, \end{aligned}$$

daher $\frac{0,693}{45,2 \times 0,91} = 0,01685.$

3) Eine Zahl wird zur Potenz erhoben, wenn man den Logarithmen derselben durch den Exponenten multiplicirt und zu dem Producte den Numerus sucht.

Z. B. für $(0,4061)^3$ hat man

$$\begin{aligned} log.\ 0,4061 &= \underline{0,60863 - 1} \times 3 \\ log.\ (0,4061)^3 &= 0,82589 - 2 \end{aligned}$$

daher $(0,4061)^3 = 0,06697.$

Logarithmentafel. 100 — 299.

Nr.	0	1	2	3	4	5
10	00000	00432	00860	01284	01703	02119
11	04139	04532	04922	05308	05690	06070
12	07918	08279	08636	08991	09342	09691
13	11394	11727	12057	12385	12710	13033
14	14613	14922	15229	15534	15836	16137
15	17609	17898	18184	18469	18752	19033
16	20412	20683	20952	21219	21484	21748
17	23045	23300	23553	23805	24055	24304
18	25527	25768	26007	26245	26482	26717
19	27875	28103	28330	28556	28780	29003
20	30103	30320	30535	30750	30963	31175
21	32222	32428	32634	32838	33041	33244
22	34242	34439	34635	34830	35025	35218
23	36173	36361	36549	36736	36922	37107
24	38021	38202	38382	38561	38739	38917
25	39794	39967	40140	40312	40483	40654
26	41497	41664	41830	41996	42160	42325
27	43136	43297	43457	43616	43775	43933
28	44716	44871	45025	45179	45332	45484
29	46240	46389	46538	46687	46835	46982

4) Man findet die Wurzel einer gegebenen Zahl, wenn man den Logarithmen derselben durch den Exponenten dividirt und zu dem Quotienten den Numerus nachschlägt.

Z. B. für $\sqrt{2{,}69}$ ist

$$\begin{aligned} \log. 2{,}69 &= 0{,}42975 \\ \log. \sqrt{2{,}69} &= 0{,}21488 \quad :2 \\ \sqrt{2{,}69} &= 1{,}6401 \text{ oder annähernd } 1{,}64. \end{aligned}$$

Ferner für $\sqrt[3]{(0{,}643)^2}$

$$\begin{aligned} \log. 0{,}643 &= 0{,}80821 - 1 \quad \times 2 \\ & 1{,}61642 - 2 \\ \text{oder } & 2{,}61642 - 3 \quad :3 \\ \log. \sqrt[3]{(0{,}643)^2} &= 0{,}87214 - 1 \\ \text{daher } \sqrt[3]{(0{,}643)^2} &= 0{,}745. \end{aligned}$$

Logarithmentafel. 100 — 299.

Nr.	6	7	8	9	Differenzen.
10	02531	02938	03342	03743	432 ÷ 396
11	06446	06819	07188	07555	393 ÷ 363
12	10037	10380	10721	11059	361 ÷ 335
13	13354	13672	13988	14301	333 ÷ 312
14	16435	16732	17026	17319	309 ÷ 290
15	19312	19590	19866	20140	289 ÷ 272
16	22011	22272	22531	22789	271 ÷ 256
17	24551	24797	25042	25285	255 ÷ 242
18	26951	27184	27416	27646	241 ÷ 229
19	29226	29447	29667	29885	228 ÷ 218
20	31387	31597	31806	32015	217 ÷ 207
21	33445	33646	33846	34044	206 ÷ 198
22	35411	35603	35793	35984	197 ÷ 189
23	37291	37475	37658	37840	188 ÷ 181
24	39094	39270	39445	39620	181 ÷ 174
25	40824	40993	41162	41330	173 ÷ 167
26	42488	42651	42813	42975	167 ÷ 161
27	44091	44248	44404	44560	161 ÷ 156
28	45637	45788	45939	46090	155 ÷ 150
29	47129	47276	47422	47567	149 ÷ 145

Logarithmentafel. 300 — 699.

Nr.	0	1	2	3	4	5
30	47712	47857	48001	48144	48287	48430
31	49136	49276	49415	49554	49693	49831
32	50515	50651	50786	50920	51055	51188
33	51851	51983	52114	52244	52375	52504
34	53148	53275	53403	53529	53656	53782
35	54407	54531	54654	54777	54900	55023
36	55630	55751	55871	55991	56110	56229
37	56820	56937	57054	57171	57287	57403
38	57978	58092	58206	58320	58433	58546
39	59106	59218	59329	59439	59550	59660
40	60206	60314	60423	60531	60638	60746
41	61278	61384	61490	61595	61700	61805
42	62325	62428	62531	62634	62737	62839
43	63347	63448	63548	63649	63749	63849
44	64345	64444	64542	64640	64738	64836
45	65321	65418	65514	65610	65706	65801
46	66276	66370	66464	66558	66652	66745
47	67210	67302	67394	67486	67578	67669
48	68124	68215	68305	68395	68485	68574
49	69020	69108	69197	69285	69373	69461
50	69897	69984	70070	70157	70243	70329
51	70757	70842	70927	71012	71096	71181
52	71600	71684	71767	71850	71933	72016
53	72428	72509	72591	72673	72754	72835
54	73239	73320	73400	73480	73560	73640
55	74036	74115	74194	74273	74351	74429
56	74819	74896	74974	75051	75128	75205
57	75587	75664	75740	75815	75891	75967
58	76343	76418	76492	76567	76641	76716
59	77085	77159	77232	77305	77379	77452
60	77815	77887	77960	78032	78104	78176
61	78533	78604	78675	78746	78817	78888
62	79239	79309	79379	79449	79518	79588
63	79934	80003	80072	80140	80209	80277
64	80618	80686	80754	80821	80889	80956
65	81291	81358	81425	81491	81558	81624
66	81954	82020	82086	82151	82217	82282
67	82607	82672	82737	82802	82866	82930
68	83251	83315	83378	83442	83506	83569
69	83885	83948	84011	84073	84136	84198

Logarithmentafel. 300 — 699.

Nr.	6	7	8	9	Differenzen.
30	48572	48714	48855	48996	145 ÷ 140
31	49969	50106	50243	50379	140 ÷ 136
32	51322	51455	51587	51720	136 ÷ 132
33	52634	52763	52892	53020	132 ÷ 128
34	53908	54033	54158	54283	127 ÷ 124
35	55145	55267	55388	55509	124 ÷ 121
36	56348	56467	56585	56703	121 ÷ 117
37	57519	57634	57749	57864	117 ÷ 114
38	58659	58771	58883	58995	115 ÷ 111
39	59770	59879	59988	60097	112 ÷ 109
40	60853	60959	61066	61172	108 ÷ 106
41	61909	62014	62118	62221	106 ÷ 104
42	62941	63043	63144	63246	103 ÷ 101
43	63949	64048	64147	64246	101 ÷ 99
44	64933	65031	65128	65225	99 ÷ 97
45	65896	65992	66087	66181	97 ÷ 95
46	66839	66932	67025	67117	94 ÷ 93
47	67761	67852	67943	68034	92 ÷ 90
48	68664	68753	68842	68931	90 ÷ 89
49	69548	69636	69723	69810	88 ÷ 87
50	70415	70501	70586	70672	87 ÷ 86
51	71265	71349	71433	71517	85 ÷ 84
52	72099	72181	72263	72346	83
53	72916	72997	73078	73159	81
54	73719	73799	73878	73957	80
55	74507	74586	74663	74741	78
56	75282	75358	75435	75511	77
57	76042	76118	76193	76268	76
58	76790	76864	76938	77012	74
59	77525	77597	77670	77743	73
60	78247	78319	78390	78462	72
61	78958	79029	79099	79169	71
62	79657	79727	79796	79865	69
63	80346	80414	80482	80550	68
64	81023	81090	81158	81224	67
65	81690	81757	81823	81889	66
66	82347	82413	82478	82543	65
67	82995	83059	83123	83187	64
68	83632	83696	83759	83822	63
69	84261	84323	84386	84448	63

Logarithmentafel. 700 — 1099.

Nr.	0	1	2	3	4	5
70	84510	84572	84634	84696	84757	84819
71	85126	85187	85248	85309	85370	85431
72	85733	85794	85854	85914	85974	86034
73	86332	86392	86451	86510	86570	86629
74	86923	86982	87040	87099	87157	87216
75	87506	87564	87622	87679	87737	87795
76	88081	88138	88195	88252	88309	88366
77	88649	88705	88762	88818	88874	88930
78	89209	89265	89321	89376	89432	89487
79	89763	89818	89873	89927	89982	90037
80	90309	90363	90417	90472	90526	90580
81	90849	90902	90956	91009	91062	91116
82	91381	91434	91487	91540	91593	91645
83	91908	91960	92012	92065	92117	92169
84	92428	92480	92531	92583	92634	92686
85	92942	92993	93044	93095	93146	93197
86	93450	93500	93551	93601	93651	93702
87	93952	94002	94052	94101	94151	94201
88	94448	94498	94547	94596	94645	94694
89	94939	94988	95036	95085	95134	95182
90	95424	95472	95521	95569	95617	95665
91	95904	95952	95999	96047	96095	96142
92	96379	96426	96473	96520	96567	96614
93	96848	96895	96942	96988	97035	97081
94	97313	97359	97405	97451	97497	97543
95	97772	97818	97864	97909	97955	98000
96	98227	98272	98318	98363	98408	98453
97	98677	98722	98767	98811	98856	98900
98	99123	99167	99211	99255	99300	99344
99	99564	99607	99651	99695	99739	99782
100	00000	00043	00087	00130	00173	00217
101	00432	00475	00518	00561	00604	00647
102	00860	00903	00945	00988	01030	01072
103	01284	01326	01368	01410	01452	01494
104	01703	01745	01787	01828	01870	01912
105	02119	02160	02202	02243	02284	02325
106	02531	02572	02612	02653	02694	02735
107	02938	02979	03019	03060	03100	03141
108	03342	03383	03423	03463	03503	03543
109	03743	03782	03822	03862	03902	03941

Logarithmentafel. 700 — 1099.

Nr.	6	7	8	9	Differenzen.
70	84880	84942	85003	85065	62
71	85491	85552	85612	85673	61
72	86094	86153	86213	86273	60
73	86688	86747	86806	86864	59
74	87274	87332	87390	87448	58
75	87852	87910	87967	88024	58
76	88423	88480	88536	88593	57
77	88986	89042	89098	89154	56
78	89542	89597	89653	89708	55
79	90091	90146	90200	90255	55
80	90634	90687	90741	90795	54
81	91169	91222	91275	91328	53
82	91698	91751	91803	91855	53
83	92221	92273	92324	92376	52
84	92737	92788	92840	92891	51
85	93247	93298	93349	93399	51
86	93752	93802	93852	93902	50
87	94250	94300	94349	94399	50
88	94743	94792	94841	94890	49
89	95231	95279	95328	95376	49
90	95713	95761	95809	95856	48
91	96190	96237	96284	96332	47
92	96661	96708	96755	96802	47
93	97128	97174	97220	97267	46
94	97589	97635	97681	97727	46
95	98046	98091	98137	98182	45
96	98498	98543	98588	98632	45
97	98945	98989	99034	99078	45
98	99388	99432	99476	99520	44
99	99826	99870	99913	99957	44
100	00260	00303	00346	00389	43
101	00689	00732	00775	00817	43
102	01115	01157	01199	01242	42
103	01536	01578	01620	01662	42
104	01953	01995	02036	02078	42
105	02366	02408	02449	02490	41
106	02776	02816	02857	02898	41
107	03181	03222	03262	03302	41
108	03583	03623	03663	03703	40
109	03981	04021	04060	04100	40

Logarithmentafel. 1100 — 1499.

Nr.	0	1	2	3	4	5
110	04139	04179	04218	04258	04297	04336
111	04532	04571	04610	04650	04689	04727
112	04922	04961	04999	05038	05077	05115
113	05308	05346	05385	05423	05461	05500
114	05690	05729	05767	05805	05843	05881
115	06070	06108	06145	06183	06221	06258
116	06446	06483	06521	06558	06595	06633
117	06819	06856	06893	06930	06967	07004
118	07188	07225	07262	07298	07335	07372
119	07555	07591	07628	07664	07700	07737
120	07918	07954	07990	08027	08063	08099
121	08279	08314	08350	08386	08422	08458
122	08636	08672	08707	08743	08778	08814
123	08991	09026	09061	09096	09132	09167
124	09342	09377	09412	09447	09482	09517
125	09691	09726	09760	09795	09830	09864
126	10037	10072	10106	10140	10175	10209
127	10380	10415	10449	10483	10517	10551
128	10721	10755	10789	10823	10857	10890
129	11059	11093	11126	11160	11193	11227
130	11394	11428	11461	11494	11528	11561
131	11727	11760	11793	11826	11860	11893
132	12057	12090	12123	12156	12189	12222
133	12385	12418	12450	12483	12516	12548
134	12710	12743	12775	12808	12840	12872
135	13033	13066	13098	13130	13162	13194
136	13354	13386	13418	13450	13481	13513
137	13672	13704	13735	13767	13799	13830
138	13988	14019	14051	14082	14114	14145
139	14301	14333	14364	14395	14426	14457
140	14613	14644	14675	14706	14737	14768
141	14922	14953	14983	15014	15045	15076
142	15229	15259	15290	15320	15351	15381
143	15534	15564	15594	15625	15655	15685
144	15836	15866	15897	15927	15957	15987
145	16137	16167	16197	16227	16256	16286
146	16435	16465	16495	16524	16554	16584
147	16732	16761	16791	16820	16850	16879
148	17026	17056	17085	17114	17143	17173
149	17319	17348	17377	17406	17435	17464

Logarithmentafel. 1100 bis 1499.

Nr.	6	7	8	9	Differenzen.
110	04376	04415	04454	04493	39
111	04766	04805	04844	04883	39
112	05154	05192	05231	05269	39
113	05538	05576	05614	05652	38
114	05918	05956	05994	06032	38
115	06296	06333	06371	06408	38
116	06670	06707	06744	06781	37
117	07041	07078	07115	07151	37
118	07408	07445	07482	07518	37
119	07773	07809	07846	07882	36
120	08135	08171	08207	08243	36
121	08493	08529	08565	08600	36
122	08849	08884	08920	08955	36
123	09202	09237	09272	09307	35
124	09552	09587	09621	09656	35
125	09899	09934	09968	10003	35
126	10243	10278	10312	10346	34
127	10585	10619	10653	10687	34
128	10924	10958	10992	11025	34
129	11261	11294	11327	11361	33
130	11594	11628	11661	11694	33
131	11926	11959	11992	12024	33
132	12254	12287	12320	12352	32
133	12581	12613	12646	12678	32
134	12905	12937	12969	13001	32
135	13226	13258	13290	13322	32
136	13545	13577	13609	13640	32
137	13862	13893	13925	13956	32
138	14176	14208	14239	14270	31
139	14489	14520	14551	14582	31
140	14799	14829	14860	14891	31
141	15106	15137	15168	15198	31
142	15412	15442	15473	15503	31
143	15715	15746	15776	15806	30
144	16017	16047	16077	16107	30
145	16316	16346	16376	16406	30
146	16613	16643	16673	16702	30
147	16909	16938	16967	16997	29
148	17202	17231	17260	17289	29
149	17493	17522	17551	17580	29

Logarithmentafel. 1500 bis 1899.

Nr.	0	1	2	3	4	5
150	17609	17638	17667	17696	17725	17754
151	17898	17926	17955	17984	18013	18041
152	18184	18213	18241	18270	18298	18327
153	18469	18498	18526	18554	18583	18611
154	18752	18780	18808	18837	18865	18893
155	19033	19061	19089	19117	19145	19173
156	19312	19340	19368	19396	19424	19451
157	19590	19618	19645	19673	19700	19728
158	19866	19893	19921	19948	19976	20003
159	20140	20167	20194	20222	20249	20276
160	20412	20439	20466	20493	20520	20548
161	20683	20710	20737	20763	20790	20817
162	20952	20978	21005	21032	21059	21085
163	21219	21245	21272	21299	21325	21352
164	21484	21511	21537	21564	21590	21617
165	21748	21775	21801	21827	21854	21880
166	22011	22037	22063	22089	22115	22141
167	22272	22298	22324	22350	22376	22401
168	22531	22557	22583	22608	22634	22660
169	22789	22814	22840	22866	22891	22917
170	23045	23070	23096	23121	23147	23172
171	23300	23325	23350	23376	23401	23426
172	23553	23578	23603	23629	23654	23679
173	23805	23830	23855	23880	23905	23930
174	24055	24080	24105	24130	24155	24180
175	24304	24329	24353	24378	24403	24428
176	24551	24576	24601	24625	24650	24674
177	24797	24822	24846	24871	24895	24920
178	25042	25066	25091	25115	25139	25164
179	25285	25310	25334	25358	25382	25406
180	25527	25551	25575	25600	25624	25648
181	25768	25792	25816	25840	25864	25888
182	26007	26031	26055	26079	26102	26126
183	26245	26269	26293	26316	26340	26364
184	26482	26505	26529	26553	26576	26600
185	26717	26741	26764	26788	26811	26834
186	26951	26975	26998	27021	27045	27068
187	27184	27207	27231	27254	27277	27300
188	27416	27439	27462	27485	27508	27531
189	27646	27669	27692	27715	27738	27761

Logarithmentafel. 1500 bis 1899.

Nr.	6	7	8	9	Differenzen.
150	17782	17811	17840	17869	29
151	18070	18099	18127	18156	29
152	18355	18384	18412	18441	28
153	18639	18667	18696	18724	28
154	18921	18949	18977	19005	28
155	19201	19229	19257	19285	28
156	19479	19507	19535	19562	28
157	19756	19783	19811	19838	28
158	20030	20058	20085	20112	27
159	20303	20330	20358	20385	27
160	20575	20602	20629	20656	27
161	20844	20871	20898	20925	27
162	21112	21139	21165	21192	27
163	21378	21405	21431	21458	27
164	21643	21669	21696	21722	26
165	21906	21932	21958	21985	26
166	22167	22194	22220	22246	26
167	22427	22453	22479	22505	26
168	22686	22712	22737	22763	26
169	22943	22968	22994	23019	26
170	23198	23223	23249	23274	25
171	23452	23477	23502	23528	25
172	23704	23729	23754	23779	25
173	23955	23980	24005	24030	25
174	24204	24229	24254	24279	25
175	24452	24477	24502	24527	25
176	24699	24724	24748	24773	25
177	24944	24969	24993	25018	24
178	25188	25212	25237	25261	24
179	25431	25455	25479	25503	24
180	25672	25696	25720	25744	24
181	25912	25935	25959	25983	24
182	26150	26174	26198	26221	24
183	26387	26411	26435	26458	24
184	26623	26647	26670	26694	24
185	26858	26881	26905	26928	23
186	27091	27114	27138	27161	23
187	27323	27346	27370	27393	23
188	27554	27577	27600	27623	23
189	27784	27807	27830	27852	23

Logarithmentafel. 1900 bis 2199.

Nr.	0	1	2	3	4	5
190	27875	27898	27921	27944	27967	27989
191	28103	28126	28149	28171	28194	28217
192	28330	28353	28375	28398	28421	28443
193	28556	28578	28601	28623	28646	28668
194	28780	28803	28825	28847	28870	28892
195	29003	29026	29048	29070	29092	29115
196	29226	29248	29270	29292	29314	29336
197	29447	29469	29491	29513	29535	29557
198	29667	29688	29710	29732	29754	29776
199	29885	29907	29929	29951	29973	29994
200	30103	30125	30146	30168	30190	30211
201	30320	30341	30363	30384	30406	30428
202	30535	30557	30578	30600	30621	30643
203	30750	30771	30792	30814	30835	30856
204	30963	30984	31006	31027	31048	31069
205	31175	31197	31218	31239	31260	31281
206	31387	31408	31429	31450	31471	31492
207	31597	31618	31639	31660	31681	31702
208	31806	31827	31848	31869	31890	31911
209	32015	32035	32056	32077	32098	32118
210	32222	32243	32263	32284	32305	32325
211	32428	32449	32469	32490	32510	32531
212	32634	32654	32675	32695	32715	32736
213	32838	32858	32879	32899	32919	32940
214	33041	33062	33082	33102	33122	33143
215	33244	33264	33284	33304	33325	33345
216	33445	33465	33486	33506	33526	33546
217	33646	33666	33686	33706	33726	33746
218	33846	33866	33885	33905	33925	33945
219	34044	34064	34084	34104	34124	34143

VI. Tafel der natürlichen Logarithmen.

Einrichtung und Gebrauch der nachstehenden Tafel. Außer den gemeinen oder briggischen, sich auf die Grundzahl 10 beziehenden Logarithmen, braucht man zuweilen noch die natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen, deren Grundzahl 2,7182818 ... ist. Nachstehende Tafel enthält die Werthe derselben für die natürliche Zahlenreihe 1, 2, 3 ... bis 299. Die Einrichtung dieser Tafel weicht von der Einrichtung der die gemeinen Logarithmen enthaltenden Logarithmentafel nicht ab. Hat man die letzte Ziffer der gegebenen Zahl in der obersten Horizontalreihe und die vorhergehende

Logarithmentafel. 1900 bis 2199.

Nr.	6	7	8	9	Differenzen.
190	28012	28035	28058	28081	23
191	28240	28262	28285	28307	23
192	28466	28488	28511	28533	23
193	28691	28713	28735	28758	22
194	28914	28937	28959	28981	22
195	29137	29159	29181	29203	22
196	29358	29380	29403	29425	22
197	29579	29601	29623	29645	22
198	29798	29820	29842	29863	22
199	30016	30038	30060	30081	22
200	30233	30255	30276	30298	22
201	30449	30471	30492	30514	22
202	30664	30685	30707	30728	22
203	30878	30899	30920	30942	22
204	31091	31112	31133	31154	21
205	31302	31323	31345	31366	21
206	31513	31534	31555	31576	21
207	31723	31744	31765	31785	21
208	31931	31952	31973	31994	21
209	32139	32160	32181	32201	21
210	32346	32366	32387	32408	21
211	32552	32572	32593	32613	21
212	32756	32777	32797	32818	21
213	32960	32980	33001	33021	20
214	33163	33183	33203	33224	20
215	33365	33385	33405	33425	20
216	33566	33586	33606	33626	20
217	33766	33786	33806	33826	20
218	33965	33985	34005	34025	20
219	34163	34183	34203	34223	20

Ziffer oder das vorhergehende Zifferpaar in der vorderen Verticalreihe aufgesucht, so findet man den entsprechenden natürlichen Logarithmen, wenn man von jener Ziffer ab- und von dieser Ziffer oder diesem Zifferpaare bis zur Begegnung herübergeht. Z. B. *log. nat.* 73 ist = 4,2905, weil diese Zahl vertical unter der letzten Ziffer (3) und mit der ersten Ziffer (7) in einerlei Horizontalreihe liegt. Ebenso ist *log. nat.* 157 = 5,0562, denn diese Zahl steht in der mit 7 überschriebenen Vertical- und in der mit 15 anfangenden Horizontalreihe.

Mit Hülfe dieser Tabelle lassen sich leicht andere Logarithmen finden, welche in der Tabelle selbst nicht stehen, wenn man die einfachsten Regeln der Logarithmik (s. §. 10) zur Anwendung

Tafel der natürlichen Logarithmen. 1 bis 299.

Nr.	0	1	2	3	4
0	— ∞	0,0000	0,6931	1,0986	1,3863
1	2,3026	2,3979	2,4849	2,5649	2,6391
2	2,9957	3,0445	3,0910	3,1355	3,1781
3	3,4012	3,4340	3,4657	3,4965	3,5264
4	3,6889	3,7136	3,7377	3,7612	3,7842
5	3,9120	3,9318	3,9512	3,9703	3,9890
6	4,0943	4,1109	4,1271	4,1431	4,1589
7	4,2485	4,2627	4,2767	4,2905	4,3041
8	4,3820	4,3944	4,4067	4,4188	4,4308
9	4,4998	4,5109	4,5218	4,5326	4,5433
10	4,6052	4,6151	4,6250	4,6347	4,6444
11	4,7005	4,7095	4,7185	4,7274	4,7362
12	4,7875	4,7958	4,8040	4,8122	4,8203
13	4,8675	4,8752	4,8828	4,8903	4,8978
14	4,9416	4,9488	4,9558	4,9628	4,9698
15	5,0106	5,0173	5,0239	5,0304	5,0370
16	5,0752	5,0814	5,0876	5,0938	5,0999
17	5,1358	5,1417	5,1475	5,1533	5,1591
18	5,1930	5,1985	5,2040	5,2095	5,2149
19	5,2470	5,2523	5,2575	5,2627	5,2679
20	5,2983	5,3033	5,3083	5,3132	5,3181
21	5,3471	5,3519	5,3566	5,3613	5,3660
22	5,3936	5,3982	5,4027	5,4072	5,4116
23	5,4381	5,4424	5,4467	5,4510	5,4553
24	5,4806	5,4848	5,4889	5,4931	5,4972
25	5,5215	5,5255	5,5294	5,5334	5,5373
26	5,5607	5,5645	5,5683	5,5722	5,5759
27	5,5984	5,6021	5,6058	5,6095	5,6131
28	5,6348	5,6384	5,6419	5,6454	5,6490
29	5,6699	5,6733	5,6768	5,6802	5,6836

bringt. Z. B. $log.\,nat.\ 1{,}84 = log.\,nat.\left(\frac{184}{100}\right) = log.\,nat.\ 184 - log.\,nat.\ 100 = 5{,}2149 - 4{,}6052 = 0{,}6097$. Ebenso

$$log.\,nat.\,\frac{67}{136} = log.\,nat.\ 67 - log.\,nat.\ 136$$
$$= 4{,}2047 - 4{,}9127 = -0{,}7080.$$

Geht die Zahl über 299 hinaus, so muß man das Interpolationsverfahren einschlagen, um den entsprechenden Logarithmen zu finden. Z. B. $log.\,nat.\ 124{,}7$
$= log.\,nat.\ 124 + 0{,}7 \times (log.\,nat.\ 125 - log.\,nat.\ 124)$
$= 4{,}8203 + 0{,}7 \times (4{,}8283 - 4{,}8203) = 4{,}8203 + 0{,}7 \times 0{,}0080$
$= 4{,}8203 + 0{,}0056 = 4{,}8259.$

Tafel der natürlichen Logarithmen. 1 bis 299.

Nr.	5	6	7	8	9
0	1,6094	1,7918	1,9459	2,0794	2,1972
1	2,7081	2,7726	2,8332	2,8904	2,9444
2	3,2189	3,2581	3,2958	3,3322	3,3673
3	3,5553	3,5835	3,6109	3,6376	3,6636
4	3,8067	3,8286	3,8501	3,8712	3,8918
5	4,0073	4,0254	4,0431	4,0604	4,0775
6	4,1744	4,1897	4,2047	4,2195	4,2341
7	4,3175	4,3307	4,3438	4,3567	4,3694
8	4,4427	4,4543	4,4659	4,4773	4,4886
9	4,5539	4,5643	4,5747	4,5850	4,5951
10	4,6540	4,6634	4,6728	4,6821	4,6913
11	4,7449	4,7536	4,7622	4,7707	4,7791
12	4,8283	4,8363	4,8442	4,8520	4,8598
13	4,9053	4,9127	4,9200	4,9273	4,9345
14	4,9767	4,9836	4,9904	4,9972	5,0039
15	5,0434	5,0499	5,0562	5,0626	5,0689
16	5,1059	5,1120	5,1180	5,1240	5,1299
17	5,1648	5,1705	5,1761	5,1818	5,1874
18	5,2204	5,2257	5,2311	5,2364	5,2417
19	5,2730	5,2781	5,2832	5,2883	5,2933
20	5,3230	5,3279	5,3327	5,3375	5,3423
21	5,3706	5,3753	5,3799	5,3845	5,3891
22	5,4161	5,4205	5,4250	5,4293	5,4337
23	5,4596	5,4638	5,4681	5,4723	5,4765
24	5,5013	5,5053	5,5094	5,5134	5,5175
25	5,5413	5,5452	5,5491	5,5530	5,5568
26	5,5797	5,5835	5,5872	5,5910	5,5947
27	5,6168	5,6204	5,6240	5,6276	5,6312
28	5,6525	5,6560	5,6595	5,6630	5,6664
29	5,6870	5,6904	5,6937	5,6971	5,7004

Durch Zerlegung in Factoren kann man zuweilen die Interpolation entbehrlich machen. Z. B. *log. nat.* 1247 $= $ *log. nat.* $(29 \times 43) =$ *log. nat.* 29 $+$ *log. nat.* 43 $= 3,3673 + 3,7612 = 7,1285$; daher *log. nat.* 124,7

$$= \textit{log. nat.} \left(\frac{1247}{10}\right) = \textit{log. nat.}\ 1247 - \textit{log. nat.}\ 10$$

$= 7,1285 - 2,3026 = 4,8259$, wie so eben gefunden wurde.

Um zu den natürlichen Logarithmen die Zahl zu finden, ist das Interpolationsverfahren fast immer einzuschlagen. Welche Zahl x entspricht z. B. dem natürlichen Logarithmen 5,0900? *log. nat.* 162 $= 5,0876$ und *log. nat.* 163 $= 5,0938$; daher *log. nat.* 163 $-$ *log. nat.* 162 $= 0,0062$, und

log. nat. x — *log. nat.* 162 = 0,0024. Setzt man nun

$$\frac{x-162}{163-162}=\frac{\log.nat.\,x-\log.nat.\,162}{\log.nat.\,163-\log.nat.\,162}=\frac{0{,}0024}{0{,}0062}\text{, so er-}$$

hält man $x = 162 + \frac{24}{62} = 162{,}4$.

Ferner *log. nat.* x sei = 6,9045, was ist x?
log. nat. 10 = 2,3026, daher *log. nat.* $\frac{x}{10}$ oder
log. nat. x — *log. nat.* 10 = 4,6019. Nun ist
log. nat. 100 = 4,6052 und *log. nat.* 99 = 4,5951; es folgt daher

$$\frac{\frac{x}{10}-99}{100-99}=\frac{4{,}6019-4{,}5951}{4{,}6052-4{,}5951},$$

$$\frac{x}{10}=99+\frac{68}{101}=99{,}67 \text{ und } x=996{,}7.$$

VII. Tafel zur Verwandlung der Logarithmen.

Einrichtung und Gebrauch der nachstehenden Tafel. Mit Hülfe dieser kleinen Tabelle läßt sich durch einfaches Addiren jeder gemeine Logarithme in einen natürlichen und umgekehrt, der natürliche in einen gemeinen verwandeln. Der gemeine Logarithmen ergiebt sich aus dem natürlichen, wenn man diesen mit der Zahl 0,434294..., welche man den Modul des gemeinen Logarithmensystems nennt, multiplicirt; den natürlichen Logarithmen hingegen erhält man, wenn man den gemeinen Logarithmen durch eben diesen Modul dividirt, oder durch seinen reciproken Werth 2,302585... multiplicirt. Der erste Theil der folgenden Tabelle enthält die 1-, 2-, 3-, 4-... 9fachen Werthe von 2,3026, 0,2303, 0,0230 u. s. w., und der zweite Theil die 1-, 2-, 3-, 4-... 9fachen Werthe von 0,43429, 0,04343, 0,00434 u. s. w. Wie nun diese Vielfachen zur Verwandlung der Logarithmen zu gebrauchen sind, werden folgende Beispiele vor Augen führen.

Wenn *log.* 124,7 = 2,09587, so folgt

wegen	2	=	4,6052
»	0,09	=	2072
»	0,005	=	115
»	0,0008	=	18
»	0,00007	=	2
log. nat.	124,7	=	4,8259,

wie weiter oben (Seite 54) gefunden wurde.

Ist dagegen *log. nat.* 996,7 = 6,9045, so folgt

wegen	6	=	2,60577
»	0,9	=	39087
»	0,004	=	174
»	0,0005	=	22
daher *log.*	996,7	=	2,9986.

Tafel zur Verwandlung der Logarithmen.

1) Gemeine Logarithmen in natürliche Logarithmen umzusetzen.

Gegebene Ziffern.	Für die Ganzen.	Für die Decimalziffern				
		1	2	3	4	5
1	2,3026	0,2303	0,0230	0,0023	0,0002	0,0000
2	4,6052	0,4605	0,0461	0,0046	0,0005	0,0000
3	6,9078	0,6908	0,0691	0,0069	0.0007	0,0001
4	9,2103	0,9210	0,0921	0,0092	0.0009	0,0001
5	11,5129	1,1513	0,1151	0,0115	0,0012	0,0001
6	13,8155	1,3816	0,1382	0,0138	0,0014	0,0001
7	16,1181	1,6118	0,1612	0,0161	0,0016	0,0002
8	18,4207	1,8421	0,1842	0,0184	0,0018	0,0002
9	20,7233	2,0723	0,2072	0,0207	0,0021	0,0002

2) Natürliche Logarithmen in gemeine Logarithmen umzusetzen.

Gegebene Ziffern.	Für die Ganzen.	Für die Decimalziffern.				
		1	2	3	4	5
1	0,43429	0,04343	0,00434	0,00043	0,00004	0,00000
2	0,86859	0,08686	0,00869	0,00087	0,00009	0,00001
3	1,30288	0,13029	0,01303	0,00130	0,00013	0,00001
4	1,73718	0,17372	0,01737	0,00174	0,00017	0,00002
5	2,17147	0,21715	0,02171	0,00217	0,00022	0,00002
6	2,60577	0,26058	0,02606	0,00261	0,00026	0,00003
7	3,04006	0,30401	0,03040	0,00304	0,00030	0,00003
8	3,47436	0,34744	0,03474	0,00347	0,00035	0,00003
9	3,90865	0,39087	0,03909	0,00391	0,00039	0,00004

Zweiter Abschnitt.

Regeln und Formeln.

Erstes Kapitel.

Grundoperationen.

§. 1. Addition und Subtraction.

I. $a + b = b + a$.

Regel: Eine Veränderung in der Reihenfolge der Summanden bleibt ohne Einfluß auf die Summe.

Z. B. $34,1 + 275,4 = 275,4 + 34,1 = 309,5$; ferner $10,65 + 0,95 + 1,72 = 10,65 + 1,72 + 0,95 = 1,72 + 10,65 + 0,95 = 0,95 + 1,72 + 10,65 = 13,32$.

II. $a + (-b) = a - b = -(b - a)$.

Regel: Man addirt entgegengesetzte Größen, wenn man die kleinere Größe von der größeren subtrahirt und dem Reste das Zeichen ($\pm$) der größeren Zahl giebt.

Z. B. 1) $10,94 + (- 7,23) = 10,94 - 7,23 = 3,71$.
2) $4,07 + (-17,725) = -(17,725 - 4,070) = -13,655$.
3) $-42,7 + 5,823 + (-2,73) = -(42,7 + 2,73) + 5,823 = -45,43 + 5,823 = -(45,430 - 5,823) = -39,607$.

III. $a - (+b) = a + (-b)$,
$a - (-b) = a + (+b) = a + b$.

Regel: Man vollzieht die Subtraction zweier Größen, indem man das Zeichen des Subtrahenten ändert und algebraisch addirt.

Z. B. 1) $109,5 - (+37,4) = 109,5 + (-37,4) = 72,1$.
2) $76,41 - (+163,8) = 76,41 + (-163,8)$
$= -(163,80 - 76,41) = -87,39$.
3) $4,56 - (-3,24) = 4,56 + 3,24 = 7,8$.
4) $1,045 - (-13,6) = 1,045 + 13,600 = 14,645$.

5) $-0{,}941-(+0{,}41)=-0{,}941-0{,}410=-1{,}351.$
6) $-0{,}763-(-2{,}09)=-0{,}763+2{,}090=1{,}327.$

§. 2. Multiplication.

I. $a \cdot b = b \cdot a.$

Regel: Durch eine Vertauschung der Factoren unter einander wird das Product nicht verändert.

Z. B. $3{,}46 \times 61{,}3 = 61{,}3 \times 3{,}46 = 212{,}098;$
$4{,}1 \times 0{,}074 \times 1{,}97 = 1{,}97 \times 4{,}1 \times 0{,}074 = 0{,}597698.$

II. $a\,(b+c) = ab + ac.$

Regel: Besteht der eine Factor aus Theilen, so läßt sich jeder dieser Theile durch den andern Factor multipliciren, ohne das Product zu verändern.

Z. B. 1) $3{,}1 \times (7{,}14 + 0{,}52) = 3{,}1 \times 7{,}14 + 3.1 \times 0{,}52$
$= 22{,}134 + 1{,}612 = 23{,}746.$
2) $(5{,}04 - 1{,}36) \times 0{,}91 = 5{,}04 \times 0{,}91 - 1{,}36 \times 0{,}91$
$= 4{,}5864 - 1{,}2376 = 3{,}3488.$
3) $6{,}31 \times 0{,}45 + 6{,}31 \times 1{,}85 = 6{,}31 \times (0{,}45 + 1{,}85)$
$= 6{,}31 \times 2{,}3 = 14{,}513.$

III. $(-a) \times (-b) = +ab.$
$(+a) \times (-b) = -ab.$

Regel: Gleichbezeichnete Factoren geben ein positives, ungleichbezeichnete ein negatives Product.

Z. B. 1) $(-4{,}61) \times (-0{,}73) = 4{,}61 \times 0{,}73 = 3{,}3653.$
2) $(-0{,}54) \times 7{,}03 = -0{,}54 \times 7{,}03 = -3{,}7962.$

§. 3. Division.

I. $(-a) : (-b) = a : b = +\frac{a}{b}.$

$(-a) : (+b) = (+a) : (-b) = -\frac{a}{b}.$

Regel: Haben Dividend und Divisor gleiche Vorzeichen, so ist der Quotient positiv, haben sie aber verschiedene Vorzeichen, so ist er negativ.

Z. B. 1) $-2{,}84 : -1{,}5 = \frac{2{,}84}{1{,}5} = \frac{28{,}4}{15} = 1{,}8933..$

2) $-16{,}4 : 57{,}2 = -\frac{16{,}4}{57{,}2} = -0{,}2867..$

3) $0{,}96 : -0{,}04 = -\frac{0{,}96}{0{,}04} = -24.$

II. $\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}.$

Regel: Besteht der Dividend aus Theilen, so ist der vollständige Quotient auch gleich der Summe von den Quotienten der einzelnen Theile.

Z. B. 1) $\frac{81{,}42 + 3{,}96}{0{,}48} = \frac{81{,}42}{0{,}48} + \frac{3{,}96}{0{,}48} = 169{,}625 + 8{,}25$
$= 177{,}875.$

2) $\frac{0,473}{1,95} - \frac{0,077}{1,95} = \frac{0,473 - 0,077}{1,95} = \frac{0,396}{1,95} = 0,20307$

III. $\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \cdot b = a \cdot \frac{b}{c}$.

$\frac{a}{bc} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{c} : b$.

Regel: Die Reihenfolge, in welcher man Zahlen durch einander multiplicirt und dividirt, hat auf das Ergebniß keinen Einfluß.

Z. B. 1) $\frac{3,45 \times 7,2}{18} = 3,45 \times \frac{7,2}{18} = 3,45 \times 0,4 = 1,38$.

2) $\frac{102,5}{3,64 \times 2,5} = \frac{102,5}{2,5} : 3,64 = \frac{41}{3,64} = 11,263\ldots$

§. 4. Brüche.

I. $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{a : m}{b : m}$.

Regel: Ein Quotient oder Bruch bleibt unverändert, wenn man Zähler und Nenner desselben durch einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt.

Z. B. 1) $\frac{6,74}{15,15} = \frac{6,74 \times 20}{15,15 \times 20} = \frac{134,8}{303} = 0,44488\ldots$

2) $\frac{40,2}{16,4} = \frac{40,2 : 2}{16,4 : 2} = \frac{20,1}{8,2} = 2,4512\ldots$

II. $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ und $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$.

Regel: Brüche erhalten gleiche Nenner (bd), wenn man Zähler und Nenner des einen Bruches durch den Nenner des andern multiplicirt.

Z. B. 1) $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 7}{4 \times 7} = \frac{21}{28}$ und $\frac{2}{7} = \frac{4 \times 2}{4 \times 7} = \frac{8}{28}$.

2) $2 = \frac{2}{1} = \frac{2 \times 5}{1 \times 5} = \frac{10}{5}$ und $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 1}{5 \times 1} = \frac{3}{5}$.

III. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$.

Regel: Bei der Addition und Subtraction gleichbenannter Brüche sind nur die Zähler zu addiren oder von einander zu subtrahiren; der Nenner bleibt unverändert.

Z. B. $\frac{3}{8} \pm \frac{7}{8} = \frac{3 \pm 7}{8} = \frac{10}{8}$ oder $-\frac{4}{8}$ d. i. $\frac{5}{4}$ oder $-\frac{1}{2}$.

IV. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Regel: Brüche werden multiplicirt, wenn man Zähler durch Zähler und Nenner durch Nenner multiplicirt.

Z. B. $\frac{7}{9} \times \frac{5}{4} = \frac{7 \times 5}{9 \times 4} = \frac{35}{36} = 0,9722\ldots$

$$\frac{3,2}{15,5} \times \frac{4,1}{9,6} = \frac{3,2 \times 4,1}{15,5 \times 9,6} = \frac{4,1}{15,5 \times 3} = \frac{41}{465} = 0,08817\,..$$

$$\text{V.}\quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Regel: Die Division der Brüche verwandelt sich in Multiplication, wenn man den Divisor umkehrt.

Z. B. $\frac{3}{7} : \frac{8}{15} = \frac{3}{7} \times \frac{15}{8} = \frac{45}{56} = 0,8035\ldots$

$$2,1 : \frac{2,73}{18,5} = \frac{2,1 \times 18,5}{2,73} = \frac{38,85}{2,73} = 14,2307\ .$$

§. 5. Grenzwerthe.

I. $\frac{0}{a} = 0.$

Regel: Null durch eine endliche Zahl dividirt, läßt Null.

Z. B. $\frac{0}{31} = 0;\ \frac{0}{0,4} = 0.$

II. $\frac{a}{0} = \infty.$

Regel: Eine endliche Zahl durch Null dividirt, giebt eine unendlich große Zahl.

Z. B. $\frac{3,2}{0} = \infty,\ \frac{0,3}{0} = \infty.$

III. $\frac{0}{0} = x;\ \frac{\infty}{\infty} = x.$

Regel: Null durch Null oder Unendlich durch Unendlich dividirt, läßt den Quotienten unbestimmt (S. §. 30).

Z. B. $\frac{0}{0}$ kann 0, auch 1, auch 2 u. s. w. sein.

§. 6. Näherungswerthe.

I. Wenn $\frac{a}{b} = m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \text{ꝛc.}}}}}$,

so sind die Näherungswerthe für $\frac{a}{b}$:

$$m = \frac{m}{1},\ m + \frac{1}{n} = \frac{mn+1}{n},\ m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p}} = \frac{(mn+1)p+m}{np+1},$$

$$m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q}}} = \frac{([mn+1]p+m)q+mn+1}{(np+1)q+n}\ \text{ꝛc.}$$

Beispiel. Der Bruch $\frac{124}{103}$ giebt durch Division des jedes-

maligen Restes in den vorhergehenden Divisor, also durch die Rechnung:

$$\begin{array}{l}
124 : 103 = 1, \\
\underline{103} \\
103 : 21 = 4, \\
\underline{84} \\
21 : 19 = 1, \\
\underline{19} \\
19 : 2 = 9, \\
\underline{18} \\
2 : 1 = 2, \\
\underline{2} \\
0
\end{array}$$

die Quotienten: 1, 4, 1, 9, 2; es läßt sich daher

$$= 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2}}}}$$

setzen und durch folgende Näherungswerthe, wovon die folgenden immer genauer und genauer werden, ausdrücken:

$$\frac{1}{1},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5},\ \frac{59}{49},\ \frac{124}{103}.$$

II. Sind $\frac{a_1}{b_1}$ und $\frac{a_2}{b_2}$ zwei auf einander folgende Näherungswerthe von $\frac{a}{b}$ und ist r der folgende Nenner oder Quotient, so findet man den entsprechenden Näherungswerth durch die Formel: $\frac{a_3}{b_3} = \frac{r a_2 + a_1}{r b_2 + b_1}$. Z. B. für das Verhältniß des Kreisumfanges zum Durchmesser: $3{,}14159 \ldots = \frac{314159}{100000}$ führt folgende Rechnung:

$$\begin{array}{l}
314159 : 100000 = 3 \\
\underline{300000} \\
100000 : 14159 = 7 \\
\underline{99113} \\
14159 : 887 = 15 \\
\underline{887} \\
5289 \\
\underline{4435} \\
887 : 854 = 1 \\
\underline{854} \\
33 \text{ u. s. w.}
\end{array}$$

auf die Quotienten 3, 7, 15, 1 u. s. w. Die hieraus bestimmten Näherungswerthe sind: $\frac{3}{1}$, $3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$, ferner nach der letzten Regel:

$$\frac{22 \times 15 + 3}{7 \times 15 + 1} = \frac{333}{106}, \quad \frac{333 \times 1 + 22}{106 \times 1 + 7} = \frac{355}{113}, \text{ u. s. w.}$$

Der Fehler eines Näherungswerthes $\frac{a_n}{b_n}$ ist kleiner als $\left(\frac{1}{b_n}\right)^2$; also für $\frac{22}{7}$ kleiner als $\frac{1}{49}$, für $\frac{333}{106}$ kleiner als $\frac{1}{11236}$ oder 0,000089 u. s. w.

§. 7. Potenziren.

I. $a^m \cdot b^m = (ab)^m$; $a^m : b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$.

Regel: Product oder Quotient aus zwei gleich hohen Potenzen ist gleich der Potenz aus dem Producte oder Quotienten.

Z. B. $(2{,}5)^3 \times 4^3 = (2{,}5 \times 4)^3 = 10^3 = 1000$.

$$3{,}45^2 : 6{,}9^2 = \left(\frac{3{,}45}{6{,}9}\right)^2 = 0{,}5^2 = 0{,}25.$$

II. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$.

Regel: Potenzen von einerlei Grundzahlen werden multiplicirt oder dividirt, wenn man ihre Exponenten addirt oder subtrahirt.

Z. B. $\frac{4{,}1^2 \times 4{,}1^3}{4{,}1^4} = \frac{(4{,}1)^{2+3}}{4{,}1^4} = (4{,}1)^{5-4} = 4{,}1$.

III. $(a^m)^n = a^{mn}$.

Regel: Beim Potenziren von Potenzen sind die Exponenten zu multipliciren.

Z. B. $(5^3)^2 = 5^{2 \times 3} = 5^6 = 15625$.

$0{,}23^4 = [(0{,}23)^2]^2 = 0{,}0529^2 = 0{,}00279841$.

IV. $(-a)^{2m} = a^{2m}$, $(-a)^{2m+1} = -a^{2m+1}$.

Regel: Die gerade Potenz einer negativen Zahl ist positiv, die ungerade negativ.

Z. B. $(-0{,}4)^2 = +0{,}16$,

$(-0{,}5)^3 = -0{,}125$.

V. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Regel: Das Quadrat einer zweitheiligen Größe ist gleich der Summe aus den Quadraten beider Theile und aus dem doppelten Producte beider Theile.

Beispiel. 1) $47^2 = \left\{\begin{array}{r} 16\,.\,. \\ 56\,. \\ 49 \end{array}\right\} = 2209$ 2) $0{,}38^2 = \left\{\begin{array}{r} 0{,}09\,.\,. \\ .\,48\,. \\ .\,.\,64 \end{array}\right\} = 0{,}1444$.

3) $583^2 = (580 + 3)^2 = \left\{\begin{array}{l} 25\,.\,.\,.\,. \\ .\,80\,.\,.\,. \\ .\,.\,64\,.\,. \\ .\,.\,348\,. \\ .\,.\,.\,.\,.\,9 \end{array}\right\} = 339889.$

$$4)\quad 3745^2 = \left\{\begin{array}{r} 9\ldots\ \ldots \\ 42\ldots\ldots \\ 49\ldots\ldots \\ 296\ldots \\ 16\ldots \\ 3740\,. \\ 25 \end{array}\right\} = 14025025.$$

VI. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Regel: Die Summe mal die Differenz zweier Zahlen ist gleich der Differenz ihrer Quadrate.

Z. B. 1) $(5 + 3)(5 - 3) = 25 - 9 = 16$.
2) $1{,}43^2 - 0{,}43^2 = (1{,}43 + 0{,}43)(1{,}43 - 0{,}43) = 1{,}86$.

VII. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

Regel: Der Cubus einer zweitheiligen Größe ist gleich der Summe aus dem Cubus des ersten Theiles, aus dem dreifachen Producte vom Quadrate des ersten Theiles und dem zweiten Theile, aus dem dreifachen Producte des ersten Theiles und dem Quadrate des zweiten und aus dem Cubus des zweiten Theiles.

Beispiel 1) $27^3 = \left\{\begin{array}{r} 8\ldots \\ 84\ldots \\ 294\,. \\ 343 \end{array}\right\} = 19683.$ 2) $0{,}49^3 = \left\{\begin{array}{r} 64\ldots \\ 432\ldots \\ 972\,. \\ 729 \end{array}\right\} = 0{,}117649.$

$$3)\quad 741^3 = (740 + 1)^3 = \left\{\begin{array}{r} 343\ldots\ldots \\ 588\ldots\ldots \\ 336\ldots\ldots \\ \ldots 64\ldots \\ 16428\ldots \\ 222\,. \\ 1 \end{array}\right\} = 406869021.$$

$$4)\quad 5204^3 = \left\{\begin{array}{l} 125 \\ \ \ 150 \\ \ \ \ \ \ 608000 \\ \ \ \ \ \ 3244800 \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 24960 \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 64 \end{array}\right\} = 140932729664.$$

§. 8. Besondere Werthe und Grenzwerthe.

I. $a^0 = 1$.

Regel: Jede Zahl zur nullten Potenz erhoben, giebt Eins.

Z. B. $4^0 = 1$; $(0{,}3)^0 = 1$.

II. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$; auch $a^m = \frac{1}{a^{-m}}$.

Regel. Eine Potenz mit negativem Exponenten

ist gleich ihrem reciproken Werthe bei positivem Exponenten.

Z. B. $(3,5)^{-2} = \frac{1}{(3,5)^2} = \frac{1}{12,25} = 0,08163\ldots$

$$\frac{1}{(0,5)^{-3}} = (0,5)^3 = 0,125.$$

III. $a^{-\infty}$ entweder $= 0$ oder $= \infty$.

Regel: Eine Potenz mit unendlich großem negativen Exponenten ist Null oder Unendlichgroß, je nachdem die Grundzahl größer oder kleiner als Eins ist.

Z. B. $4^{-\infty} = 0$, und $(0,2)^{-\infty} = \infty$.

IV. $1^m = 1$.

Regel: Die Einheit bleibt beim Potenziren, was auch der Exponent ist, unverändert.

V. $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$; auch $a^m = \sqrt[\frac{1}{m}]{a}$.

Regel: Die Potenz wird zu einer Wurzel, wenn man den reciproken Werth vom Potenzexponenten zum Wurzelexponenten macht, und umgekehrt.

Z. B. 1) $2,25^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{2,25} = 1,5$.

2) $0,027^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{0,027}\right)^2 = 0,3^2 = 0.09$.

§. 9. Wurzelausziehen.

I. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$, $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$.

Regel: Product oder Quotient von zwei gleich hohen Wurzeln ist gleich der Wurzel aus dem Producte oder dem Quotienten selbst.

Z. B. $\sqrt[2]{3,2} \times \sqrt[2]{5} = \sqrt[2]{3,2 \times 5} = \sqrt{16} = 4$.

$\sqrt[3]{0,0184} : \sqrt[3]{2,3} = \sqrt[3]{\frac{0,0184}{2,3}} = \sqrt[3]{0,008} = 0,2$.

II. $\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$; auch $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$.

Regel: Die Reihenfolge des Potenzirens und Wurzelausziehens ist willkürlich.

Z. B. $\sqrt[3]{(0,125)^2} = (0,125)^{2/3} = (\sqrt[3]{0,125})^2 = (0,5)^2 = 0,25$.

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{343}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{343}} = \sqrt[2]{7} = 2,6457\ldots$$

III. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$.

Regel: Beim Wurzelausziehen aus Wurzeln sind die Exponenten zu multipliciren.

Z. B. $\sqrt[6]{0,000729} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{0,000729}} = \sqrt[3]{0,027} = 0,3$.

IV. $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m:p]{a^{n:p}}$.

Regel: Der Werth einer Wurzelpotenz bleibt unverändert, wenn man den Wurzel- und Potenzexponenten durch einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt.

z. B. $\sqrt[4]{1{,}21^6} = \sqrt[2]{1{,}21^3} = 1{,}1^3 = 1{,}331$.

V. $\sqrt[2n]{+a} = \pm b$, $\sqrt[2n]{-a} = \pm b\sqrt{-1}$.

$\sqrt[2n+1]{+a} = +c$, $\sqrt[2n+1]{-a} = -c$.

Regel: Die gerade Wurzel aus einer positiven Zahl ist positiv und negativ, aus einer negativen Zahl aber imaginär, d. i. unmöglich; die ungerade Wurzel einer Zahl hat mit dieser einerlei Zeichen.

z. B. $\sqrt{9} = +3$ oder -3; $\sqrt{-9} = \pm 3\sqrt{-1}$, d. i. unmöglich.

$\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{-125} = -5$.

VI. $\sqrt{c} = a + b$ gesetzt, folgt $c = a^2 + 2ab + b^2$

und $b = \dfrac{c - a^2}{2a + b} < \dfrac{c - a^2}{2a}$.

Regel: Von den zwei Theilen, aus denen man die Quadratwurzel einer Zahl zusammensetzt, hat man den zweiten kleiner zu machen als den Quotienten, welchen man erhält, wenn man die Differenz zwischen der gegebenen Zahl und dem Quadrate des ersten Theiles durch das doppelte dieses Theiles dividirt.

Beispiele. 1) $\sqrt{1156} = 30 + b$ gesetzt, folgt $b < \dfrac{1156 - 900}{2 \times 30}$, d. i. $b < \dfrac{256}{60}$. Setzt man hiernach $b = 4$, so erhält man wirklich in
$a^2 + 2ab + b^2 = 900 + 60.4 + 4^2 = 900 + 240 + 16 = 1156$
die gegebene Zahl.

2) $\sqrt{7569} = 80 + 7 = 87$, wie folgende Rechnung zeigt:

$c =$	75	69
$a^2 =$	64	..
$c - a^2 =$	11	69
$2a =$	(1	6)
$2ab =$	11	2
$b^2 =$		49
	11	**69**

3) $\sqrt{131044} = 360 + 2 = 362$

denn	13	10	44
$3^2 =$	9		
	4	10	
$2 \times 3 =$		(6)	
$2 \times 3 \times 6 =$	3	6	
$6^2 =$		36	
	3	96	
		14	44
$2 \times 36 =$		(7	2)
$2 \times 36 \times 2 =$		14	4
$2^2 =$			4
		14	44

4) $\sqrt{9,6} = 3,0983 \ldots$

denn	9	60		
$3^2 =$	9			
		60	00	
$2 \times 30 =$		(6	0)	
$2 \times 30 \times 9 =$		54	0	
$9^2 =$			81	
		54	81	
		5	19	00
$2 \times 309 =$			(61	8)
$2 \times 309 \times 8 =$		4	94	4
$8^2 =$				64
		4	95	04

VII. $\sqrt[3]{c} = a + b$ gesetzt, folgt $c = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,

$$\text{und } b = \frac{c - a^3}{3a^2 + 3ab + b^2} < \frac{c - a^3}{3a^2}.$$

Regel: Setzt man die Cubikwurzel einer Zahl aus zwei Theilen zusammen, so hat man den zweiten Theil kleiner zu nehmen als den Quotienten, welcher sich herausstellt, wenn man die Differenz zwischen der gegebenen Zahl und dem Cubus des ersten Theiles durch das dreifache Quadrat desselben dividirt.

Beispiele. 1) $\sqrt[3]{405224} = 70 + b$ gesetzt, folgt $b < \frac{405224 - 343000}{3 \times 4900}$ d. i. $b < \frac{62224}{14700}$. Setzt man hiernach $b = 4$, so erhält man wirklich
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 343000 + 58800 + 3360 + 64 = 405224.$

2) $\sqrt[3]{117649} = 49$, wie folgende Rechnung zeigt:

$c =$	117	649
$a^3 =$	64	
$c - a^3 =$	53	649
$3a^2 =$	(4	8)..
$3a^2b =$	43	2 ..
$3ab^2 =$	9	72 .
$b^3 =$	·	729
	53	649

3) $\sqrt[3]{17\,|\,173\,|\,512} = 250 + 8 = 258$

	17	173	512
$2^3 =$	8		
	9	173	
$3 \times 2^2 =$	(1	2)..	
$3 \times 2^2 \times 5 =$	6	0 ..	
$3 \times 2 \times 5^2 =$	1	50 .	
$5^3 =$		125	
	7	625	
	1	548	512
$3 \times 25^2 =$		(187	5)
$3 \times 25^2 \times 8 =$	1	500	0
$3 \times 25 \times 8^2 =$		48	00
$8^3 =$			512
	1	548	512

4) $\sqrt[3]{5,8} = 1,7967\ldots$

1			
4	800		
	(3)		
2	1		
1	47		
	343		
3	913		
	887	000	
	(86	7)	
	780	3	
	41	31	
		729	
	822	339	
	64	661	000
	(9	612	3)

§. 10. Logarithmenrechnung.

I $log. (ab) = log.\ a + log.\ b.$

Regel: Der Logarithme eines Productes ist gleich der Summe aus den Logarithmen der Factoren.

Z. B. $log. (453 \times 2,9734) = log.\ 453 + log.\ 2,9734$

$$= \begin{Bmatrix} 2,65610 \\ 0,47325 \end{Bmatrix}$$
$$= 3,12935$$

daher $453 \times 2,9734 = num.\ 3,12935 = 1346,95.$

II. $log. \left(\frac{a}{b}\right) = log.\ a - log.\ b.$

Regel: Der Logarithme eines Bruches oder Quotienten ist gleich der Differenz von den Logarithmen des Zählers und Nenners oder des Dividenden und Divisors.

Z. B. 1) $log. \left(\frac{85,79}{0,1648}\right) = log.\ 85,79 - log.\ 0,1648$

$$= \begin{Bmatrix} 1,93344 \\ -0,21696+1 \end{Bmatrix}$$
$$= 2,71648,$$ daher

$$\frac{85,79}{0,1648} = num.\ 2,71648 = 520,57.$$

2) $log.\left(\frac{0,0874 \times 2945}{0,003642}\right) = log. 0,0874 + log. 2945 - log. 0,003642$

$log.\ 0,0874 = 0,94151 - 2$

$log.\ \ 2945 = 3,46909$

$\qquad\qquad\quad 2,41060$

$log.\ 0,003642 = 0,56134 - 3$

$$\frac{0,0874 \times 2945}{0,003642} = num.\ 4,84926 = 70674$$

III. $log. (a^m) = m \, log. a.$

Regel: Der Logarithme einer Potenz ist gleich dem Producte aus dem Exponenten und dem Logarithmen der Grundzahl.

Beispiele. 1) $log. (1{,}765^3) = 3 \times log. 1{,}765$

$= 3 \times 0{,}24674 = 0{,}74022$

$1{,}765^3 = num. 0{,}74022 = 5{,}4982.$

2) $log. \sqrt[3]{43{,}59} = log. 43{,}59^{1/3} = \frac{log. 43{,}59}{3}$

$= 1{,}63939 : 3 = 0{,}54646$

$\sqrt[3]{43{,}59} = num. 0{,}54646 = 3{,}5193.$

3) $log. \sqrt[5]{0{,}037^3} = log. (0{,}037^{3/5}) = \frac{3}{5} \times log. 0{,}037$

$= \frac{3}{5} \times (0{,}56820 - 2)$

$\quad 0{,}70460 - 5$

$= \quad 0{,}14092 - 1$

$\sqrt[5]{0{,}037^3} = 0{,}13833\ldots$

Zweites Capitel.

Gleichungen.

§. 11. Grundregeln.

I. Ist $x \pm a = b$, so folgt $x = b \mp a$.

Regel: Jedes Glied einer Gleichung läßt sich mit dem entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite setzen.

Z. B. 1) $x - 0{,}54 = 2{,}36$, giebt $x = 2{,}36 + 0{,}54 = 2{,}9$.
2) $5{,}602 - x = 2{,}862$, giebt $x = 5{,}602 - 2{,}862 = 2{,}74$.

II. Ist $ax = b$, so folgt $x = \frac{b}{a}$, ist ferner $\frac{x}{a} = b$, so ergiebt sich $x = ab$, und aus $\frac{a}{x} = b$, resultirt $x = \frac{a}{b}$.

Regel: Ein Factor der einen Seite läßt sich als Divisor, und ein Divisor der einen Seite als Factor auf die andere Seite setzen.

Z. B. 1) $3{,}5x + 0{,}46 = 9{,}34$, giebt $x = \frac{9{,}34 - 0{,}46}{3{,}5} = 2{,}5371\ldots$

2) $3{,}5 (x + 0{,}46) = 9{,}34$, giebt $x = \frac{9{,}34}{3{,}5} - 0{,}46 = 2{,}2085\ldots$

3) $\frac{x - 0{,}094}{0{,}42} = 23{,}1$, giebt $x = 0{,}42 \times 23{,}1 + 0{,}094 = 9{,}796$

4) $\frac{3,4 + 6x}{0,85 - x} = 104$, giebt $3,4 + 6x = 88,4 - 104x$,

$110x = 85$, $x = \frac{85}{110} = \frac{17}{22} = 0,7727 \ldots$

III. Ist $x^m = b$, so folgt $x = \sqrt[m]{b}$ und

ist $\sqrt[m]{x} = b$, so folgt $x = b^m$.

Regel: Anstatt die eine Seite einer Gleichung zur Potenz zu erheben, kann man auf der anderen Seite die gleichhohe Wurzel ausziehen, und umgekehrt, das Wurzelausziehen aus der einen Seite kann durch Potenziren der anderen ersetzt werden.

Z. B. 1) $(3x - 0,95)^2 = 85,4$ giebt $3x - 0,95 = \sqrt[2]{85,4}$,

und $x = \frac{9,2412 + 0,95}{3} = \frac{10,1912}{3} = 3,397 \ldots$

2) $\sqrt[2]{5x} + 2,3 = 4,65$ giebt $\sqrt[2]{5x} = 2,35$, $5x = (2,35)^2$

und $x = \frac{5,5225}{5} = 1,1045$.

IV. Ist $a^x = b$, so folgt $x \log. a = \log. b$ und $x = \frac{\log. b}{\log. a}$.

Regel: Um eine Gleichung, welche die Unbekannte im Exponenten hat, (eine Exponentialgleichung) aufzulösen, hat man aus beiden Seiten der Gleichung die Logarithmen zu nehmen.

Z. B. $8^{2x-1} = 20$ giebt $(2x - 1) \log. 8 = \log. 20$, und

$$2x - 1 = \frac{\log. 20}{\log. 8} = \frac{1,30103}{0,47712} = 2,7268,$$

folglich $x = \frac{3,7268}{2} = 1,8634 \ldots$

§. 12. Proportionen.

I. Ist $x : a = b : c$, oder $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$, so folgt

$cx = ab$ und $x = \frac{ab}{c}$.

Regel: Bei jeder Proportion ist das Product der äußeren Glieder gleich dem der inneren.

Beispiel. Wenn 1 Meter = 3,0784 pariser Fuß = 3,1862 preuß. Fuß beträgt, wie viel pariser Fuß gehen auf 540,9 preuß. Fuß? Es läßt sich setzen:

$x : 540,9 = 3,0784 : 3,1862$; oder

$3,1862 \times x = 540,9 \times 3,0784$, und folgt

$x = \frac{540,9 \times 3,0784}{3,1862} = 522,60$ pariser Fuß.

II. Ist $x : a = b : x$ oder $a : x = x : b$, so folgt

$x^2 = ab$ und $x = \sqrt{ab}$.

Regel: Bei einer stetigen Proportion ist das Quadrat von einem der beiden gleichen Glieder gleich dem Producte der beiden anderen Glieder.

Beispiel. Die Zahl 35 ist in einer Unbekannten gerade soviel Mal enthalten, wie diese in der Zahl 10,9, welches ist diese Unbekannte? Es ist

$$35 : x = x : 10{,}9;\ \text{daher}\ x^2 = 35 \times 10{,}9 = 381{,}5$$
$$\text{und}\ x = \sqrt{381{,}5} = 19{,}532.$$

III. Aus $x : a = b : c$ folgt auch $x : b = a : c$.

Regel: Eine Proportion bleibt unverändert, wenn die beiden inneren oder die beiden äußeren Glieder unter einander verwechselt werden.

Wenn z. B. $x : 3 = 5 : 15$ ist, so hat man auch
$$x : 5 = 3 : 15 \text{ u. s. w.}$$

IV. Ist $x : a = b : c$, so hat man auch
$$(x \pm a) : a = (b \pm c) : c.$$

Regel: Eine Proportion bleibt eine solche, wenn man statt des ersten Gliedes die Summe oder Differenz der beiden ersten Glieder, und statt des dritten Gliedes die Summe oder Differenz der beiden letzten Glieder einsetzt.

Z. B. Aus $16 : 20 = 4 : 5$ folgt auch
$36 : 20 = 9 : 5$, auch
$4 : 20 = 1 : 5$ u. s. w.

§. 13. Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

I. Ist $x + y = s$ und
$x - y = d$, so hat man
$$x = \frac{s + d}{2} \text{ und } y = \frac{s - d}{2}.$$

Regel: Man findet aus der Summe und Differenz zweier Größen die eine Größe, indem man die halbe Differenz zur halben Summe addirt, und die andere, indem man die halbe Differenz von der halben Summe subtrahirt.

Z. B. Wenn $x + y = 18$ und
$x - y = 4$ ist, so hat man
$$x = \frac{18 + 4}{2} = 11 \text{ und } y = \frac{18 - 4}{2} = 7.$$

II. Ist $a_1 x + b_1 y = c_1$ und zugleich
$a_2 x + b_2 y = c_2$, so folgt
$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \text{ und } y = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{b_1 a_2 - b_2 a_1}.$$

Beispiel. Ist $3x + 2y = 33$ und $5x - 2y = 7$, so erhält man $x = \frac{-33 \times 2 - 7 \times 2}{-3 \times 2 - 5 \times 2} = \frac{66 + 14}{6 + 10} = \frac{80}{16} = 5$

und $y = \frac{33 \times 5 - 7 \times 3}{5 \times 2 + 3 \times 2} = \frac{144}{16} = 9.$

III. Ist $a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$
$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$ und
$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$, so ergiebt sich

$$x = \frac{d_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + d_2(b_3 c_1 - b_1 c_3) + d_3(b_1 c_2 - b_2 c_1)}{a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2(b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1)},$$

$$y = \frac{d_1(a_2 c_3 - a_3 c_2) + d_2(a_3 c_1 - a_1 c_3) + d_3(a_1 c_2 - a_2 c_1)}{b_1(a_2 c_3 - a_3 c_2) + b_2(a_3 c_1 - a_1 c_3) + b_3(a_1 c_2 - a_2 c_1)},$$

$$z = \frac{d_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + d_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + d_3(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{c_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + c_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + c_3(a_1 b_2 - a_2 b_1)}.$$

Beispiel. Wenn $2x + 5y - 7z = -288$,
$5x - y + 3z = 227$,
$7x + 6y + z = 297$; dann folgt

$$x = \frac{288 \times 19 - 227 \times 47 + 297 \times 8}{-2 \times 19 - 5 \times 47 + 7 \times 8} = \frac{2821}{217} = 13,$$

$$y = \frac{288 \times 16 - 227 \times 51 + 297 \times 41}{-5 \times 16 + 1 \times 51 + 6 \times 41} = \frac{5208}{217} = 24,$$

$$z = \frac{-288 \times 37 + 227 \times 23 - 297 \times 27}{-7 \times 37 + 3 \times 23 - 1 \times 27} = \frac{13454}{217} = 62$$

§. 14. Quadratische Gleichungen.

I. Ist $x^2 + ax = b$, so folgt

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{b + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Beispiel. 1) $x^2 + 4x = 77$, giebt

$$x = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{77 + \left(\frac{4}{2}\right)^2} = -2 \pm \sqrt{81} = 7 \text{ oder } -11.$$

2) $(x + 3)(x - 11) = 32$, oder $x^2 - 8x = 65$ giebt
$x = 4 \pm \sqrt{65 + 16} = 4 \pm \sqrt{81} = 13$ oder -5.

3) $9x = 10 + \sqrt{15x}$, oder $(9x - 10)^2 = 15x$ oder
$x^2 - \frac{195}{81} x = -\frac{100}{81}$ giebt

$$x = \frac{195 \pm \sqrt{195^2 - 32400}}{162} = \frac{195 \pm \sqrt{5625}}{162}$$

$$= \frac{270}{162} = \frac{5}{3} \text{ oder } \frac{120}{162} = \frac{20}{27}.$$

II. Ist $x^{2n} + ax^n = b$, so folgt

$$x = \sqrt[n]{-\frac{a}{2} \pm \sqrt{b + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}.$$

Beispiel. $x^6 - 12x^3 = 108$, oder $x^{2.3} - 12x^3 = 108$ giebt

$$x = \sqrt[3]{+\frac{12}{2} \pm \sqrt{108 + \left(\frac{12}{2}\right)^2}} = \sqrt[3]{6 \pm \sqrt{144}}$$

$$= \sqrt[3]{18} = 2{,}6207\ldots \text{ oder } \sqrt[3]{-6} = -1{,}8171\ldots$$

III. Wenn $x + y = s$ und

$xy = p$, so findet man

$$x = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2} \text{ und } y = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2}.$$

Beispiel. 1) Die Summe zweier Zahlen ist 20, ihr Product 96, daher sind die Zahlen selbst:

$$x = \frac{20 + \sqrt{20^2 - 4 \times 96}}{2} = \frac{20 + \sqrt{16}}{2} = \frac{20 + 4}{2} = 12 \text{ und}$$

$$y = \frac{20 - 4}{2} = 8.$$

2) Die Differenz zweier Zahlen ist 4 und ihr Product 77; daher:

$$x = \frac{4 + \sqrt{4^2 + 4 \times 77}}{2} = \frac{4 + \sqrt{16 + 308}}{2} = \frac{4 + \sqrt{324}}{2} = 11,$$

$y = 11 - 4 = 7.$

§. 15. Cubische Gleichungen.

I. Die viergliedrige cubische Gleichung.

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ geht in die dreigliedrige $x_1^3 + b_1 x_1 + c_1 = 0$ über, wenn man setzt:

1) $x_1 = x - \frac{a}{3}$

2) $b_1 = b - \frac{a^2}{3}$

3) $c_1 = c - \frac{ab}{3} + \frac{2}{27} a^3.$

Beispiel. Die viergliedrige cubische Gleichung

$$x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0$$

verwandelt sich, wenn man $x = x_1 + 4$ setzt, in folgende dreigliedrige:

$x_1^3 + 9x_1 + 6 = 0$, weil

$b - \frac{a^2}{3} = 57 - 48 = 9$ und

$c - \frac{ab}{3} + \frac{2}{27} a^3 = -94 + 228 - 128 = 6$ ist.

II. Die Cardanische Regel giebt für die cubische Gleichung $x^3 + bx + c = 0$, die Wurzel

$$x = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}}$$
$$+ \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{3}\right)^3 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}}.$$

Diese Regel führt auf ein reelles Resultat, entweder wenn b positiv, oder wenn b negativ und zugleich

$\left(\frac{b}{3}\right)^3 < \left(\frac{c}{2}\right)^2$ ist.

Ist b negativ und $\left(\frac{b}{3}\right)^3 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$, so hat die cubische Gleichung folgende drei reelle Wurzeln:

$$x = -2\sqrt[3]{\frac{c}{2}},\ x = \sqrt[3]{\frac{c}{2}} \text{ und } x = \sqrt[3]{\frac{c}{2}}.$$

Ist b negativ und zugleich

$\left(\frac{b}{3}\right)^3 > \left(\frac{c}{2}\right)^2$, so hat die cubische Gleichung ebenfalls drei reelle Wurzeln; dieselben treten aber nach der Cardanischen Regel in imaginärer Gestalt auf.

Beispiel. Für die Gleichung $x^3 - 12x - 28 = 0$ ist die einzige Wurzel:

$$x = \sqrt[3]{\frac{28}{2} + \sqrt{-\left(\frac{12}{3}\right)^3 + \left(\frac{28}{2}\right)^2}}$$
$$+ \sqrt[3]{\frac{28}{2} - \sqrt{-\left(\frac{12}{3}\right)^2 + \left(\frac{28}{2}\right)^2}}$$
$$= \sqrt[3]{14 + \sqrt{-64 + 196}} + \sqrt[3]{14 - \sqrt{-64 + 196}}$$
$$= \sqrt[3]{14 + \sqrt{132}} + \sqrt[3]{14 - \sqrt{132}} = \sqrt[3]{25{,}489} + \sqrt[3]{2{,}5109}$$
$$= 2{,}9429 + 1{,}3592 = 4{,}3021 \ldots$$

III. Die trigonometrische Auflösung der cubischen Gleichung $x^3 + bx + c = 0$ giebt

1) $y = \sqrt{-\frac{4}{3}b}$, 2) $\sin. 3\varphi^0 = \frac{c}{2}\left(-\frac{3}{b}\right)^{\frac{3}{2}}$ *) und

3) $x = y \sin. \varphi^0$, sowie auch $= y \sin. (60^0 - \varphi^0)$ und $= -y \sin. (60^0 + \varphi^0)$.

Diese Formel ist nur anwendbar, wenn b negativ und $\left(\frac{b}{3}\right)^3 > \left(\frac{c}{2}\right)^2$; in welchem Falle es aber stets die eben angegebenen drei Wurzeln giebt.

Beispiel. Für die Gleichung

$x^3 - 12x + 9 = 0$, ist $y = \sqrt{\frac{4}{3} \times 12} = \sqrt{4 \times 4} = 4$,

$$\sin. 3\varphi = \frac{9}{2}\left(+\frac{3}{12}\right)^{3/2} = \frac{9}{2}\left(+\frac{1}{4}\right)^{3/2} = \frac{9}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{9}{16}$$
$$= 0{,}5625.$$

Diesem Werthe entspricht $3\varphi = 34^0, 13', 44''$; und es ist hiernach $\varphi^0 = 11^0, 24', 35''$; ferner

$60^0 - \varphi = 48^0, 35', 25''$, endlich

$60^0 + \varphi = 71^0, 24', 35''$.

Diesemnach sind die Wurzeln der gegebenen Gleichung:

$$x = y \sin. \varphi^0 = 4 \times \sin. 11^0, 24', 35'' = 4 \times 0{,}19782 = 0{,}7913,$$
$$x = y \sin. (60^0 - \varphi^0) = 4 \times \sin. 48^0, 35', 25'' = 4 \times 0{,}75 = 3{,}0000,$$
$$x = -y \sin. (60 + \varphi^0) = -4 \times \sin. 71^0, 24', 35''$$
$$= -4 \times 0{,}9478 = -3{,}7912.$$

*) φ spr. Phi.

§. 16. Auflösung höherer Gleichungen durch Näherung.

I. Ist x_1 ein Näherungswerth von $x^2 + ax + b = 0$, so folgt genauer

$$x = \frac{x_1^2 - b}{2x_1 + a}.$$

Beispiel. Für $x^2 - 8x - 14 = 0$ giebt $x_1 = 9$ zu wenig und $x_1 = 10$ zu viel, nämlich ersteres -5 und letzteres $+6$, es läßt sich daher $x_1 = 9\frac{1}{2}$ als erster Näherungswerth einführen. Die Formel giebt nun

$$x = \frac{(9{,}5)^2 + 14}{2 \times 9{,}5 - 8} = \frac{104{,}25}{11} = 9{,}4772.$$

II. Ist x_1 ein Näherungswerth von $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, so folgt genauer

$$x = \frac{2x_1^3 + ax_1^2 - c}{3x_1^2 + 2ax_1 + b}.$$

Beispiel. Für $x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0$ giebt $x_1 = 3$, den Fehler $27 - 108 + 171 - 94 = -4$, $x_1 = 3\frac{1}{2}$ aber giebt ihn $= 42{,}875 - 147 + 199{,}5 - 94 = 1{,}375$; es läßt sich daher $x = 3{,}4$ als Näherungswerth einführen. Hiernach ist

$$x = \frac{2 \times (3{,}4)^3 - 12(3{,}4)^2 + 94}{3 \times (3{,}4)^2 - 2 \times 12 \times 3{,}4 + 57} = \frac{78{,}608 + 94 - 138{,}72}{34{,}68 + 57 - 81{,}6}$$

$$= \frac{33{,}888}{10{,}08} = 3{,}362.$$

III. Ist x_1 ein Näherungswerth der Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

so folgt genauer

$$x = \frac{3x_1^4 + 2ax_1^3 + bx_1^2 - d}{4x_1^3 + 3ax_1^2 + 2bx_1 + c}.$$

Beispiel. Der Gleichung $x^4 + 8x^2 + 16x - 440 = 0$ wird beinahe Genüge geleistet durch $x = 4$; setzen wir aber $x_1 = 4$, so folgt

$$x = \frac{3 \times 4^4 + 2 \times 0 + 8 \times 4^2 + 440}{4 \times 4^3 + 3 \times 0 + 2 \times 8 \times 4 + 16} = \frac{768 + 128 + 440}{256 + 64 + 16}$$

$$= \frac{1336}{336} = \frac{167}{42} = 3{,}976.$$

Führen wir diese Zahl 3,976 nochmals als Näherungswerth ein, so erhalten wir

$$x = \frac{3 \times 3{,}976^4 + 8 \times 3{,}976^2 + 440}{4 \times 3{,}976^3 + 2 \times 8 \times 3{,}976 + 16} = \frac{1316{,}20}{331{,}04} = 3{,}975953.$$

IV. Ist x_1 ein Näherungswerth von $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, so hat man schärfer:

$$x = \frac{4x_1^5 + 3ax_1^4 + 2bx_1^3 + cx_1^2 - e}{5x_1^4 + 4ax_1^3 + 3bx_1^2 + 2cx_1 + d}.$$

Beisp. Für die Gleichung $x^5 - 0{,}00719x^2 - 0{,}0024070 = 0$, ist ungefähr $x = 0{,}3$, denn $(0{,}3)^5 - 0{,}00719 \times (0{,}3)^2 - 0{,}002407 = 0{,}002430 - 0{,}000647 - 0{,}002407 = -0{,}00062$; setzen wir daher $x_1 = 0{,}3$, so folgt der genauere Werth

$$x = \frac{4 \times (0,3)^5 - 0,00719 \times (0,3)^2 + 0,002407}{5 \times (0,3)^4 - 2 \times 0,00719 \times 0,3}$$
$$= \frac{0,00972 - 0,000647 + 0,002407}{0,0405 - 0,004314}$$
$$= \frac{0,01148}{0,036186} = 0,3172.$$

V. Giebt die numerische Gleichung $X = 0$, für den Näherungswerth x_1 das kleine Resultat X_1, und für den Näherungswerth x_2 das kleine Resultat X_2, so hat man

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{X_1}{X_2} \text{ und hiernach } x = \frac{x_1 X_2 - x_2 X_1}{X_2 - X_1}.$$

Regel: Es verhalten sich die Fehler der Hypothesen (x_1, x_2) wie die Fehler (X_1, X_2) der Resultate, insofern letztere überhaupt klein sind.

Beispiel 1. Für die Gleichung $x + log. nat. x - 2 = 0$ giebt der Näherungswerth oder die Hypothese
$x_1 = 1,5$ den Fehler $1,5 + 0,4055 - 2 = - 0,0945$;
dagegen $x_2 = 1,6$ den Fehler $1,6 + 0,4700 - 2 = + 0,0700$, es ist daher der genauere Werth

$$x = \frac{1,5 \times 0,0700 + 1,6 \times 0,0945}{0,0700 + 0,0945} = \frac{0,1050 + 0,1512}{0,1645}$$
$$= \frac{2562}{1645} = 1,5574.$$

Beispiel 2. Für $x - sin. x = \frac{3}{4}$, ist annähernd $x_1^0 = 99$ Grad, denn: Bogen x_1 = Bogen $99^0 = 3,14159 \times \frac{99}{180}$ $= 1,72788$; $sin. 99^0 = sin. 81^0 = 0,98769$, daher der Fehler:

$$X_1 = 1,72788 - 0,98769 - 0,75000 = - 0,00981.$$

Nimmt man $x_2 = 100^0$, so bekommt man den Fehler:

$$X_2 = 1,74533 - 0,98481 - 0,75000 = 0,01052.$$

Jetzt läßt sich der gesuchte Werth von x setzen:

$$x = \frac{99 \times 0,01052 + 100 \times 0,00981}{0,01052 + 0,00981} = \frac{2,02248}{0,02033} = 99^0,4825$$
$$= 99^0, 29'.$$

§. 17. Methode der kleinsten Quadrate.

I. Hat man für eine und dieselbe Größe (x) die mit unbekannten kleinen Fehlern behafteten Werthe $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ beobachtet, so ist dieselbe

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} \text{ zu setzen.}$$

Regel: Man findet den wahrscheinlichsten Werth einer Größe, wenn man aus den beobachteten Werthen derselben das arithmetische Mittel nimmt, d. h. wenn man die Summe dieser Werthe durch ihre Anzahl dividirt.

Beispiel. Hat man durch wiederholtes Nivelliren einen und denselben Höhenabstand 5,62 Fuß, 5,59 Fuß, 5,46 Fuß

und 5,49 Fuß gefunden, so kann man deshalb den wahrscheinlichsten Werth dieses Abstandes:

$$x = \frac{5,62 + 5,59 + 5,46 + 5,49}{4} = 5 + \frac{2,16}{4} = 5,54 \text{ Fuß setzen.}$$

II. Hat man für die der Formel $y = \alpha u + \beta v$ entsprechenden veränderlichen Größen u, v und y die zusammengehörigen, mit kleinen Fehlern behafteten Werthe

$$\begin{array}{l} y_1\,,\ u_1\,,\ v_1\,, \\ y_2\,,\ u_2\,,\ v_2\,, \\ y_3\,,\ u_3\,,\ v_3\,, \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n\,,\ u_n\,,\ v_n \end{array}$$

gefunden, so sind die wahrscheinlichsten Werthe der constanten Factoren (α und β) *) folgende:

$$1)\quad \alpha = \frac{\Sigma(v^2)\,\Sigma(uy) - \Sigma(uv)\,\Sigma(vy)}{\Sigma(u^2)\,\Sigma(v^2) - \Sigma(uv)\,\Sigma(uv)},$$

$$2)\quad \beta = \frac{\Sigma(u^2)\,\Sigma(vy) - \Sigma(uv)\,\Sigma(uy)}{\Sigma(u^2)\,\Sigma(v^2) - \Sigma(uv)\,\Sigma(uv)}.$$

Das Zeichen Σ**) deutet die Summation aller gleichartigen Größen an, deren allgemeine Zeichen in der Parenthese eingeschlossen sind, vor welcher Σ steht.

Beispiel. Durch Versuche hat sich herausgestellt, daß ein horizontales Wasserrad bei folgenden Umdrehungen in der Minute: $u_1 = 100$, $u_2 = 90$, $u_3 = 80$, $u_4 = 70$, $u_5 = 60$, $u_6 = 50$, folgende Arbeiten, in Pferdekräften ausgedrückt, leistete: $A_1 = 15$, $A_2 = 19$, $A_3 = 22$, $A_4 = 24$, $A_5 = 25$, $A_6 = 23$; man will hieraus eine allgemeine Formel für die Leistung dieses Rades finden.

Setzt man nun allgemein diese Arbeit

$$A = \alpha u + \beta u^2,$$

so lassen sich die Constanten α und β durch folgende Formeln bestimmen:

$$\alpha = \frac{\Sigma(u^4)\,\Sigma(Au) - \Sigma(u^3)\,\Sigma(Au^2)}{\Sigma(u^2)\,\Sigma(u^4) - \Sigma(u^3)\,\Sigma(u^3)},$$

$$\beta = \frac{\Sigma(u^2)\,\Sigma(Au^2) - \Sigma(u^3)\,\Sigma(Au)}{\Sigma(u^2)\,\Sigma(u^4) - \Sigma(u^3)\,\Sigma(u^3)},$$

---

*) α spr. Alpha, β spr. Beta.
**) Σ spr. Sigma.

u^2	u^3	u^4	Au	Au^2
10000	1000000	100000000	1500	150000
8100	729000	65610000	1710	153900
6400	512000	40960000	1760	140800
4900	343000	24010000	1680	117600
3600	216000	12960000	1500	90000
2500	125000	6250000	1150	57500
35500 $=\Sigma(u^2)$	2925000 $=\Sigma(u^3)$	249790000 $=\Sigma(u^4)$	9300 $=\Sigma(Au)$	709800 $=\Sigma(Au^2)$

Aus diesen Summen folgen

1) $\alpha = \frac{24979 \times 93 - 2925 \times 709{,}8}{355 \times 24979 - 2925 \times 2925} = \frac{246882}{311920} = 0{,}7914.$

2) $\beta = \frac{355 \times 7098 - 2925 \times 930}{35500 \times 24979 - 2925 \times 292500} = -\frac{20046}{3119200}$
$= -0{,}00643.$

Es läßt sich hiernach die Arbeit dieses Wasserrades setzen:

$$A = 0{,}791 \times u - 0{,}00643 \times u^2 \text{ Pferdekräfte.}$$

Diese Formel giebt für die zum Grunde gelegten Umdrehungszahlen:

$u_1 = 100,\ u_2 = 90,\ u_3 = 80,\ u_4 = 70,\ u_5 = 60,\ u_6 = 50,$
die von den obigen nur wenig abweichenden Arbeiten:

$A_1 = 14{,}8,\ A_2 = 19{,}1,\ A_3 = 22{,}2,\ A_4 = 23{,}9,\ A_5 = 24{,}3,$
$A_6 = 23{,}5.$

Nach der gefundenen Formel ist die Arbeit Null nicht nur bei $u = 0$, sondern auch bei $u = \frac{79140}{643} = 123$ Umdrehungen in der Minute; sie ist endlich ein Maximum und zwar $= 24{,}4$ Pferdekräfte, für $u = 61\frac{1}{2}$ Umdrehungen.

III. Sind für die Formel

$$y = \alpha u + \beta v + \gamma w,$$

die nur mit kleinen zufälligen Fehlern behafteten Werthe

$y_1, u_1, v_1, w_1,$
$y_2, u_2, v_2, w_2,$
y_3, u_3, v_3, w_3 u. s. w.

bekannt, so lassen sich die richtigsten Werthe der constanten Coefficienten (α, β, γ) durch folgende drei Gleichungen bestimmen:

1) $\alpha\Sigma(u^2) + \beta\Sigma(uv) + \gamma\Sigma(uw) = \Sigma(uy),$
2) $\beta\Sigma(v^2) + \alpha\Sigma(uv) + \gamma\Sigma(vw) = \Sigma(vy),$
3) $\gamma\Sigma(w^2) + \alpha\Sigma(uw) + \beta\Sigma(vw) = \Sigma(wy).$

Beispiel. Für drei unbekannte Größen α, β, γ hat man folgende fünf nur annähernd richtige Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned} 4\beta + 2\gamma &= 13, \\ 2\alpha + 6\beta + \gamma &= 18, \\ 3\alpha + \beta + 10\gamma &= 33, \\ 4\alpha + 2\beta + 15\gamma &= 56, \\ 10\alpha + 3\beta + 6\gamma &= 32; \end{aligned}$$

man soll die wahrscheinlichsten Werthe dieser Unbekannten ermitteln. Man findet sehr leicht:

$$\Sigma(u^2) = 129,\ \Sigma(uv) = 53,\ \Sigma(uy) = 679,$$
$$\Sigma(v^2) = 66,\ \Sigma(uw) = 152,\ \Sigma(vy) = 401,$$
$$\Sigma(w^2) = 366,\ \Sigma(vw) = 72,\ \Sigma(wy) = 1406;$$

und hiernach folgende drei Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned} 129\alpha + 53\beta + 152\gamma &= 679, \\ 53\alpha + 66\beta + 72\gamma &= 401, \\ 152\alpha + 72\beta + 366\gamma &= 1406. \end{aligned}$$

Hieraus lassen sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} -0{,}1126\,\alpha + 0{,}5680\,\beta &= 1{,}1020, \\ +0{,}3208\,\alpha + 0{,}7191\,\beta &= 3{,}8415, \end{aligned}$$

ableiten, aus welchen nun

1) $\alpha = 0{,}7181$,
2) $\beta = 2{,}0825$ folgt, wodurch sich endlich
3) $\gamma = 3{,}1310$ ergiebt.

Setzt man diese Werthe in die ersten fünf Gleichungen, so erhält man die Werthe: 14,592; 17,065; 35,547; 54,002; 32,214, welche von den gegebenen Werthen 13, 18, 33, 56, 32 zum Theil wenig abweichen.

Drittes Capitel.

Reihen.

---

§. 18. Binomische Reihe.

I. $(a + x)^n$

$$= a^n + na^{n-1}.x + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}.x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}.x^3 + \cdots$$

$$= a^n + \Sigma\left[\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r}a^{n-r}.x^r\right].$$

II. $(a - x)^n$

$$= a^n - na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}.x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}x^3 + \cdots$$

$$= a^n + \Sigma\left[\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r}a^{n-r}(-x)^r\right].$$

Setzt man $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ u. s. w., so erhält man hiernach:

$(a \pm x)^1 = a \pm x,$
$(a \pm x)^2 = a^2 \pm 2ax + x^2,$
$(a \pm x)^3 = a^3 \pm 3a^2x + 3ax^2 \pm x^3,$
$(a \pm x)^4 = a^4 \pm 4a^3x + 6a^2x^2 \pm 4ax^3 + x^4,$
$(a \pm x)^5 = a^5 \pm 5a^4x + 10a^3x^2 \pm 10a^2x^3 + 5ax^4 \pm x^5,$
$(a \pm x)^6 = a^6 \pm 6a^5x + 15a^4x^2 \pm 20a^3x^3 + 15a^2x^4 \pm 6ax^5 + x^6,$
$(a \pm x)^7 = a^7 \pm 7a^6x + 21a^5x^2 \pm 35a^4x^3 + 35a^3x^4 \pm 21a^2x^5$
$+ 7ax^6 \pm x^7.$

$$\text{III.} \quad (a+x)^n = a^n\left[1 + n\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \cdots\right].$$

$$\text{IV.} \quad (a+x)^n = a^n\left[1 + n\left(\frac{x}{a+x}\right) + \frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\left(\frac{x}{a+x}\right)^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\left(\frac{x}{a+x}\right)^3 + \cdots\right].$$

Setzt man $n = \frac{1}{2}$ und $n = \frac{1}{3}$, so bekommt man in der Gleichung III. folgende Formeln zur Ausziehung der Wurzeln:

$$1)\quad \sqrt{a+x} = \sqrt{a}\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right) - \tfrac{1}{8}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \tfrac{1}{16}\left(\frac{x}{a}\right)^3 - \tfrac{5}{128}\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \tfrac{7}{256}\left(\frac{x}{a}\right)^5 - \cdots\right].$$

$$2)\quad \sqrt[3]{a+x} = \sqrt[3]{a}\left[1 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right) - \tfrac{1}{9}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \tfrac{5}{81}\left(\frac{x}{a}\right)^3 - \tfrac{10}{243}\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \tfrac{22}{729}\left(\frac{x}{a}\right)^5 - \cdots\right].$$

Beispiel 1. $\sqrt{103} = \sqrt{100 + 3} = \sqrt{10^2 + 3}$
$= 10(1 + \frac{1}{2}.0{,}03 - \frac{1}{8}.0{,}0009 + \frac{1}{16}.0{,}000027 - \frac{5}{128}.0{,}00000081 + \cdots)$
$= 10(1 + 0{,}015 - 0{,}0001125 + 0{,}000001685 - 0{,}00000003)$
$= 10 \times 1{,}01488915 = 10{,}1488915 \ldots$

Beispiel 2. $\sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{512 - 12} = \sqrt[3]{8^3 - 12}$
$= 8\left[1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{12}{512} - \frac{1}{9}\left(\frac{12}{512}\right)^2 - \frac{5}{81}\cdot\left(\frac{12}{512}\right)^3 - \cdots\right]$
$= 8(1 - \frac{1}{3} \times 0{,}0234375 - \frac{1}{9} \times 0{,}0005493 - \frac{5}{81} \times 0{,}0000129)$
$= 8(1 - 0{,}0078125 - 0{,}0000610 - 0{,}0000008)$
$= 8 - 8 \times 0{,}0078743 = 8 - 0{,}0629944$
$= 7{,}937005.$

Die Reihe Nr. IV. wird eine endliche, wenn der Exponent eine negative ganze Zahl ist, während in diesem Falle die Reihe Nr. III. ohne Ende fortgeht. Z. B.:

$$\frac{1}{(a+x)^3} = (a+x)^{-3} = a^{-3}\left[1 - 3\left(\frac{x}{a+x}\right) + 3\left(\frac{x}{a+x}\right)^2 - \left(\frac{x}{a+x}\right)^3\right].$$

Beispiel. $\sqrt{\frac{1}{40}} = 40^{-\frac{1}{2}} = (36 + 4)^{-\frac{1}{2}}$

$$= \tfrac{1}{6}\left[1 - \tfrac{1}{2} \times \frac{4}{40} - \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}+1)}{1 \times 2} \cdot \left(\frac{4}{40}\right)^2 - \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}+1)(-\frac{1}{2}+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{4}{40}\right)^3 \ldots\right]$$

$$= \tfrac{1}{6}(1 - \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}1 - \tfrac{1}{8} \cdot 0{,}01 - \tfrac{1}{16} \cdot 0{,}001 - \tfrac{5}{128} \cdot 0{,}0001 \ldots)$$

$$= \tfrac{1}{6} \times \left\{\begin{array}{l} 1 - 0{,}05 \\ \;\; - 0{,}00125 \\ \;\; - 0{,}0000625 \\ \;\; - 0{,}0000039 \end{array}\right\} = \tfrac{1}{6}(1 - 0{,}0513164)$$

$$= 0{,}158114.$$

§. 19. Exponential- und logarithmische Reihen.

I. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$

$= 1 + \Sigma\left(\frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}\right)$; wo

$e = 2{,}7182818284\ldots$ die Grundzahl des natürlichen oder hyperbolischen Logarithmensystemes bezeichnet. Z. B.:

$$\sqrt[3]{e} = e^{\frac{1}{3}} = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{27} + \tfrac{1}{24} \cdot \tfrac{1}{81} + \tfrac{1}{120} \cdot \tfrac{1}{243} + \cdots$$

$$= \left\{\begin{array}{l} 1{,}333333\,.. \\ \;\;.55555 \\ \;\;..6173 \\ \;\;...514 \\ \;\;....34 \\ \;\;.....2 \end{array}\right\} = 1{,}39561\ldots$$

II. $a^x = 1 + \frac{x}{m} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{x}{m}\right)^3 + \cdots$

wo $\frac{1}{m} = log.\, nat.\, a$, und m der Modul des der Grundzahl a entsprechenden Logarithmensystemes ist. Für die briggischen oder gemeinen Logarithmen ist $a = 10$ und $\frac{1}{m} = log.\ nat.\ 10$ $= 2{,}30258509\ldots$, sowie $m = 0{,}4342944\ldots$

III. $log. nat. (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots$

Diese Reihe ist nur brauchbar, um die Logarithmen der von Eins wenig abweichenden Zahlen zu finden.

Z. B. $log.\, nat.\, \tfrac{6}{5} = log.\, nat.\, (1 + \tfrac{1}{5})$ ist

$$= \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{125} - \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{625} + \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{1}{3125} - \cdots$$

$$= \left\{\begin{array}{l} 0{,}2\ldots\ldots \\ 0{,}002666 \\ 0{,}000064 \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l} 0{,}020000 \\ 0{,}000400. \\ 0{,}000010.. \end{array}\right\}$$

$$= 0{,}20273 - 0{,}02041 = 0{,}18232.$$

IV. $log.nat.x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \cdots\right].$

Diese Reihe ist auch zur Berechnung der mehr von Eins abweichenden Zahlen geeignet. Z. B.:

$$log.nat.\,3 = 2\,[\tfrac{2}{4} + \tfrac{1}{3}\,(\tfrac{2}{4})^3 + \tfrac{1}{5}\,(\tfrac{2}{4})^5 + \cdots]$$
$$= 2\,(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{1}{128} + \cdots)$$
$$= 2 \times \begin{Bmatrix} 0{,}5\ldots. \\ 0{,}04166 \\ 0{,}00625 \\ 0{,}00111 \\ 0{,}00021 \\ 0{,}00004 \end{Bmatrix} = 2 \times 0{,}5493 = 1{,}0986.$$

V. $log.nat.(x+y) = log.nat.x$
$$+ 2\left[\frac{y}{2x+y} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^5 + \cdots\right]$$

Diese Reihe ist in Anwendung zu bringen, um aus gegebenen Logarithmen nächst höhere Logarithmen zu finden.

Z. B. $log.nat.\,10 = log.nat.\,(9+1) = log.nat.\,(3^2+1)$
$$= log.nat.\,3^2 + 2\left(\frac{1}{18+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{18+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{1}{18+1}\right)^5 + \cdots\right)$$
$$= 2\,log.nat.\,3 + 2\left[\frac{1}{19} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{19}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{1}{19}\right)^5 + \cdots\right]$$
$$= 2{,}197224 + 2\begin{Bmatrix} 0{,}0526316 \\ 0{,}0000486 \\ 0{,}0000001 \end{Bmatrix}$$
$$= 2{,}197224 + 2 \times 0{,}0526803 = \begin{Bmatrix} 2{,}197224 \\ 0{,}105361 \end{Bmatrix}$$
$$= 2{,}302585.$$

VI. $\underset{a}{log}.\,x = \dfrac{log.nat.\,x}{log.nat.\,a}$, wo a die Grundzahl des künstlichen Logarithmensystems ist.

Z. B. $\underset{10}{log}.\,x = \dfrac{log.nat.\,x}{log.nat.\,10} = \dfrac{log.nat.\,x}{2{,}302585}$,
d. i. $log.\,x = 0{,}4342944\ldots \times log.nat.\,x$, und
$log.nat.\,x = 2{,}302585\ldots \times log.\,x$.

§. 20. Geometrische Progressionen. Für die geometrische Progression

$$\begin{Bmatrix} a, & ab, & ab^2, & ab^3 & \ldots\ldots\ldots\ldots & ab^{n-1} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots\ldots\ldots\ldots & n \end{Bmatrix}$$

ist das $n$te oder letzte Glied:

I. $t = ab^{n-1}$ und die Summe aller Glieder:

II. $s = a\left(\dfrac{b^n - 1}{b - 1}\right)$; auch

III. $s = \dfrac{bt - a}{b - 1}$,

IV. $s = \dfrac{t\,(b^n - 1)}{b^{n-1}\,(b - 1)}$ und

V. $s = \dfrac{\sqrt[n-1]{t^n} - \sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{t} - \sqrt[n-1]{a}}$.

Ist der sogenannte Exponent b ein ächter Bruch, und die Zahl der Glieder (n) unendlich groß, so hat man $t = 0$ und

$$s = \frac{a}{1 - b}.$$

Beispiel 1. Wie groß ist das zehnte Glied der Reihe $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{27}{16}$ u. s. w., und welches ist die Summe der ersten zehn Glieder? Es ist das Anfangsglied $a = \frac{1}{2}$, das Verhältniß der benachbarten Glieder, $b = \frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{3}{2}$, und die Anzahl der Glieder $n = 10$, daher das zehnte Glied:

$$t = \tfrac{1}{2} \times (\tfrac{3}{2})^9 = 19{,}2217,$$

und die Summe der ersten zehn Glieder:

$$s = \tfrac{1}{2}\left(\frac{(\frac{3}{2})^{10} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\right) = (\tfrac{3}{2})^{10} - 1 = 3 \times 19{,}2217 - 1 = 56{,}6651.$$

Beispiel 2. Es ist der periodische Decimalbruch 0,378378378... in einen gemeinen zu verwandeln.

$0{,}378378... = 0{,}378 \cdot 1 + 0{,}378 \cdot \frac{1}{1000} + 0{,}378 \cdot \frac{1}{1000}^2 + \cdots$, also $a = 0{,}378$, $b = \frac{1}{1000}$ und $n = \infty$; die Summe ist

$$s = \frac{0{,}378}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{378}{999} = \frac{14}{37}.$$

Beispiel 3. Dagegen ist 0,20454545...

$$= 0{,}20 + 0{,}0045\,[1 + \tfrac{1}{100} + (\tfrac{1}{100})^2 + \cdots (\tfrac{1}{100})^3 + \cdots]$$

$$= 0{,}20 + \frac{0{,}0045}{1 - \frac{1}{100}} = 0{,}20 + \frac{0{,}45}{99}$$

$$= \tfrac{1}{5} + \tfrac{45}{9900} = \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{220} = \tfrac{225}{1100} = \tfrac{45}{220} = \tfrac{9}{44}.$$

§. 21. Zinseszinsrechnung. Ist das anfängliche Kapital $= K$ und betragen die jährlichen Zinsen $= a$ Procent, so folgt der Werth des Kapitals nach n Jahren:

I. $W = \left(1 + \dfrac{a}{100}\right)^n K$, auch ist

II. $K = \dfrac{W}{\left(1 + \dfrac{a}{100}\right)^n}$, ferner

III. $a = 100\left(\sqrt[n]{\dfrac{W}{K}} - 1\right)$,

IV. $n = \dfrac{\log. W - \log. K}{\log.\left(1 + \dfrac{a}{100}\right)}$.

Beispiel 1. Ein Kapital von 5000 Thalern zu 4 Procent auf Zinseszins ausgeliehen, hat nach 6 Jahren den Werth:

$$W = 1{,}04^6 \times 5000,$$

$$log.\, W = 6\, log.\, 1{,}04 + log.\, 5000 = \begin{Bmatrix} 0{,}10220 \\ 3{,}69897 \end{Bmatrix} = 3{,}80117$$

$$W = 6326{,}6 \text{ Thaler.}$$

Beispiel 2. Eine Volksmenge bestand vor 20 Jahren aus 3450 Köpfen und enthält deren jetzt 5126; wie viel Procent betrug innerhalb dieser Zeit die procentalische Zunahme an Bevölkerung?

$$a = 100\left(\sqrt[20]{\frac{5126}{3450}} - 1\right).$$

$$\begin{aligned} \text{Nun ist } log.\, 5126 &= 3{,}70978 \\ log.\, 3450 &= 3{,}53782 \\ \hline & \ 0{,}17196 : 20 \\ \hline num.\, 0{,}008598 &= 1{,}0200, \end{aligned}$$

demnach die gesuchte procentalische Zunahme

$$a = 100\,(1{,}0200 - 1) = 2.$$

Beispiel 3. In welcher Zeit steigt das Anlagskapital einer Maschine von 35000 Thaler auf 50000 Thaler, die Zinsen zu drei Procent gerechnet? Es ist

$$n = \frac{log.\, 50000 - log.\, 35000}{log.\, 1{,}03} = \frac{0{,}1549}{0{,}01284} = \frac{15490}{1284}$$

$$= 12{,}06 \text{ Jahre.}$$

§. 22. **Rentenrechnung.** Wenn ein Kapital K am Ende eines jeden Jahres noch um eine stets gleich bleibende Summe S vermehrt oder vermindert wird, so ist der Werth desselben nach n Jahren:

$$\text{I.}\quad W = \left(1 + \frac{a}{100}\right)^n K \pm \left[\left(1 + \frac{a}{100}\right)^n - 1\right] \frac{100}{a} S.$$

W ist kleiner als K, wenn die jährliche Wegnahme S größer ist als die Zinsen $\frac{a}{100} K$ am Ende des ersten Jahres, und es fällt sogar Null aus, wenn

$$\text{II.}\quad \frac{S}{K} = \frac{a}{100} \cdot \frac{\left(1 + \frac{a}{100}\right)^n}{\left(1 + \frac{a}{100}\right)^n - 1} \text{ ist.}$$

Auch hat man in diesem Falle

$$\text{III.}\quad n = \frac{log.\, S - log.\left(S - \frac{a}{100} K\right)}{log.\left(1 + \frac{a}{100}\right)}.$$

Beispiel 1. Ein Kapital von 9000 Thalern zu 5 Procent auf Zinseszins ausgeliehen, bekommt jährlich noch einen Zuwachs von 300 Thalern, welches ist der Werth desselben nach 8 Jahren? Er ist:

$$W = 1{,}05^8 \times 9000 + (1{,}05^8 - 1) \times \frac{100}{5} \times 300$$
$$= 1{,}47745 \times 9000 + 0{,}47745 \times 6000$$
$$= 13297 + 2864{,}7 = 16161{,}7 \text{ Thaler.}$$

Beispiel 2. Welchen baaren Werth hat eine Jahrrente von 500 Thalern, welche sechs Jahre lang ausgezahlt wird, die Zinsen zu $3\frac{1}{2}$ Procent gerechnet? Es ist in Nr. II. $S = 500$, $n = 6$ und $\frac{a}{100} = \frac{3{,}5}{100}$ einzusetzen, weshalb nun folgt:

$$K = \frac{100}{a} \cdot S \cdot \frac{\left(1 + \frac{a}{100}\right)^n - 1}{\left(1 + \frac{a}{100}\right)^n} = \frac{200}{7} \times 500 \times \frac{1{,}035^6 - 1}{1{,}035^6}$$
$$= \frac{100000}{7} \times \frac{1{,}22925 - 1}{1{,}22925} = \frac{22925}{7 \times 1{,}22925} = \frac{22925}{8{,}60475}$$
$$= 2664{,}2 \text{ Thaler.}$$

Beispiel 3. Wie viel Jahre lang kann man ein auf eine Schuld von 20000 Thalern verpfändetes Grundstück benutzen, wenn dasselbe jährlich 1500 Thaler reinen Gewinn giebt, und die Zinsen zu 5 Procent gerechnet werden. Nach Nr. III. ist

$$n = \frac{\log. 1500 - \log.\left(1500 - \frac{5}{100} \times 20000\right)}{\log. 1{,}05}$$
$$= \frac{3{,}17609 - 2{,}69897}{0{,}02119} = \frac{47712}{2119} = 22\frac{1}{2} \text{ Jahre.}$$

§. 23. Arithmetische Progressionen. Für die arithmetische Progression (arithmetische Reihe erster Ordnung)

$$\underset{1}{a},\ \underset{2}{a + d},\ \underset{3}{a + 2d},\ \underset{4}{a + 3d}, \ldots \underset{n}{a + (n - 1)d}$$

ist das $n$te oder letzte Glied:

$$\text{I.} \quad t = a + (n - 1)d$$

und die Summe der n ersten Glieder:

$$\text{II.} \quad s = \frac{a + t}{2} \cdot n.$$

Auch hat man

$$\text{III.} \quad s = \left(a + \frac{(n - 1)d}{2}\right) n,$$

$$\text{IV.} \quad s = \left(t - \frac{(n - 1)d}{2}\right) n \text{ und}$$

$$\text{V.} \quad s = \frac{a + t}{2} \cdot \left(\frac{t - a}{d} + 1\right).$$

Beispiel 1. Ist das Anfangsglied einer arithmetischen Reihe $= 3$ und die Differenz $= 4$, die Reihe also folgende: 3, 7, 11, 15, 19 u. s. w., so beträgt ihr 15tes Glied:

$$t = 3 + (15 - 1)\, 4 = 3 + 56 = 59,$$

und die Summe der ersten 15 Glieder:

$$s = \frac{3 + 59}{2} \times 15 = 31 \times 15 = 465.$$

Beispiel 2. Wie viel Zeit braucht ein Körper, um einen Raum von 40 Fuß zu durchlaufen, wenn er in der ersten Secunde 1, in der zweiten 3, in der dritten 5, in der vierten 7 Fuß u. s. w. durchläuft? Hier ist $s = 40$, $a = 1$ und $d = 3 - 1 = 5 - 3 = 7 - 5 = 2$; daher nach Nr. III.:

$$40 = \left(1 + 2\frac{(n-1)}{2}\right)n = n + n^2 - n = n^2, \text{ und } n = \sqrt{40} = 6{,}324 \text{ Sec.}$$

Beispiel 3. Wenn zum Niederbringen eines 165 Fuß tiefen Schachtes 5000 Thaler verwendet, und beim Anfange für einen Fuß Tiefe nur 10 Thaler bezahlt wurden, nach welcher arithmetischen Progression mußten sich die Kosten mit der Tiefe steigern, vorausgesetzt, daß sich die Beschaffenheit des Gesteines auf die ganze Tiefe nicht ändert.

Es ist $a = 10$, $n = 165$ und $s = 5000$, daher nach Nr. III.:

$$5000 = \left(10 + \frac{(165 - 1)\,d}{2}\right).\,165 = (10 + 82\,d)\,.\,165;$$

$$5000 - 1650 = 165 \times 82\,d,\ d = \frac{3350}{82 \times 165} = \frac{335}{1353} = 0{,}2476.$$

Es kommt also jeder Fuß Schachttiefe um 0,2476, d. i. beinahe um 1/4 Thaler theurer, als der nächst vorhergegangene. Der letzte Fuß kostet:

$t = 10 + (165 - 1) \times 0{,}2476 = 10 + 164 \times 0{,}2476 = 50{,}606$ Thaler.

Es ist auch wirklich:

$$s = \left(\frac{a + t}{2}\right)n = \frac{60{,}606}{2} \times 165 = 30{,}303 \times 165 = 5000$$

Thaler, der ganze Geldaufwand.

§. 24. Höhere arithmetische Reihen.

Ist $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots\ldots a_n$ eine höhere arithmetische Reihe:
$b_1, b_2, b_3, b_4 \ldots\ldots b_n$ ihre erste,
$c_1, c_2, c_3, c_4 \ldots\ldots c_n$ ihre zweite,
$d_1, d_2, d_3, d_4 \ldots\ldots d_n$ ihre dritte
Differenzreihe, ist also $b_1 = a_2 - a_1$, $b_2 = a_3 - a_2$, $c_1 = b_2 - b_1$, $d_1 = c_2 - c_1$ u. s. w., so hat man das allgemeine Glied der Hauptreihe

$$\text{I. } a_n = a_1 + (n\text{-}1)\,b_1 + \frac{(n\text{-}1)(n\text{-}2)}{1\,.\,2}c_1 + \frac{(n\text{-}1)(n\text{-}2)(n\text{-}3)}{1\,.\,2\,.\,3}d_1 + \ldots,$$

dagegen die Summe aller Glieder der Hauptreihe, bis zum $n$ten oder allgemeinen Gliede, das sogenannte summatorische Glied:

$$\text{II. } S_n = n a_1 + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}b_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}c_1 + \ldots$$

Bei einer arithmetischen Reihe der zweiten Ordnung ist $c_1 = c_2 = c_3 \ldots$, also $d_1 = 0$ u. s. w., daher ist für sie

$$a_n = a_1 + (n-1)b_1 + \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)c_1,$$
$$S_n = na_1 + \tfrac{1}{2}n(n-1)b_1 + \tfrac{1}{6}n(n-1)(n-2)c_1.$$

Die Reihen der sogenannten **Polygonalzahlen** sind

Zahlen des Dreieckes: 1, 3, 6, 10, 15 ......,

„ „ **Viereckes**: 1, 4, 9, 16, 25 ......,

„ „ **Fünfeckes**: 1, 5, 12, 22, 35 u. s. w.

Es ist demnach das allgemeine Glied der **Dreieckszahlen**:

$$a_n = 1 + 2(n-1) + \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) = \frac{n(n+1)}{2},$$

und das summatorische Glied:

$$S_n = n + n(n-1) + \tfrac{1}{6}n(n-1)(n-2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}.$$

Für die Viereckszahlen ist $a_1 = 1$, $b_1 = 4 - 1 = 3$ und $c_1 = 5 - 3 = 2$, daher

$$a_n = 1 + 3(n-1) + (n-1)(n-2) = n^2,$$
$$S_n = n + \tfrac{3}{2}n(n-1) + \tfrac{1}{3}n(n-1)(n-2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}.$$

Beispiel. Die höhere arithmetische Reihe

2 , 10 , 30 , 68 , 130 , 222...

hat folgende Differenzenreihen:

8 , 20 , 38 , 62 , 92

12 , 18 , 24 , 30

6 , 6 , 6

0 , 0

0

Für sie ist daher $a_1 = 2$, $b_1 = 8$, $c_1 = 12$, $d_1 = 6$, $e_1 = 0$; daher das allgemeine Glied:

$$a_n = 2 + 8(n-1) + \tfrac{12}{2}(n-1)(n-2) + \tfrac{6}{6}(n-1)(n-2)(n-3) + 0...$$
$$= 2 + 8n - 8 + 6n^2 - 18n + 12 + n^3 - 6n^2 + 11n - 6$$
$$= n + n^3 = n(n^2 + 1),$$

das summatorische Glied:

$$S_n = 2n + 4n(n-1) + 2n(n-1)(n-2) + \tfrac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)$$
$$= \tfrac{1}{4}n(2 + 3n + 2n^2 + n^3) = \tfrac{1}{4}n(n+1)(n^2 + n + 2).$$

Nach diesen Formeln ist z. B. das zehnte Glied der Hauptreihe:

$$a_{10} = 10(10^2 + 1) = 10 \times 101 = 1010,$$

und die Summe der ersten zehn Glieder:

$$S_{10} = \tfrac{1}{4} \times 10 \times 11(100 + 10 + 2) = 55 \times 56 = 3080.$$

§. 25. **Potenzenreihen.** Bedeutet $\Sigma(n)$ die Summe der natürlichen Zahlen $(1, 2, 3, 4 \ldots n)$ von 1 bis n, ferner $\Sigma(n^2)$ die Summe $(1^2, 2^2, 3^2, 4^2 \ldots n^2)$ ihrer Quadrate, $\Sigma(n^3)$ die Summe $(1^3, 2^3, 3^3. 4^3 \ldots n^3)$ ihrer Cuben u. s. w., so hat man

I. $\Sigma(n) = \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n,$

II. $\Sigma(n^2) = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n,$

III. $\Sigma(n^3) = \tfrac{1}{4}n^4 + \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}n^2,$

IV. $\Sigma(n^4) = \tfrac{1}{5}n^5 + \tfrac{1}{2}n^4 + \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{30}n,$

V. $\Sigma(n^5) = \tfrac{1}{6}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 + \tfrac{5}{12}n^4 - \tfrac{1}{12}n^2,$

VI. $\Sigma(n^6) = \tfrac{1}{7}n^7 + \tfrac{1}{2}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 - \tfrac{1}{6}n^3 + \tfrac{1}{42}n.$

Ist n eine unendliche oder sehr große Zahl, so hat man allgemein:

$$\text{VII.}\quad \Sigma(n^m) = \frac{n^{m+1}}{m+1}.$$

Z. B.
$$\Sigma(n) = \tfrac{1}{2} n^2,$$
$$\Sigma(n^2) = \tfrac{1}{3} n^3,$$
$$\Sigma(n^3) = \tfrac{1}{4} n^4 \text{ u. s. w., ebenso}$$
$$\Sigma(n^{1/2}) = \tfrac{2}{3} n^{3/2},$$
$$\Sigma(n^{3/2}) = \tfrac{2}{5} n^{5/2},$$
$$\Sigma(n^{2/3}) = \tfrac{3}{5} n^{5/3} \text{ u. s. w.}$$

Beispiel 1. Die Summe aller Cuben von 1^3 bis 10^3 ist
$$\Sigma(10^3) = \tfrac{1}{4} \times 10^4 + \tfrac{1}{2} \times 10^3 + \tfrac{1}{4} \times 10^2$$
$$= 2500 + 500 + 25 = 3025.$$

Beispiel 2. Die Summe aller Quadratwurzeln von $\sqrt{1}$ bis $\sqrt{10000}$ läßt sich annähernd setzen:
$$\tfrac{2}{3} \times (\sqrt{10000})^3 = \tfrac{2}{3} \times 100^3 = 667000.$$

Beispiel 3. Die Summe aller Quadrate von 1^2 bis 1000^2 ist annähernd $= \tfrac{1}{3} . 1000^3 = 333000000$.

§. 26. Interpolation bei gleichen Intervallen.

Die in §. 24 unter (I.) gegebene Reihe
$$a_n = a_1 + (n-1)\, b_1 + \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)\, c_1 + \cdots$$
dient auch zum Einschalten eines Gliedes a_n einer gegebenen Reihe a_1, a_2, a_3 u. s. w., deren Differenzreihen b_1, b_2, b_3 u. s. w., c_1, c_2, c_3 u. s. w. sind.

Beispiel 1. Die Reihe
$$\sqrt{10},\ \sqrt{11},\ \sqrt{12},\ \sqrt{13} \text{ u. s. w.}$$
oder 3,16228; 3,31662; 3,46410; 3,60555 hat die Differenzreihen:

0,15434; 0,14748; 0,14145;
— 0,00686; — 0,00603;
+ 0,00083.

Es läßt sich daher das 1,3te Glied oder
$$\sqrt{10{,}3} = 3{,}16228 + 0{,}15434\,(1{,}3-1) - \tfrac{1}{2} . 0{,}00686\,(1{,}3-1)(1{,}3-2)$$
$$+ \tfrac{1}{6} \times 0{,}00083\,(1{,}3-1)(1{,}3-2)(1{,}3-3)$$
$$= 3{,}16228 + 0{,}15434 \times 0{,}3 + 0{,}00343 \times 0{,}3 \times 0{,}7$$
$$+ 0{,}00014 \times 0{,}3 \times 0{,}7 \times 1{,}7$$
$$= \left\{\begin{array}{r} 3{,}16228 \\ .4630 \\ \ldots 72 \\ \ldots . 5 \end{array}\right\} = 3{,}20935 \text{ setzen.}$$

Beispiel 2. Aus
$$\left\{\begin{array}{l} \log. 100 = 2{,}000000, \\ \log. 101 = 2{,}004321, \\ \log. 102 = 2{,}008600, \\ \log. 103 = 2{,}012837, \end{array}\right.$$
folgen die Differenzen

$$\begin{array}{l|l|l} 0{,}004321 & -0{,}000042 & \text{es ist daher das 1,7te Glied} \\ 0{,}004279 & -0{,}000042 & \text{oder} \\ 0{,}004237 & & \end{array}$$

$$\log.\, 100{,}7 = 2{,}000000 + 0{,}004321\,(1{,}7 - 1) - \tfrac{1}{2} \times 0{,}000042\,(1{,}7 - 1)\,(1{,}7 - 2)$$

$$= \left\{\begin{array}{r} 2{,}000000 \\ 3025 \\ 4 \end{array}\right\} = 2{,}003029.$$

§. 27. Interpolationen bei ungleichen Intervallen. Sind die den Grundgrößen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ entsprechenden Werthe einer Function $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$, so läßt sich setzen:

$$y_n = \left\{\begin{array}{l} y_1 \dfrac{(x_n - x_2)\,(x_n - x_3)\,(x_n - x_4)\ldots}{(x_1 - x_2)\,(x_1 - x_3)\,(x_1 - x_4)\ldots} \\ + y_2 \dfrac{(x_n - x_1)\,(x_n - x_3)\,(x_n - x_4)\ldots}{(x_2 - x_1)\,(x_2 - x_3)\,(x_2 - x_4)\ldots} \\ + y_3 \dfrac{(x_n - x_1)\,(x_n - x_2)\,(x_n - x_4)\ldots}{(x_3 - x_1)\,(x_3 - x_2)\,(x_3 - x_4)\ldots} \\ + y_4 \dfrac{(x_n - x_1)\,(x_n - x_2)\,(x_n - x_3)\ldots}{(x_4 - x_1)\,(x_4 - x_2)\,(x_4 - x_3)\ldots} \end{array}\right\}$$

Beispiel. Der Widerstand, welchen das stillstehende Wasser einem in ihm bewegten Boote entgegensetzt, war für die Geschwindigkeiten

1,925; 2,222; 2,628; 4,045 englische Meilen,
11,00; 13,08: 18,10; 47,26 englische Pfund;

wie groß ist aber dieser Widerstand bei einer Geschwindigkeit von 3 englischen Meilen (in einer Stunde)?

Es ist $x_1 = 1{,}925 \mid x_2 = 2{,}222 \mid x_3 = 2{,}628 \mid x_4 = 4{,}045$
$y_1 = 11{,}00 \mid y_2 = 13{,}08 \mid y_3 = 18{,}10 \mid y_4 = 47{,}26$,

endlich $x_n = 3$ und daher

$$y_n = \left\{\begin{array}{l} 11{,}00 \times \dfrac{0{,}778 \times 0{,}372 \times 1{,}045}{0{,}297 \times 0{,}703 \times 2{,}120} \\ -13{,}08 \times \dfrac{1{,}075 \times 0{,}372 \times 1{,}045}{0{,}297 \times 0{,}406 \times 1{,}823} \\ +18{,}10 \times \dfrac{1{,}705 \times 0{,}778 \times 1{,}045}{0{,}703 \times 0{,}406 \times 1{,}417} \\ +47{,}26 \times \dfrac{1{,}075 \times 0{,}778 \times 0{,}372}{2{,}120 \times 1{,}823 \times 1{,}417} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{3{,}3266}{0{,}4426} \\ -\dfrac{5{,}4661}{0{,}2198} \\ +\dfrac{15{,}8191}{0{,}4044} \\ +\dfrac{14{,}7036}{5{,}4764} \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{r} 7{,}516 \\ -24{,}866 \\ +39{,}113 \\ +2{,}685 \end{array}\right\} = 24{,}45 \text{ Pfund, der gesuchte Widerstand.}$$

§. 28. Formeln der Differenzialrechnung. Bezeichnen a und n constante, sowie x und y ur- oder abhängig variable Größen, so gelten folgende Regeln:

I. $\partial\,(a + x) = \partial\, x.$

II. $\partial\,(a x) = a\,\partial x.$

III. $\partial(x^n) = n x^{n-1} \partial x.$

IV. $\partial(a^x) = Ln.\, a \,.\, a^x \partial x,$

oder, wenn e die Grundzahl 2,71828... der natürlichen Logarithmen bezeichnet,

IV*. $\partial(e^x) = e^x \partial x.$

V. $\partial(Log._a\, x) = \frac{1}{Ln.\, a} \cdot \frac{\partial x}{x},$

oder, wenn $Ln.$ den natürlichen, der Grundzahl e entsprechenden Logarithmen bezeichnet,

V*. $\partial(Ln.\, x) = \frac{\partial x}{x}.$

VI. $\partial(xy) = x\partial y + y \partial x.$

VII. $\partial\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\partial x - x \partial y}{y^2}.$

Ferner:

VIII. $\partial(sin.\, x) = cos.\, x \,.\, \partial x.$

IX. $\partial(cos.\, x) = -\ sin.\, x \,.\, \partial x.$

X. $\partial(tang.\, x) = \frac{\partial x}{(cos.\, x)^2}.$

XI. $\partial(cotang.\, x) = -\frac{\partial x}{(sin.\, x)^2}.$

Und:

XII. $\partial\, arc.\, (sin. = x) = \frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}}.$

XIII. $\partial\, arc.\, (cos. = x) = -\frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}}.$

XIV. $\partial\, arc.\, (tang. = x) = \frac{\partial x}{1 + x^2}.$

XV. $\partial\, arc.\, (cotang. = x) = -\frac{\partial x}{1 + x^2}.$

Beispiele:

1. Es ist $\partial(3x^5 + 2) = \partial(3x^5) = 3\partial(x^5) = 3 \,.\, 5 x^4 \partial x$
$= 15 x^4 \partial x.$

2. $\partial\left(\frac{\sqrt[3]{2x^4} - 1}{5}\right) = \frac{1}{5}\partial\left(\sqrt[3]{2x^4}\right) = \frac{1}{5}\sqrt[3]{2} \,.\, \partial(x^{4/3})$
$= \frac{1}{5}\sqrt[3]{2} \,.\, \frac{4}{3} x^{1/3} \partial x = \frac{4}{15}\sqrt[3]{2x} \,.\, \partial x.$

3. $\partial(2^{5x}) = Ln.\, 2 \,.\, 2^{5x} \partial(5x) = 5\, Ln.\, 2 \,.\, 2^{5x} \partial x$
$= 3{,}4657 \,.\, 2^{5x} \partial x.$

4. $\partial\left(e^{2\sqrt{x}}\right) = e^{2\sqrt{x}} \partial(2\sqrt{x}) = e^{2\sqrt{x}} \,.\, 2\,\partial(x^{1/2})$
$= e^{2\sqrt{x}} \,.\, x^{-1/2} \partial x = \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot \partial x.$

5. $\partial\, Ln.(x + \sqrt{1 + x^2}) = \frac{\partial(x + (1 + x^2)^{1/2})}{x + \sqrt{1 + x^2}}$
$= \frac{\partial x + \frac{1}{2}(1 + x^2)^{-1/2}\partial(x^2)}{x + \sqrt{1 + x^2}}$
$= \frac{1 + (1 + x^2)^{-1/2} \,.\, x}{x + \sqrt{1 + x^2}} \partial x = \frac{\partial x}{\sqrt{1 + x^2}}.$

6. $\partial[x^2 sin.(3x+1)] = x^2 \partial sin.(3x+1) + sin.(3x+1)\,\partial(x^2)$
$= x^2 cos.(3x+1)\,\partial(3x+1) + sin.(3x+1).\,2x\,\partial x$
$= [3x\,cos.(3x+1) + 2\,sin.(3x+1)]\,x\,\partial x.$

7. $$\partial\left(\frac{1+sin.2x}{cos.2x}\right) = \frac{cos.2x\,\partial(1+sin\,2x) - (1+sin.2x)\,\partial(cos.2x)}{(cos.\,2x)^2}$$
$$= \frac{2\,cos.2x.cos.2x + 2(1+sin.2x)\,sin.2x}{(cos.\,2x)^2}.\partial x$$
$$= \frac{2(1+sin.2x).\partial x}{(cos.\,2x)^2}.$$

8. $$\partial\,arc.\left(tang. = \frac{2x}{1-x^2}\right) = \partial\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) : \left[1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2\right]$$
$$= \frac{2(1-x^2)+4x^2}{(1-x^2)^2+4x^2}\cdot\partial x = \frac{2(1+x^2)\,\partial x}{(1+x^2)^2}$$
$$= \frac{2\,\partial x}{1+x^2}.$$

§. 29. **Formeln der Integralrechnung.** Sind die Bezeichnungen dieselben wie in §. 28, so gelten folgende Regeln:

I. $\int a\,\psi(x)\,\partial x = a\int\psi(x)\,\partial x = a\,\varphi(x) + C,$

wobei C eine Constante bezeichnet.

II. $\int[\varphi(x)+\psi(x)]\,\partial x = \int\varphi(x)\,\partial x + \int\psi(x)\,\partial x.$

III. $$\int x^n\,\partial x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

IV. $$\int\frac{\partial x}{x} = Ln.\,x + C.$$

V. $$\int a^x\,\partial x = \frac{a^x}{Ln.\,a} + C.$$

V*. $\int e^x\,\partial x = e^x + C.$

VI. $\int x\,\partial y = xy - \int y\,\partial x$

(die sogenannte Reductionsformel).

Ferner ist

VII. $\int sin.\,x\,\partial x = -\,cos.\,x + C.$

VIII. $\int cos.\,x\,\partial x = sin.\,x + C.$

IX. $\int tang.\,x\,\partial x = -\,Ln.\,cos.\,x + C.$

X. $\int cotg.\,x\,\partial x = Ln.\,sin.\,x + C.$

XI. $$\int\frac{\partial x}{sin.\,x} = Ln.\,tang.\frac{x}{2} + C.$$

XI*. $$\int\frac{\partial x}{cos.\,x} = Ln.\,tang.\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$
$$= Ln.\,cotg.\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + C.$$

XII. $$\int\frac{\partial x}{sin.\,x^2} = -\,cotg.\,x + C$$

XIII. $\int \frac{\partial x}{\cos. x^2} = tang. x + C.$

XIV. $\int \sin. x^2 \partial x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin. 2x + C.$

XV. $\int \cos. x^2 \partial x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin. 2x + C.$

XVI. $\int tang. x^2 \partial x = tang. x - x + C.$

XVII. $\int cotg. x^2 \partial x = - cotg. x - x + C.$

XVIII. $\int \frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}} = arc. (\sin. = x)$
$= - arc. (\cos. = x) + C.$

XIX. $\int \frac{\partial x}{1 + x^2} = arc. (tang. = x)$
$= - arc. (cotg. = x) + C.$

XX. $\int \frac{\partial x}{\sqrt{x^2 - 1}} = Ln. (x + \sqrt{x^2 - 1}) + C.$

XXI. $\int \frac{\partial x}{\sqrt{1 + x^2}} = Ln. (x + \sqrt{1 + x^2}) + C.$

XXII. $\int \frac{\partial x}{1 - x^2} = \frac{1}{2} Ln. \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) + C.$

XXIII. $\int \frac{\partial x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} Ln. \left(\frac{x - 1}{x + 1}\right) + C.$

XXIV. $\int \sqrt{1 + x^2} \,.\, \partial x$
$= \frac{1}{2} [x \sqrt{1 + x^2} + Ln. (x + \sqrt{1 + x^2})] + C.$

XXV. $\int \sqrt{1 - x^2} \,.\, \partial x$
$= \frac{1}{2} [x \sqrt{1 - x^2} + arc. (\sin. = x)] + C.$

XXVI. $\int \sqrt{x^2 - 1} \,.\, \partial x$
$= \frac{1}{2} [x \sqrt{x^2 - 1} - Ln. (x + \sqrt{x^2 - 1})] + C.$

XXVII. $\int_c^{c_1} y \partial x = [y_0 + y_n + 4 (y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1})$
$+ 2 (y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})] \frac{c_1 - c}{3n};$

wo, wenn $y = \varphi(x)$ ist

$y_0 = \varphi(c),\ y_1 = \varphi\left(c + \frac{c_1 - c}{n}\right),\ y_2 = \varphi\left(c + \frac{2(c_1 - c)}{n}\right)$

$y_3 = \varphi\left(c + \frac{3(c_1 - c)}{n}\right), \ldots y_{n-1} = \varphi\left(c - \frac{n - 1}{n}(c_1 - c)\right),$

$y_n = \varphi(c_1)$

bezeichnet, und für n eine möglichst große gerade Zahl anzunehmen ist.

XXVIII. $\int_c^{c_1} y\partial x = [\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n]\frac{c_1 - c}{n}$
$$+\frac{tang.\alpha - tang.\alpha_n}{12}\left(\frac{c_1 - c}{n}\right)^2,$$

wo $tang.\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$, für $x = c$, sowie $tang.\alpha_1 = \frac{\partial y}{\partial x}$, für $x = c_1$, und für n eine beliebige große Zahl einzuführen ist.

XXIX. Ist $z = \int y\partial x = \int \psi(x).\partial x = \varphi(x) + C$, und für $x = c$, $z = \varkappa$, so hat man die Constante
$$C = \varkappa - \varphi(c).$$

Aus dem unbestimmten Integral
$$\int y\partial x = \int \psi(x)\partial x = \varphi(x),$$
folgt das bestimmte Integral

XXX. $\int_c^{c_1} y\partial x = \int_c^{c_1} \psi(x)\partial x = \varphi(c_1) - \varphi(c).$

XXXI. $\int_c^{c_1} y\partial x = -\int_{c_1}^{c} y\partial x = \int_c^a y\partial x + \int_a^{c_1} y\partial x.$

XXXII. $\int_{-c}^{c} y\partial x = \int_0^c y\partial x - \int_0^{-c} y\partial x$

Beispiele:

1. $\int(\sqrt{x^3} + 5x^2)\partial x = \int x^{3/2}\partial x + 5\int x^2\partial x = \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{5}{3}x^3$

2. $\int \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}}\partial x = \int 3x^{4/3}\partial x + \int 2x^{-2/3}\partial x$
$$= 3.\frac{3}{7}x^{7/3} + 2.3x^{1/3}$$
$$= 3\sqrt[3]{x}(\frac{3}{7}x^2 + 2).$$

3. $\int \frac{4x\partial x}{(2+3x^2)^3} = \frac{2}{3}\int(2+3x^2)^{-3}.6x\partial x$
$$= \frac{2}{3}\int u^{-3}\partial u = -\frac{2}{3}\frac{u^{-2}}{2} = -\frac{1}{3(2+3x^2)^2}.$$

4. $\int \frac{7x\partial x}{4+5x^2} = \frac{7}{10}\int\frac{10x\partial x}{4+5x^2} = \frac{7}{10}\int\frac{\partial u}{u}$
$$= \frac{7}{10}Ln.u = \frac{7}{10}Ln.(4+5x^2).$$

5. $\int x Ln.(3x+1)\partial x = \frac{1}{2}\int Ln.(3x+1)\partial(x^2)$
$$= \frac{1}{2}Ln.(3x+1).x^2 - \frac{1}{2}\int\frac{3x^2\partial x}{3x+1}$$
$$= \frac{x^2}{2}Ln.(3x+1) - \frac{1}{2}\left(\int x\partial x - \frac{1}{3}\int\partial x + \frac{1}{3}\int\frac{\partial x}{3x+1}\right)$$
$$= \frac{x^2}{2}Ln.(3x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{6} - \frac{1}{18}Ln.(3x+1)$$
$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{18}\right)Ln.(3x+1) + \frac{x}{6} - \frac{x^2}{4}.$$

6. $\int(\cos. x)^3 \partial x = \frac{1}{4}\int(3\cos. x + \cos. 3x)\partial x$
$$= \frac{3}{4}\int\cos. x\,\partial x + \frac{1}{12}\int\cos. 3x\,\partial(3x)$$
$$= \frac{3}{4}\sin. x + \frac{1}{12}\sin. 3x.$$

7. $$\int\frac{\partial x}{(\sin. x)^3} = \int\frac{1}{\sin. x}\cdot\frac{\partial x}{(\sin. x)^2} = -\int\frac{1}{\sin. x}\partial\,cotg. x$$
$$= -\frac{cotg. x}{\sin. x} + \int cotg. x\,\partial(\sin. x)^{-1}$$
$$= -\frac{\cos. x}{(\sin. x)^2} - \int\frac{cotg. x\,.\,\cos. x\,\partial x}{\sin. x^2}$$
$$= -\frac{\cos. x}{(\sin. x)^2} - \int\frac{1-\sin. x^2}{(\sin. x)^3}\partial x$$
$$= -\frac{\cos. x}{(\sin. x)^2} - \int\frac{\partial x}{(\sin. x)^3} + \int\frac{\partial x}{\sin. x}$$
$$= -\frac{\cos. x}{2(\sin. x)^2} + \frac{1}{2}\,Ln.\,tang.\frac{x}{2}.$$

8. $$\int\frac{\partial x}{1+x+x^2} = \int\frac{\partial x}{(\frac{1}{2}+x)^2+\frac{3}{4}}$$
$$= \frac{4}{3}\int\frac{\partial x}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{\partial\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{\partial u}{1+u^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,arc.\,(tang. = u)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\,arc.\left(tang. = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

9. $$\int_0^1\frac{\partial x}{1+x+x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,arc.\left(tang. = \frac{3}{\sqrt{3}}\right)$$
$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\,arc.\left(tang. = \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[arc.\,(tang. = \sqrt{3}) - arc.\left(tang. = \sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right]$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\,(arc.\,60^0 - arc.\,30^0) = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6} = 0{,}6046.$$

§. 30. Anwendung der Differenzial- und Integralrechnung.

I. Fällt für $x = a$,
$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{0}{0}$$
aus, so läßt sich für diesen Werth von x auch
$$y = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial\psi(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}$$
setzen, und fällt auch dieser Ausdruck $\frac{0}{0}$ aus, ist auch

$$y = \frac{\partial \varphi_1 (x)}{\partial \psi_1 (x)} = \frac{\varphi_2 (x)}{\psi_2 (x)}$$ zu setzen u. s. w.

II. Fällt für $x = a$,

$$y = \frac{\varphi (x)}{\psi (x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

aus, so setzt man $\frac{\infty}{\infty} = \frac{0}{0}$ und verfährt wie unter I.

III. Stellt sich für $x = a$,

$$y = \varphi (x) . \psi (x) = 0 . \infty$$

heraus, so setze man $\psi (x) = \frac{1}{\chi (x)}$, also

$$y = \frac{\varphi (x)}{\chi (x)},$$ und differenziire wie unter I.

IV. Wenn für $x = a$, die Function

$$y = f (x)^{\psi (x)}$$

eine der Formen 0^0, 1^∞, ∞^0 annimmt, so setze man $f (x) = e^{\varphi (x)}$, also

$$\varphi (x) = Ln. f (x),$$ so daß

$$y = e^{\varphi (x) . \psi (x)}$$

ausfällt und daher nur die Bestimmung des wahren Werthes von $\varphi (x) . \psi (x)$ nöthig ist.

Beispiel 1. Es fällt für $x = 0$,

$$y = \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} = \frac{0}{0}$$ aus, daher ist auch

$$y = \frac{\frac{1}{2} (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} 2 x}{2 x} = \frac{1}{2 \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{2 a}$$

zu setzen.

Beispiel 2. Für $x = \frac{1}{2} \pi$, ist

$$y = \frac{x \sin. x - \frac{1}{2} \pi}{\cos. x} = \frac{0}{0},$$ daher auch

$$y = \frac{x \cos. x + \sin. x}{- \sin. x} = \frac{\sin. \frac{\pi}{2}}{- \sin. \frac{\pi}{2}} = - 1.$$

V. Die abhängige variable Größe $y = f (x)$ wird für denjenigen Werth der Urvariablen x ein Maximum oder Minimum, welcher der Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f (x)}{\partial x} = f_1 (x) = \text{Null}$$ entspricht.

Fällt dann noch $\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial f \ (x)}{\partial x} = f_2 (x)$ negativ aus, so hat man es mit einem Maximo zu thun, ergiebt sich hingegen $f_2 (x)$ positiv, so ist der entsprechende eminente Functionswerth ein Minimum, und stellt sich $f_2 (x) = \text{Null}$ heraus, so ist derselbe weder ein Maximum noch ein Minimum, wofern $\frac{\partial f \ (x)}{\partial x} = f_3 (x)$ nicht $=$ Null ausfällt.

Unter gewissen Umständen giebt auch $f_1(x) =$ Unendlich, ein Maximum oder Minimum von $f(x)$.

Beispiel 1. Die Function $y = f(x) = x(a-x)^2$ hat die Differenzialverhältnisse oder sogenannten Ableitungen

$$f_1(x) = (a-x)^2 - 2x(a-x) = (a-x)(a-3x)$$

und

$$f_2(x) = -(a-3x) - 3(a-x) = -4a + 6x,$$

und es ist für $x = a$, $f_1(x) = 0$ und $f_2(x) = +2a$, folglich $f(x) = 0$, ein Minimum, dagegen

$$\text{für } x = \frac{a}{3},\ f_1(x) = 0, \text{ und } f_2(x) = -2a,$$

daher $f(x) = \dfrac{a}{3}\,(\tfrac{2}{3}a)^2 = \tfrac{4}{27}a^3$, ein Maximum.

Beispiel 2. Die erste Ableitung oder das erste Differenzialverhältniß von $y = f(x) = sin.\, x \, cos.\, 2x$ ist

$$f_1(x) = cos.\, 2x \, cos.\, x - 2\, sin.\, x \, sin.\, 2x$$
$$= cos.\, x\,(cos.\, x^2 - 5\, sin.\, x^2);$$

folglich ist $sin.\, x \, cos.\, 2x$ ein Maximum oder Minimum für

$$cos.\, x = 0, \text{ und für } cotg.\, x^2 = 5.$$

Im ersten Falle ist $sin.\, x = \pm 1$, daher

$$y = \pm 1 \,.\, (0 - 1) = \mp 1,$$

im zweiten Falle, $sin.\, x = \pm\sqrt{1/6}$ und $cos.\, x = \sqrt{5/6}$ daher

$$y = \pm\sqrt{1/6}\,(5/6 - 1/6) = \pm\tfrac{2}{3}\sqrt{1/6} = \pm\tfrac{1}{9}\sqrt{6}.$$

Beispiel 3. Bezeichnet x die Höhe und y den Halbmesser der Basis eines geraden Kegels, welcher von einer Kugel, deren Halbmesser $= r$ ist, umschlossen wird, so hat man:

$$y^2 = x(2r - x),$$

und daher den Inhalt dieses Kegels:

$$V = \frac{\pi x y^2}{3} = \frac{\pi x^2 (2r - x)}{3} = \frac{\pi}{3}(2rx^2 - x^3).$$

Setzt man $2rx^2 - x^3 = f(x)$, so hat man

$$f_1(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = 4rx - 3x^2 \text{ und}$$

$$f_2(x) = 4r - 6x.$$

Nun ist für $3x^2 = 4rx$, d. i. $x = \tfrac{4}{3}r$, $f_1(x) = 0$ und $f_2(x) = -4r$, also negativ; daher entspricht auch $x = \tfrac{4}{3}r$ das größte Kegelvolumen:

$$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{32}{9}r^3 - \frac{64}{27}r^3\right) = \frac{32}{81}\pi r^3 = \frac{8}{27}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$$

= acht Siebenzwanzigstel des ganzen Kugelvolumens.

Zweiter Theil.

Geometrie.

Erster Abschnitt.

Tafeln.

I. Maasstafeln.

A. Allgemeine Maaßtafel,

enthaltend die Maaße verschiedener Länder.

1. **Anhalt:** wie in Preußen.
2. **Baden:** 1 Fuß = 10 Zoll = 0,3 Meter.
   1 Elle = 2 Fuß. 1 Ruthe = 10 Fuß.
   1 Meile = 2 Wegstunden = 29629 Fuß
   = $\frac{6}{5}$ geographische Meile.
   1 Morgen = 400 Quadrat-Ruthen.
   1 Maaß = 1 Mäßlein = $1\frac{1}{2}$ Litre.
   1 Ohm = 100 Maaß = 400 Schoppen.
   1 Malter = 10 Sester = 100 Mäßlein.
3. **Baiern:** 1 Fuß = 12 Zoll = 129,38 par. Linien.
   1 Elle = $2\frac{41}{48}$ Fuß. 1 Ruthe = 10 Fuß.
   1 Morgen (Tagewerk) = 400 Quadrat-Ruthen.
   1 Maaß (Maaßkanne) = 0,043 Cubik-Fuß.
   1 Eimer = 60 Maaß = 240 Quartel.
   1 Metze = $84\frac{2}{3}$ Maaß.
   1 Scheffel = 6 Metzen = 12 Viertel = 48 Maaßel
   = 192 Dreißiger.
4. **Belgien:** wie in Frankreich.

5. Braunschweig: 1 Fuß = 12 Zoll = 126,5 par. Linien.
1 Elle = 2 Fuß. 1 Ruthe = 16 Fuß.
1 Lachter = 80 Zoll $8\frac{1}{2}$ Linien.
1 Feldmorgen = 120 Quadrat-Ruthen.
1 Waldmorgen = 160 Quadrat-Ruthen.
1 Quartier = $52\frac{4}{11}$ preuß. Cub.-Zoll.
1 Oxhoft = $1\frac{1}{2}$ Ohm = 6 Anker = 240 Quartier.
1 Himten = 2316 Cub.-Zoll.
1 Wispel = 40 Himt. = 160 Vierfaß = 640 Metzen.

6. Bremen: 1 Fuß = 12 Zoll = 128,2677 par. Linien.
1 Elle = 2 Fuß. 1 Ruthe = 16 Fuß.
1 Stübchen = 162,4 par. Cub.-Zoll.
1 Oxhoft = $1\frac{1}{2}$ Ohm = 6 Anker = 30 Viertel = $67\frac{1}{2}$ Stübchen = 270 Quart = 1080 Mengel.
1 Scheffel = 3735,754 par. Cub.-Zoll.
1 Last = 40 Scheffel = 160 Viertel = 640 Spint.

7. Dänemark: wie in Preußen.

8. England: 1 Yard = 3 Fuß = 36 Zoll = 405,3425 par. Linien.
1 Fathom = 2 Yards.
1 Ruthe (pearch, pole, rod) = $5\frac{1}{2}$ Yard.
1 Furlong = 40 Ruthen.
1 Meile = 8 Furlongs = 5280 Fuß = $\frac{2}{9}$ deutsche Meile.
1 Acker (acre) = 160 Quadrat-Ruthen.
1 Gallon = 277,2738 Cub.-Zoll.
1 Quarter = 8 Bushels = 32 Peaks = 64 Gallons = 256 Quarts = 512 Pints.
1 Bushel = 8 Gallons = 2218,19 Cub.-Zoll.
1 Last = 2 Tonnen = 10 Quarters = 80 Bushels.

9. Frankfurt a. M.: 1 Fuß (Schuh) = 12 Zoll = $126\frac{1}{6}$ par. Linien.
1 Elle = 242,62 par. Linien.
1 Feldruthe = $12\frac{1}{2}$ Fuß.
1 Waldruthe = 15,849 Fuß.
1 Morgen = 160 Quadrat-Ruthen.
1 Aichmaaß = 90,384 par. Cub.-Zoll.
1 Ohm = 20 Viert. = 80 Aichmaaß = 320 Schopp.
1 Gescheid = 1 altes oder Aichmaaß.
1 Malter = 4 Simmer = 16 Sechster = 64 Gescheid.

10. Frankreich: 1 alter Fuß = 12 Zoll = 144 Linien = 0,324839 Meter.
1 Toise = 6 alte Fuß.
1 Meter = 10 Decimeter = 100 Centimeter = 1000 Millimeter = 0,1 Decameter = 0,01 Hectometer = 0,001 Kilometer = 443,2959 par. Linien = 3,078444 alte par. Fuß.

1 neuer Fuß = $1/3$ Meter.
1 neue Toise = 2 Meter.
1 Meile (lieue) = 1 Myriameter = 10000 Meter.
1 Are = 100 Quadr.-Meter. 1 Hectare = 100 Ares.
1 Liter = 1 Cubik-Decimeter.
1 Hectoliter = 100 Litres.
1 Stere = 1 Cub.-Meter.

11. Hamburg: 1 Fuß = 3 Palmen = 12 Zoll = 126,9667 par. Linien.
1 Elle = 2 Fuß. 1 Klafter = 6 Fuß.
1 Marschruthe = 14 Fuß. 1 Geestruthe = 16 Fuß.
1 Morgen Marschland = 600 Quadr.-Marschruthen.
1 Scheffel Saatland = 200 Quadr.-Geestruthen.
1 Stübchen = 182,63 par. Cub.-Zoll.
1 Ohm = 4 Anker = 5 Eimer = 20 Viertel = 40 Stübchen = 80 Kannen = 160 Quart. = 320 Oeßel.
1 Faß = 2770,742 par. Cub.-Zoll.
1 Wispel = 10 Scheffel = 20 Faß = 40 Himten = 160 Spint.

12. Hannover: 1 Fuß = 12 Zoll = $11\frac{1}{2}$ engl. Zoll = 129,4844 par. Linien.
1 Elle = 2 Fuß. 1 Ruthe = 16 Fuß.
1 Lachter = $851\frac{1}{4}$ par. Linien.
1 Meile = $1587\frac{1}{2}$ Ruthen.
1 Morgen = 120 Quadrat-Ruthen.
1 Stübchen = 270 Cub.-Zoll.
1 Ohm = 4 Anker = 40 Stübchen = 80 Kannen = 160 Quartier = 320 Nößel.
1 Himten = $1\frac{1}{4}$ Cub.-Fuß.
1 Last = 16 Malter = 96 Himten = 384 Metzen.

13. Hessen, Großherzogthum: 1 Fuß = 10 Zoll = $1/4$ Meter.
1 Elle = 24 Zoll. 1 Klafter = 10 Fuß.
1 Meile = 3000 Klafter. 1 Stunde = 2000 Klafter.
1 Morgen = 4 Viertel = 400 Quadratklafter.
1 Maaß = 1 Gescheid = 2 Liter.
1 Ohm = 4 Viertel = 80 Maaß = 320 Schoppen.
1 Simmer = 2048 Cub.-Zoll.
1 Malter = 4 Simmer = 16 Kumpf = 64 Gescheid = 256 Mäßchen.

14. Hessen, Kurfürstenthum: 1 Fuß = 12 Zoll = 11 preuß. Zoll = 127,5358 par. Linien.
1 althessischer Fuß = $1/26000$ geographische Meile = 0,28492 Meter.
1 Elle = 0,5704 Meter.
1 Ruthe = 14 alte hessische Fuß = 3,9889 Meter.
1 Acker = 150 Quadrat-Ruthen.
1 Maaß = 1,9495 Liter. 1 neue Maaß = 144 C.-Z.
1 Ohm = 20 Viertel = 80 Maaß = 320 Schoppen.

1 Viertel = 160,48 Liter.
1 Viertel = 16 Metzen = 64 Becher = 8103,214 paris. Cub.-Zoll = 6,75 kurhes. Cub.-Fuß.

15. Holstein: wie Hamburg.

16. Lippe-Detmold: 1 Fuß = 12 Zoll = 128,84 par. Linien.
1 Ruthe = 16 Fuß.
1 Morg. = $1\frac{1}{2}$ Scheffelaussaat = 120 Quadr.-Ruth.
1 Kanne = 98 Cub.-Zoll.
1 Orhoft = $1\frac{1}{2}$ Ohm = 6 Anker = 30 Viertel = 162 Kannen.
1 Scheffel = 3154 Cub.-Zoll.
1 Scheffel = 6 große = 8 kleine Metzen = 24 Mahlmetzen.

17. Lippe-Schaumburg: 1 Fuß = 12 Zoll = 128,6 par. L.
1 Elle = 2 Fuß. 1 Lachter = 7 Fuß.
1 Ruthe = 16 Fuß.
1 Morgen = 120 Quadrat-Ruthen.
1 Maaß = $\frac{1}{20}$ Cub.-Fuß.
1 Orhoft = 6 Anker = 168 Maaß = 672 Ort.
1 Himten = 2333,522 Cub.-Zoll.
1 Fuder = 12 Malter = 72 Himten = 288 Metzen.

18. Lombardei: wie in Frankreich.

19. Lübeck: 1 Fuß = 12 Zoll = 127,5 par. Linien.
1 Elle = $255\frac{1}{4}$ par. Linien. 1 Ruthe = 16 Fuß.
1 Quartier = 45,844 par. Cub.-Zoll.
1 Ohm = 20 Viertel = 40 Stübchen = 80 Kannen = 160 Quartier = 320 Planken = 640 Ort.
1 Scheffel = 1749 par. Cub.-Zoll.
1 Last = 8 Drömt = 24 Tonnen = 96 Scheffel = 384 Faß.

20. Mecklenburg-Schwerin: 1 Fuß = 12 Zoll = 1 Lübecker Fuß = 129 par. Linien.
1 Ruthe = 16 Fuß.
1 Pott oder Quartier = $45\frac{5}{8}$ par. Cub.-Zoll.
1 Ohm = 4 Anker = 5 Eimer = 20 Viertel = 40 Stübchen = 80 Kannen = 160 Pott.
1 Scheffel = 1960,5 par. Cub.-Zoll.
1 Last = 8 Drömt = 96 Scheffel = 384 Faß = 1536 Metzen oder Spint.

21. Mecklenburg-Strelitz: die Längenmaaße wie in Schwerin.
1 Pott = $45\frac{5}{8}$ par. Cub.-Zoll.
1 Orhoft = $1\frac{1}{2}$ Ohm = 6 Anker = 240 Pott = 960 Pegel.
1 Scheffel = 1 preuß. Scheffel.
1 Last = 4 Wispel = 8 Drömt = 100 Scheffel = 1600 Metzen.

22. Nassau: 1 Fuß Feldmaaß = 10 Zoll = $\frac{1}{2}$ Meter.
1 Werkfuß = 12 Zoll = 0,3 Meter.
1 Ruthe = 10 Fuß.

1 Morgen = 100 Quadrat-Ruthen.
1 Maaß = 2 Liter.
1 Ohm = 80 Maaß = 320 Schoppen.
1 Malter = 4 Viertel = 100 Liter.
1 Klafter = 144 Cubikwerkfuß.

23. Niederlande: wie in Frankreich.

24. Norwegen: 1 Fuß = 12 Zoll = 139,0808 par. Linien, im Uebrigen wie in Dänemark.

25. Oesterreich: 1 Fuß = 12 Zoll = 140,13 par. Linien.
1 Elle = 2,465 Fuß. 1 Klafter = 6 Fuß.
1 Meile = 24000 Fuß.
1 Joch = 1600 Quadrat-Klafter.
1 Maaß = 0,0448 Cub.-Fuß. = 71,335 par. Cub.-Z.
1 Eimer = 40 Maaß = 160 Seidel = 320 Pfiff.
1 Metze = 1,9471 Cub.-F. = 3100 $\frac{1}{3}$ par. Cub.-Z.
1 Muth = 30 Metzen = 480 Maaßel = 1920 Futtermaaßel = 3840 Becher.

26. Oldenburg: 1 Fuß = 12 Zoll = 131,162 par. Linien.
1 Ruthe = 18 oder = 20 Fuß.
1 Morg. = 356 Quadrat-Ruth. à 400 Quadrat-Fuß.
1 Kanne 74 par. Cub.-Zoll.
1 Oxhoft = 1 $\frac{1}{2}$ Ohm = 6 Anker = 156 Kannen = 240 Quartier.
1 Scheffel = 1149,54 par. Cub.-Zoll.
1 Last = 12 Molt = 18 Tonnen = 144 Scheffel.

27. Preußen: 1 Fuß = 12 Zoll = 139,13 par. Linien.
1 Elle = 25 $\frac{1}{2}$ Zoll. 1 Lachter = 80 Zoll.
1 Ruthe = 12 Fuß.
1 Meile = 24000 Fuß.
1 Morgen = 180 Quadrat-Ruthen.
1 Quart = 64 Cub.-Zoll.
1 Oxhoft = 1 $\frac{1}{2}$ Ohm = 3 Eimer = 6 Anker = 180 Quart.
1 Scheffel = 3072 Cub.-Zoll = $\frac{16}{9}$ Cub.-Fuß.
1 Tonne = 4 Scheffel = 64 Metzen = 192 Quart.
1 Klafter = 6 . 6 . 3 = 108 Cub.-Fuß.
1 Schachtruthe = 12 . 12 . 1 = 144 Cub.-Fuß.

28. Rußland: 1 Fuß = 1 engl. Fuß = 135,114 par. Linien.
1 Arschine = 28 engl. Zoll. 1 Werst = 3500 Fuß.
1 Tschetwert = $\frac{1}{4}$ Arschine = 4 Werschock.
1 Faden (Sashen) = 3 Arschinen = 7 Fuß = 48 Werschock = 84 Zoll = 1008 Linien.
1 Dessätine = 2400 Quadr.-Faden.
1 Wedro = 620,019 par. = 750,568 ruff. Cub.-Zoll. = 10 Kruschki oder Stoof.
1 Tschetwerik = 1322,71 par. = 1601,212 ruff. C.-Z.
1 Tschetwert = 2 Osmin = 4 Pajok = 8 Tschetwerik = 32 Tschetwerka = 64 Garnez.

29. Sachsen, Königreich: 1 Fuß = 12 Zoll = 0,28319 Meter = 125,537 par. Linien.

1 Elle = 2 Fuß. 1 Lachter = 2 Meter.
1 Ruthe = 15⅙ Fuß. 1 Meile = 32000 Fuß.
1 Acker = 300 Quadrat-Ruthen.
1 Kanne = 71,186 sächs. Cub.-Zoll = 1,8683 Pfund destillirtes Wasser bei 15° R.
1 Eimer = 72 Kannen.
1 Scheffel = 7900 Cub.-Zoll, den Fuß = 125,5 par. Linien genommen.
1 Wispel = 2 Malter = 24 Scheffel = 96 Viertel = 384 Metzen = 1536 Mäßchen.

30. Sachsen-Weimar: 1 Fuß = 12 Zoll = 125 par. Linien.
1 Elle = 2 Fuß. 1 Ruthe = 16 Fuß.
1 Acker = 140 Quadrat-Ruthen.
1 Eimer = 72 Kannen = $3695^5/_{21}$ par. Cub.-Zoll.
1 Scheffel = 3880 par. Cub.-Zoll.
1 Scheffel = 4 Viertel = 16 Metzen = 74 Maaß = 148 Nößel.

31. Schleswig: wie Hamburg.

32. Schweden: 1 Fuß = 131,615 par. Linien.
1 Faden (Famn) = 3 Ellen (Alnar) = 6 Fuß (Fot) = 72 Zoll (Verktum). 1 Ruthe = 16 Fuß.
1 Meile = 6000 Famnar.
1 Tonne Land oder Tonnstelle = 56000 Quadrat-Fuß.
1 Kanne = 100 schwed. Cub.-Decimalzoll.
1 Ohm (Åm) = 4 Anker = 60 Kannen = 120 Stop.
1 Tonne = 7388,58 par. Cub.-Zoll = 56 Kannen.
1 Tonne = 2 Span = 32 Kappen = 56 Kannen = 112 Stop.

33. Schweiz: das Längenmaaß wie in Baden.
1 Juchart = 400 Quadrat-Ruthen.
1 Maaß (Pot) = 1½ Liter.
1 Viertel (Quateron) = 15 Liter.
1 Malter = 10 Viertel = 100 Immi.

34. Würtemberg: 1 Fuß (Schuh) = 10 Zoll = 127 par. Lin.
1 Elle = 2,144 Fuß. 1 Ruthe = 10 Fuß.
1 Morgen = 384 Quadrat-Ruthen.
1 Helleichmaaß = 78⅛ Cub.-Zoll.
1 Fuder = 6 Eimer = 96 Immi = 960 Maaß = 3840 Schoppen.
1 Simri = 942⅛ Cub.-Zoll.
1 Scheffel = 8 Simri = 32 Vierling = 128 Mäßlein = 256 Ecklein = 1024 Viertelein.

B. Vergleichungstabellen,

enthaltend eine Vergleichung von 12 bis 13 verschiedenen Landesmaaßen unter einander.

Einrichtung und Gebrauch der Maass-Vergleichungstabellen. Die ersten drei der folgenden Tabellen enthalten eine vollständige Vergleichung der Fuße, Quadratfuße und Cubikfuße von 12 verschiedenen Ländern. Sie sind so eingerichtet, daß alle Zahlen einer Horizontalcolumne die Größe eines und desselben Fußes, Quadrat-Fußes u. s. w. in Fußen, Quadrat-Fußen u. s. w. anderer Länder ausdrücken. Will man nun den Fuß irgend eines Landes mit dem Fuße eines andern Landes vergleichen, so sucht man in der obern Horizontalcolumne den Namen des ersten Landes auf, geht von da vertical bis zur Stelle, wo 1 steht, herab und nun von da horizontal nach rechts oder links bis in die Verticalcolumne, welche mit dem Namen des zweiten Landes anfängt. Hiernach ist z. B. 1 engl. Fuß = 0,93829 par. Fuß, ferner 1 österr. Quadr.-Fuß = 1,01444 preuß. Quadrat-Fuß, endlich 1 baiersch. Cub.-Fuß = 0,024861 Cubik-Meter. Um die Zurückführung einer Größe von einem Landesmaaße auf ein anderes noch zu erleichtern, sind unter die Vergleichungszahlen auch noch ihre Logarithmen gesetzt, weßhalb die ganze Reduction durch einfaches Addiren zu bewirken ist, wie folgende Beispiele vor die Augen führen.

Beispiel 1. Wie viel preuß. Fuß (x) sind 2,943 engl. Fuß?

1 engl. Fuß = 0,97114 preuß. Fuß, folglich

2,943 » » = 2,943 . 0,97114 = 2,8581 preuß. Fuß,

logarithmisch: $log.$ 0,97114 = 9,98728

und $log.$ 2,943 = 0,46879

$x = num.$ 0,45607 = 2,8581.

Beispiel 2. Wie viel braunschweiger Cubik-Fuß (x) gehen auf 0,9354 Cubik-Meter?

1 Cubik-Meter = 43,0338 braunschweiger Cubik-Fuß.

logarithm. = 1,63381

$log.$ 0,9354 = 9,97100

$x = num.$ 1,60481 = 40,254 Cubik-Fuß.

Die übrigen Tabellen Nr. 4, 5 u. s. w. bis 10 enthalten eine Vergleichung der preuß. Feld-, Hohl- und Meilenmaaße mit denen anderer Länder. Die Einrichtung und der Gebrauch dieser Tafeln sind ohne besondere Anleitung verständlich. Hiernach ist z. B. 1 preuß. Ruthe = 1,29043 baiersch. Ruthe, und umgekehrt, 1 sächs. Ruthe = 1,14041 preuß. Ruthe. Ebenso 1 preuß. Scheffel = 1,5121 engl. Bushels, und umgekehrt 1 österr. Maaß = 1,23589 preuß. Quart. Die untergesetzten Logarithmen erleichtern die Reductionen dieser Maaße wesentlich, indem sie nur eine einfache Addition nöthig machen.

Beispiel 1. Wie viel russische Cubikfaden (x) gehen auf 3,615 preuß. Cubik-Ruthen? 1 preuß. Cubik-Ruthe = 5,50059 Cubik-Faden.

logarithm. = 0,74041
log. 3,615 = 0,55811
x = *num.* 1,29852 = 19,885 Cubik-Faden.

Beispiel 2. Wie viel preuß. Meilen (x) gehen auf 16,35 geographische Meilen?

1 geographische Meile = 0,98509.
logarithm. = 9,99347
log. 16,35 = 1,21352
x = *num.* 1,20699 = 16,106 preuß. Meilen.

Beispiel 3. Wie viel Quadrat-Toisen (x) gehen auf eine würtembergische Quadrat-Ruthe?

---

1. Fußtabelle.

Preußischer Fuß.	Oesterreichscher Fuß.	Baierscher Fuß.	Sächsischer Fuß.	Hannoverscher Fuß.	Würtembergscher Fuß.
1	0,99286 9,99689	1,07536 0,03155	1,10828 0,04465	1,07449 0,03120	1,09551 0,03962
1,00719 0,00311	1	1,08309 0,03467	1,11625 0,04776	1,08222 0,03432	1,10339 0,04273
0,92992 9,96845	0,92328 9,96533	1	1,03061 0,01310	0,99919 9,99965	1,01874 0,00806
0,90230 9,95535	0,89586 9,95224	0,97030 9,98690	1	0,96951 9,98655	0,98848 9,99497
0,93067 9,96880	0,92403 9,96569	1,00081 0,00035	1,03144 0,01345	1	1,01956 0,00841
0,91282 9,96038	0,90630 9,95727	0,98160 9,99194	1,01165 0,00503	0,98081 9,99159	1
0,90922 9,95867	0,90273 9,95556	0,97774 9,99022	1,00767 0,00332	0,97695 9,98987	0,99606 9,99829
0,91667 9,96221	0,91012 9,95910	0,98575 9,99377	1,01592 0,00686	0,98495 9,99341	1,00422 0,00183
0,95586 9,98039	0,94903 9,97728	1,02789 0,01195	1,05936 0,02504	1,02706 0,01160	1,04716 0,02001
0,97114 9,98728	0,96420 9,98417	1,04432 0,01883	1,07629 0,03193	1,04348 0,01848	1,06389 0,02690
1,03500 0,01494	1,02761 0 01183	1,11300 0,04650	1,14707 0,05959	1,11210 0,04615	1,13386 0,05456
3,18620 0,50327	3,16345 0,50016	3,42631 0,53483	3,53120 0,54792	3,42355 0,53448	3,49052 0,54289

1 würtemb. Quadr.=Ruthe = 0,57863 preuß. Quadr.=Ruthe.
1 preuß. Quadrat=Ruthe = 3,73402 Quadrat=Toise,
folglich 1 würtemb. Quadrat=Ruthe = 0,57863 . 3,73402

logarithm. 9,76240
0,57218

x = *num.* 0,33458 = 2,1606 Quadrat=Toisen.

Beispiel 4. Wie viel badensche Maaß (x) gehen auf 11,6 bair. Kannen?

1 bair. Kanne = 0,93362 preuß. Quart,
1 preuß. Quart = 0,76335 badensche Maaß,
folglich 11,6 bair. Kannen = 11,6 . 0,93362 . 0,76335

logarithm. 9,97017
» 9,88273
log. 11,6 = 1,06446

x = *num.* 0,91736 = 8,2672 badensche Maaß.

---

1. Fußtabelle.

Braunschweiger Fuß.	Kurhessischer Fuß.	Badenscher und Schweizer Fuß.	Englischer und Russischer Fuß.	Pariser Fuß.	Meter.
1,09984 0,04133	1,09091 0,03779	1,04618 0,01961	1,02972 0,01272	0,96618 9,98506	0,31385 9,49673
1,10775 0,04444	1,09876 0,04090	1,05370 0,02272	1,03713 0,01583	0,97313 9,98817	0,31611 9,49984
1,02277 0,00978	1,01446 0,00623	0,97286 9,98805	0,95756 9,98117	0,89847 9,95350	0,29186 9,46517
0,99239 9,99668	0,98433 9,99314	0,94397 9,97496	0,92912 9,96807	0,87178 9,94041	0,28319 9,45208
1,02359 0,01013	1,01528 0,00659	0,97365 9,98840	0,95833 9,98152	0,89920 9,95386	0,29209 9,46552
1,00395 0,00171	0,99580 9,99817	0,95497 9,97999	0,93995 9,97310	0,88194 9,94544	0,28649 9,45711
1	0,99188 9,99646	0,95121 9,97828	0,93625 9,97139	0,87847 9,94373	0,28536 9,45540
1,00819 0,00354	1	0,95900 9,98182	0,94391 9,97493	0,88567 9,94727	0,28770 9,45894
1,05130 0,02172	1,04276 0,01818	1	0,98427 9,99311	0,92353 9,96545	0,30000 9,47712
1,06810 0,02861	1,05942 0,02507	1,01598 0,00689	1	0,93829 9,97234	0,30479 9,48401
1,13834 0,05627	1,12909 0,05273	1,08280 0,03455	1,06577 0,02766	1	0,32484 9,51167
3,50432 0,54460	3,47585 0,54106	3,33333 0,52288	3,28090 0,51599	3,07844 0,48833	1

2. Quadratfußtabelle.

Preußischer Quadrat-Fuß.	Oesterreichscher Quadrat-Fuß.	Baierscher Quadrat-Fuß.	Sächsischer Quadrat-Fuß.	Hannoverscher Quadrat-Fuß.	Würtembergscher Quadrat-Fuß.
1	0,98577 9,99378	1,15640 0,06311	1,22828 0,08930	1,15453 0,06241	1,20015 0,07923
1,01444 0,00623	1	1,17309 0,06933	1,24601 0,09552	1,17120 0,06863	1,21747 0,08546
0,86475 9,93689	0,85245 9,93067	1	1,06216 0,02619	0,99839 9,99930	1,03783 0,01613
0,81415 9,91070	0,80256 9,90448	0,94148 9,97381	1	0,93996 9,97311	0,97709 9,98994
0,86615 9,93759	0,85382 9,93137	1,00162 0,00070	1,06388 0,02689	1	1,03951 0,01683
0,83323 9,92077	0,82137 9,91454	0,96355 9,98387	1,02344 0,01006	0,96199 9,98317	1
0,82668 9,91734	0,81492 9,91111	0,95598 9,98045	1,01540 0,00664	0,95443 9,97975	0,99214 9,99657
0,84028 9,92442	0,82832 9,91820	0,97170 9,98753	1,03210 0,01372	0,97013 9,98683	1,00846 0,00366
0,91367 9,96079	0,90067 9,95456	1,05656 0,02390	1,12224 0,05009	1,05486 0,02320	1,09654 0,04002
0,94311 9,97456	0,92968 9,96834	1,09061 0,03767	1,15840 0,06386	1,08885 0,03697	1,13186 0,05379
1,07123 0,02988	1,05599 0,02366	1,23877 0,09299	1,31578 0,11918	1,23677 0,09229	1,28564 0,10912
10,15187 1,00655	10,00739 1,00032	11,73960 1,06965	12,46936 1,09584	11,72067 1,06895	12,18372 1,08578

3. Cubikfußtabelle.

Cub.-Fuß	Cub.-Fuß	Cub.-Fuß	Cub.-Fuß	Cub.-Fuß	Cub.-Fuß
1	0,97873 9,99066	1,24354 0,09466	1,36128 0,13395	1,24054 0,09361	1,31477 0,11885
1,02173 0,00934	1	1,27057 0,10400	1,39086 0,14328	1,26750 0,10295	1,34335 0,12819
0,80415 9,90534	0,78705 9,89600	1	1,09468 0,03929	0,99758 9,99895	1,05728 0,02419
0,73460 9 86605	0,71898 9,85672	0,91351 9,96071	1	0,91130 9,95966	0,96584 9,98490
0,80610 9,90639	0,78896 9,89705	1,00242 0,00105	1,09733 0,04034	1	1,05984 0,02524

2. Quadratfußtabelle.

Braun-schweiger Quadrat-Fuß.	Kurhes-sischer Quadrat-Fuß.	Baden-scher Quadrat-Fuß.	Engli-scher Quadrat-Fuß.	Pariser Quadrat-Fuß.	Quadrat-Meter.
1,20965 0,08266	1,19008 0,07558	1,09449 0,03921	1,06033 0,02544	0,93850 9,97012	0,09850 8,99345
1,22712 0,08889	1,20726 0,08180	1,11029 0,04544	1,07564 0,03166	0,94698 9,97634	0,09993 8,99968
1,04605 0,01955	1,02913 0,01247	0,94646 9,97610	0,91692 9,96233	0,80725 9,90701	0,08518 8,93035
0,98483 9,99336	0,96890 9,98628	0,89107 9,94991	0,86326 9,93614	0,76001 9,88082	0,08020 8,90416
1,04774 0,02025	1,03079 0,01317	0,94799 9,97680	0,91840 9,96303	0,80856 9,90771	0,08532 8,93105
1,00792 0,00343	0,99161 9,99634	0,91196 9,95998	0,88350 9,94621	0,77783 9,89088	0,08208 8,91422
1	0,98382 9,99292	0,90480 9,95655	0,87656 9,94278	0,77171 9,88746	0,08143 8,91079
1 01644 0,00708	1	0,91968 9,96363	0,89097 9,94986	0,78440 9,89454	0,08277 8,91788
1,10522 0,04345	1,08734 0,03637	1	0,96879 9,98623	0,85291 9,93091	0,09000 8,95424
1,14083 0,05722	1,12237 0,05014	1,03222 0,01377	1	0,88039 9,94468	0,09290 8,96801
1,29582 0,11254	1,27485 0,10546	1,17245 0,06910	1,13586 0,05532	1	0,10552 9,02334
12,28023 1,08921	12,08156 1,08212	11,11111 1,04576	10,76430 1,03199	9,47682 0,97666	1

3. Cubikfußtabelle.

Cub.-Fuß	Cub.-Fuß	Cub.-Fuß	Cub.-Fuß	Cub.-Fuß	Cub.-Met.
1,33043 0,12399	1,29827 0,11337	1,14503 0,05882	1,09184 0,03816	0,90193 9,95517	0,03092 8,49018
1,35934 0,13338	1,32649 0,12270	1,16992 0,06815	1,11557 0,04750	0,92154 9,96451	0,03159 8,49952
1,06987 0,02933	1,04401 0,01870	0,92078 9,96416	0,87801 9,94350	0,72529 9,86051	0,02486 8,39552
0,97734 9,99004	0,95371 9,97942	0,84114 9,92487	0,80207 9,90421	0,66256 9,82123	0,02271 8,35623
1,07246 0,03038	1,04654 0,01976	0,92301 9,96521	0,88014 9,94455	0,72705 9,86156	0,02492 8,39657

3. Cubikfußtabelle.

Preußischer Cub.-Fuß	Oesterreichscher Cub.-Fuß	Baierscher Cub.-Fuß	Sächsischer Cub.-Fuß.	Hannoverscher Cub.-Fuß.	Würtembergscher Cub.-Fuß.
0,76059 9,88115	0,74441 9,87181	0,94582 9,97581	1,03537 0,01510	0,94354 9,97476	1
0,75164 9,87601	0,73565 9,86667	0,93470 9,97067	1,02319 0,00996	0,93244 9,96962	0,98824 9,99486
0,77025 9,88663	0,75387 9,87730	0,95785 9,98130	1,04853 0,02058	0,95553 9,98024	1,01271 0,00549
0,87334 9,94118	0,85476 9,93185	1,08603 0,03584	1,18886 0,07513	1,08341 0,03479	1,14824 0,06003
0,91588 9,96184	0,89640 9,95250	1,13894 0,05650	1,24677 0,09579	1,13619 0,05545	1,20418 0,08069
1,10873 0,04483	1,08515 0,03549	1,37875 0,13949	1,50929 0,17877	1,37542 0,13844	1,45773 0,16368
32,34587 1,50982	31,65785 1,50048	40,22350 1,60448	44,03176 1,64377	40,12627 1,60343	42,52752 1,62867

4. Ruthentabelle.

Oesterreich. oder Wiener Klafter à 6 Fuß.	Baiersche Ruthe à 10 Fuß.	Sächsische Ruthe à 15 1/6 F.	Hannoversche Ruthe à 16 Fuß.	Würtembergsche Ruthe à 10 Fuß.	Braunschweiger Ruthe à 16 Fuß.
a. Die preuß. Ruthe, à 12 Fuß, in Ruthen,					
1,98572 0,29792	1,29043 0,11073	0,87688 9,94294	0,80587 9,90626	1,31461 0,11880	0,82488 9,91639
b. Die Ruthen, Klafter u. s. w. anderer					
0,50360 9,70208	0,77493 9,88927	1,14041 0,05706	1,24090 0,09374	0,76068 9,88120	1,21230 0,08361

5. Quadratruthentabelle.

Oesterreichsche Quadrat-Klafter.	Baiersche Quadrat-Ruthe.	Sächsische Quadrat-Ruthe.	Hannoversche Quadrat-Ruthe.	Würtembergsche Quadrat-Ruthe.	Braunschweiger Quadrat-Ruthe.
a. Die preuß. Quadrat-Ruthe in					
3,94307 0,59583	1,66521 0,22147	0,76892 9,88588	0,64943 9,81253	1,72821 0,23760	0,68043 9,83278
b. Die Quadrat-Ruthen anderer					
0,25361 9,40417	0,60052 9,77853	1,30053 0,11412	1,53982 0,18747	0,57863 9,76240	1,46967 0,16722

3. Cubikfußtabelle.

Braunschweiger Cub.-F.	Kurhessischer Cub.-F.	Badenscher Cub.-F.	Englischer Cub.-F.	Pariser Cub.-F.	Cubik-Meter.
1,01191 0,00514	0,98745 9,99451	0,87090 9,93997	0,83044 9,91931	0,68600 9,83632	0,02351 8,37133
1	0,97583 9,98937	0,86065 9,93483	0,82067 9,91417	0,67793 9,83118	0,02324 8,36619
1,02477 0,01063	1	0,88197 9,94545	0,84100 9,92479	0,69472 9,84181	0,02381 8,37682
1,16191 0,06517	1,13383 0,05455	1	0,95355 9,97934	0,78769 9,89636	0,02700 8,43136
1,21852 0,08583	1,18907 0,07521	1,04872 0,02066	1	0,82607 9,91702	0,02832 8,45202
1,47508 0,16882	1,43943 0,15819	1,26953 0,10364	1,21056 0,08298	1	0,03428 8,53501
43,03380 1,63331	41,99374 1,62318	37,03704 1,56864	35,31658 1,54798	29,17385 1,46499	1

4. Ruthentabelle.

Kurhess. Ruthe à 10 Fuß.	Badensche und Schweizer Ruthe à 10 Fuß.	Englische Ruthe (Pole) à $16^1/_2$ F.	Russischer Faden (Sashen) à 7 Fuß.	Alte französische Toise à 6 Fuß.	Decameter à 10 Met.
Klafter u. s. w. anderer Länder.					
0,94417 9,97505	1,25541 0,09879	0,74889 9,87442	1,76524 0,24680	1,93236 0,28609	0,37662 9,57591
Länder in preußische Ruthen.					
1,05913 0,02495	0,79655 9,90121	1,33531 0,12558	0,56650 9,75320	0,51750 9,71391	2,65517 0,42409

5. Quadratruthentabelle.

Kurhess. Q.-Ruth.	Badensche und Schweizer Q.-Ruth.	Englische Q.-Ruth.	Russischer Q.-Faden.	Quadrat-Toise.	Quadrat-Decamet.
Quadrat-Ruthen anderer Länder.					
0,89146 9,95010	1,57607 0,19757	0,56088 9,74883	3,11606 0,49361	3,73402 0,57218	0,14185 9,15182
Länder in preußische Quadrat-Ruthen.					
1,12176 0,04990	0,63449 9,80243	1,78306 0,25117	0,32092 9,50639	0,26781 9,42782	7,04991 0,84818

6. Cubikruthentabelle.

Oesterreichsche Cubik-Klafter.	Baiersche Cubik-Ruthe.	Sächsische Cubik-Ruthe.	Hannoversche Cub.-R.	Würtembergsche Cub.-R.	Braunschweiger Cub.-R.
a. Die preußische Cubik-Ruthe in					
7,82983	2,14884	0,67425	0,52335	2,27193	0,56127
0,89375	0,33220	9,82882	9,71879	0,35639	9,74917
b. Die Cubik-Ruthen anderer Länder					
0,12772	0,46537	1,48313	1,91076	0,44015	1,78166
9,10625	9,66780	0,17118	0,28121	9,64361	0,25083

7. Feldmaaßtabellen.

Oester. o. Wiener Joch à 1600 □ Klaft.	Baiersch. Tagewerk à 400 □ Ruth.	Sächsisch. Acker à 300 □ Ruth.	Hannoverscher Morgen à 120 □ R.	Würtembergscher Morgen à 384 □ R.	Braunschweiger Feldmorgen à 120 □ R.
a. Der preußische Morgen, zu 180 □ Ruthen,					
0,44360	0,74935	0,46135	0,97414	0,81010	1,02064
9,64699	9,87468	9,66403	9,98862	9,90854	0,00887
b. Die Morgen, Acker u. s. w. anderer					
2,25430	1,33450	2,16755	1,02655	1,23442	0,97977
0,35301	0,12532	0,33597	0,01138	0,09146	9,99113

8. Flüssigkeitsmaaßtabellen.

Oesterreichsche Maaß =0,0448 C.-Fuß.	Baiersche Maaßkanne = 0,043 C.-Fuß.	Sächsisch-Dresden. Kanne =47,165 par. C.-Z.	Hannoversches Stübchen = 270 Cub.-Zoll.	Würtembergsches Hellaichmaaß = $78\frac{1}{8}$ C.-Z.	Braunschweiger Quartier = $52\frac{4}{11}$ prß. C.-Z.
a. Die preuß. Quart, zu 64 Cub.-Zoll, (57,724 paris.					
0,80913	1,07110	1,22387	0,29405	0,62330	1,22222
9,90802	0,02983	0,08774	9,46843	9,79470	0,08715
b. Maaße, Kannen u. s. w. anderer					
1,23589	0,93362	0,81708	3,40074	1,60436	0,81818
0,09198	9,97017	9,91226	0,53157	0,20530	9,91285

9. Getreidemaaßtabellen.

Oesterr. od. Wien. Metze =1,9471 C.-Fuß.	Baierscher Scheffel = 208 Maaßkannen.	Sächsisch-Dresden. Scheffel = 7900 C.-Zoll.	Hannoverscher Himten = 1,25 Cub.-Fuß.	Würtembergscher Scheffel = 7537 C.-Zoll.	Braunschweiger Himten = 2316 C.-Zoll.
a. Der preuß. Scheffel, zu 3072 Cub.-Zoll					
0,89362	0,24718	0,52935	1,76432	0,31012	1,76471
9,95115	9,39301	9,72374	0,24658	9,49153	0,24667
b. Scheffel, Metzen u. s. w. anderer					
1,11905	4,04570	1,88912	0,56679	3,22456	0,56667
0,04885	0,60699	0,27626	9,75342	0,50847	9,75333

6. Cubikruthentabelle.

Kurhess. Cubik-Ruthe.	Badensche und Schweizer Cub.-R.	Englische Cubik-Ruthe.	Russischer Cubik-Faden.	Cubik-Toise.	Cubik-Decamet.
Cubik-Ruthen anderer Länder.					
0,84169 9,92515	1,97861 0,29636	0,42000 9,62325	5,50059 0,74041	7,21547 0,85826	0,053423 8,72772
in preuß. Cubik-Ruthen.					
1,18809 0,07485	0,50540 9,70364	2,38094 0,37675	0,18180 9,25959	0,13859 9,14174	18,71868 1,27228

7. Feldmaaßtabellen.

Kurhess. Acker à 150 □ Ruth.	Hessen-Darmst. Morgen à 400 □ Klaft.	Badensch. Morgen à 400 □ Ruth.	Englische Aere à 160 □ Ruth.	Russische Dessätine à 2400 □ Faden.	Französ. Hectare à 100 □ Decameter.
in Morgen, Acker u. s. w. anderer Länder.					
1,06975 0,02928	1,02129 0,00915	0,70923 9,85079	0,63094 9,79999	0,23370 9,36867	0,25532 9,40709
Länder in preußische Morgen.					
0,93480 9,97072	0,97915 9,99085	1,40998 0,14921	1,58494 0,20001	4,27890 0,63133	3,91662 0,59291

8. Flüssigkeitsmaaßtabellen.

Kurhess. Maaß = 144 Cub.-Z.	Hessen-Darmst. Maaß = 128 Cub.-Z.	Badensch. Maaß = $^1/_{18}$ C.-Fuß.	Englischer Gallon =277,274 Cub.-Z.	Russischer Stoof = 75 Cub.-Z.	Französ. Litre = 0,001 C.-Met.
Cub.-Zoll) in Maaße, Kannen u. s. w. anderer Länder.					
0,57701 9,76118	0,57252 9,75779	0,76335 9,88273	0,25202 9,40143	0,93170 9,96928	1,14503 0,05882
Länder in preußische Quart.					
1,73307 0,23882	1,74668 0,24221	1,31001 0,11727	3,96798 0,59857	1,07330 0,03072	0,87334 9,94118

9. Getreidemaaßtabellen.

Kurhess. Scheffel =5135,3 Cub.-Z.	Hessen-Darmst. Malter = 8192 Cub.-Z.	Badensch. Malter = 100 Maaß.	Englischer Bushel = 8 Gall.	Russischer Tschetwerik = 1600 Cub.-Z.	Französ. Hectolitre = 100 Litres.
in Scheffel, Metzen u. s. w. anderer Länder.					
0,68386 9,83497	0,70351 9,84727	0,36641 9,56397	1,51210 0,17958	2,09634 0,32146	0,54961 9,74006
Länder in preußische Scheffel.					
1,46228 0,16503	1,42145 0,15273	2,72918 0,43603	0,66133 9,82042	0,47702 9,67854	1,81946 0,25994

10. Meilentabelle.

Oesterreichsche Meile = 24000 Fuß.	Sächsische Polizei-Meile = 32000 Fuß.	Hannoversche Meile = 25400 Fuß.	Braunschweiger Meile = 26000 Fuß.	Badensch. Meile = 29629 Fuß.	Hessen-Darmst. Meile = 30000 Fuß.
a. Die preußische Meile, zu 24000 Fuß,					
0,99286	0,83121	1,01527	1,01524	0,84740	1,00433
9,99689	9,91971	0,00658	0,00657	9,92809	0,00188
b. Die Meilen u. s. w. anderer Länder					
1,00719	1,20307	0,98496	0,98499	1,18007	0,99569
0,00311	0,08029	9,99342	9,99343	0,07191	9,99812

Eine Seemeile = $\frac{1}{4}$ deutsche Meile = $\frac{1}{60}$ des mittleren Meridiangrades.

C. Verwandlungstabellen.

Die erste von folgenden Reductions- oder Verwandlungstabellen dient, um die meist in der Praxis vorkommenden Achtelzoll und Duodecimal-Zoll in Fuß umzuwandeln. Die Zolle sucht man in der ersten Horizontal- und die Achtel in der ersten Verticalcolumne auf; die entsprechende Fußzahl steht mit der Zollzahl in einerlei Vertical- und mit der Achtelzollzahl in einerlei Horizontalcolumne. Hiernach ist z. B. $5\frac{3}{8}$ Zoll = 0,4479 Fuß; umgekehrt aber, 0,646 Fuß = $7\frac{6}{8}$ Zoll.

Die Tafel Nr. 2 dient zur Verwandlung der Zolle und Linien in Fuß und ist wie Nr. 1 eingerichtet. Hiernach ist z. B. 4 Zoll, 5 Linien = 0,3681 Fuß; umgekehrt, 0,653 Fuß = 7 Zoll 10 Linien.

Die Tabellen Nr. 3 und 4 dienen zum Umsetzen der Quadr.-Zoll und Cub.-Zoll in Quadr.-Fuß und Cub.-Fuß. Ihre Einrichtung und ihr Gebrauch ist ohne weitere Erklärung einleuchtend. Hiernach sind z. B. 8 Quadr.-Zoll = 0,055556 Quadr.-Fuß, ferner 80 Quadr.-Zoll = 0,55556 und 800 Quadr.-Zoll = 5,5556 Quadr.-Fuß. Es sind ebenso

$$236 \text{ Quadr.-Zoll} = \left\{ \begin{array}{r} 1,3889 \\ 2083 \\ 417 \end{array} \right\} = 1,639 \text{ Quadr.-Fuß.}$$

$$\text{Ferner } 1269 \text{ Cub.-Zoll} = \left\{ \begin{array}{r} 0,5787 \\ 1157 \\ 347 \\ 52 \end{array} \right\} = 0,7343 \text{ Cub.-Fuß.}$$

Umgekehrt, 0,3960 Cubik-Fuß ist = 683 Cubik-Zoll.

$$\begin{array}{r} 0,3472 \\ \hline 488 \\ \underline{463} \\ 25 \\ \underline{23} \end{array}$$

10. Meilentabelle.

Schweizer neue Wegstde. = 16000 Fuß.	Deutsche od. geogr. Meile, 15 auf 1 Grad.	Englische Meile = 5280 Fuß.	Franz. u. englische Seemeile, 20=1 Gr.	Russische Werst = 3500 Fuß.	Französ. Myriameter = 10000 Meter.
in Meilen u. s. w. anderer Länder.					
1,56927	1,01514	4,68055	1,35352	7,06095	0,75325
0,19570	0,00653	0,67030	0,13146	0,84886	9,87694
in preußische Meilen.					
0,63724	0,98509	0,21365	0,73882	0,14162	1,32758
9,80430	9,99348	9,32970	9,86854	9,15114	0,12306

Ein Knoten der Logleine = $\frac{1}{120}$ einer Seemeile.

Die fünfte Tabelle ist bei Verwandlung des preußischen Fußmaaßes in Metermaaß und die sechste Tabelle im umgekehrten Falle in Anwendung zu bringen. Die Einrichtung beider Tabellen ist an sich klar, ihr Gebrauch aber wird durch folgende Beispiele vor Augen geführt:

1. Eine Länge von 5 Fuß 7 Zoll 2 Linien ist auch

$$= \left\{ \begin{array}{r} 1,56927 \\ 18308 \\ 436 \end{array} \right\} = 1,75671 \text{ Meter.}$$

2. Eine Fläche von 6,274 Quadrat-Fuß ist auch

$$= \left\{ \begin{array}{r} 0,59102 \\ 1970 \\ 689 \\ 39 \end{array} \right\} = 0,6180 \text{ Quadrat-Meter.}$$

3. Umgekehrt 2,436 Meter ist $\left\{ \begin{array}{r} 6,37240 \\ 1,27448 \\ 9559 \\ 1912 \end{array} \right\} = 7,76159$ Fuß

= 7 Fuß 9 Zoll 1,66 Linien.

4. Der Raum von 0,3265 Cubik-Meter ist auch

$$= \left\{ \begin{array}{r} 9,70376 \\ 64692 \\ 19408 \\ 1617 \end{array} \right\} = 10,56093 \text{ Cubik-Fuß.}$$

Die siebente und achte Tabelle dienen zur Reduction des englischen Maaßes in preußisches und des preußischen Maaßes in englisches. Es ist z. B. hiernach

$$4 \text{ Fuß } 3\tfrac{1}{4} \text{ Zoll englisch} = \left\{ \begin{array}{r} 3,88454 \\ 24278 \\ 2023 \end{array} \right\} = 4,14755 \text{ Fuß}$$

$= 4$ Fuß $1\frac{3}{4}$ Zoll preußisch.

---

1. Verwandlung der Zoll und Achtelzoll in Fuß.

Zoll.	0	1	2	3	4	5
Achtel						
0	0,0000	0,0833	0,1667	0,2500	0,3333	0,4167
1	0,0104	0,0937	0,1771	0,2604	0,3437	0,4271
2	0,0208	0,1042	0,1875	0,2708	0,3542	0,4375
3	0,0312	0,1146	0,1979	0,2812	0,3646	0,4479
4	0,0417	0,1250	0,2083	0,2917	0,3750	0,4583
5	0,0521	0,1354	0,2187	0,3021	0,3854	0,4688
6	0,0625	0,1458	0,2292	0,3125	0,3958	0,4792
7	0,0729	0,1563	0,2396	0,3229	0,4062	0,4896

2. Verwandlung der Zoll und Linien in Fuß.

Zoll.	0	1	2	3	4	5
Linien						
0	0,0000	0,0833	0,1667	0,2500	0,3333	0,4167
1	0,0069	0,0903	0,1736	0,2569	0,3403	0,4236
2	0,0139	0,0972	0,1805	0,2639	0,3472	0,4305
3	0,0208	0,1042	0,1875	0,2708	0,3542	0,4375
4	0,0278	0,1111	0,1944	0,2778	0,3611	0,4444
5	0,0347	0,1181	0,2014	0,2847	0,3681	0,4514
6	0,0417	0,1250	0,2083	0,2917	0,3750	0,4583
7	0,0486	0,1319	0,2153	0,2986	0,3819	0,4653
8	0,0556	0,1389	0,2222	0,3056	0,3889	0,4722
9	0,0625	0,1458	0,2292	0,3125	0,3958	0,4792
10	0,0694	0,1528	0,2361	0,3194	0,4028	0,4861
11	0,0764	0,1597	0,2430	0,3264	0,4097	0,4930

3. Verwandlung der Quadrat=Zoll in Quadrat=Fuß.

Quadrat=Zoll	1	2	3	4
Quadrat=Fuß	0,006944	0,013889	0,020833	0,027778

4. Verwandlung der Cubik=Zoll in Cubik=Fuß.

Cubik=Zoll.	1	2	3	4
Cubik=Fuß.	0,0005787	0,0011574	0,0017361	0,0023148

1. Verwandlung der Zoll und Achtelzoll in Fuß.

6	7	8	9	10	11
0,5000	0,5833	0,6667	0,7500	0,8333	0,9167
0,5104	0,5938	0,6771	0,7604	0,8438	0,9271
0,5208	0,6042	0,6875	0,7708	0,8542	0,9375
0,5312	0,6146	0,6979	0,7812	0,8646	0,9479
0,5417	0,6250	0,7083	0,7917	0,8750	0,9583
0,5521	0,6354	0,7187	0,8021	0,8854	0,9687
0,5625	0,6458	0,7292	0,8125	0,8958	0,9792
0,5729	0,6563	0,7396	0,8229	0,9063	0,9896

2. Verwandlung der Zoll und Linien in Fuß.

6	7	8	9	10	11
0,5000	0,5833	0,6667	0,7500	0,8333	0,9167
0,5069	0,5903	0,6736	0,7569	0,8403	0,9236
0,5139	0,5972	0,6805	0,7639	0,8472	0,9305
0,5208	0,6042	0,6875	0,7708	0,8542	0,9375
0,5278	0,6111	0,6944	0,7778	0,8611	0,9444
0,5347	0,6181	0,7014	0,7847	0,8681	0,9514
0,5417	0,6250	0,7083	0,7917	0,8750	0,9583
0,5486	0,6319	0,7153	0,7986	0,8819	0,9653
0,5556	0,6389	0,7222	0,8056	0,8889	0,9722
0,5625	0,6458	0,7292	0,8125	0,8958	0,9792
0,5694	0,6528	0,7361	0,8194	0,9028	0,9861
0,5764	0,6597	0,7430	0,8264	0,9097	0,9930

3. Verwandlung der Quadrat-Zoll in Quadrat-Fuß.

5	6	7	8	9	10
0,034722	0,041667	0,048611	0,055556	0,062500	0,069444

4. Verwandlung der Cubik-Zoll in Cubik-Fuß.

5	6	7	8	9	10
0,0028935	0,0034722	0,0040509	0,0046296	0,0052083	0,0057870

5. Verwandlung des preußischen Fußmaaßes in Metermaaß.

Fuß.	Meter.	Zoll.	Meter.	Linien.	Meter.
1	0,31385	1	0,02615	1	0,00218
2	0,62771	2	0,05231	2	0,00436
3	0,94156	3	0,07846	3	0,00654
4	1,25541	4	0,10462	4	0,00872
5	1,56927	5	0,13077	5	0,01090
6	1,88312	6	0,15692	6	0,01308
7	2,19697	7	0,18308	7	0,01526
8	2,51083	8	0,20924	8	0,01744
9	2,82466	9	0,23539	9	0,01962
10	3,13853	10	0,26154	10	0,02180
11	3,45239	11	0,28770	11	0,02397
12	3,76624	12	0,31385	12	0,02615

Quadrat-Fuß.	Quadrat-Meter.	Quadrat-Zoll.	Quadrat-Centim.	Cubik-Fuß.	Cubik-Meter.	Cubik-Zoll.	Cubik-Centim.
1	0,09850	1	6,841	1	0,03092	1	17,891
2	0,19701	2	13,681	2	0,06183	2	35,782
3	0,29551	3	20,522	3	0,09275	3	53,673
4	0,39402	4	27,362	4	0,12366	4	71,564
5	0,49252	5	34,203	5	0,15458	5	89,456
6	0,59102	6	41,043	6	0,18550	6	107,347
7	0,68953	7	47,884	7	0,21641	7	125,238
8	0,78803	8	54,724	8	0,24735	8	143,129
9	0,88654	9	61,565	9	0,27824	9	161,020
10	0,98504	10	68,406	10	0,30916	10	178,911
11	1,08354	11	75,246	11	0,34007	11	196,802
12	1,18205	12	82,087	12	0,37099	12	214,693

6. Verwandlung des Metermaaßes in preußisches Fuß=, Zoll= und Linienmaaß.

Meter.	Preußisches Maaß.					
	Fuß.	Zoll.	Linien.	Fuß.	Zoll.	Linien.
1	3	2	2,81	3,18620	38,234	458,81
2	6	4	5,63	6,37240	76,469	917,63
3	9	6	8,44	9,55860	114,703	1376,44
4	12	8	11,25	12,74480	152,938	1835,26
5	15	11	2,06	15,93100	191,172	2294,07
6	19	1	4,88	19,11719	229,406	2752,88
7	22	3	7,69	22,30339	267,641	3211,70
8	25	5	10,50	25,48959	305,875	3670,51
9	28	8	1,31	28,67579	344,109	4129,31

6. Verwandlung des Metermaaßes in preußisches Fuß-, Zoll- und Linienmaaß.

Preußisches Maaß.					
Quadr.-Meter.	Quadrat-Fuß.	Quadrat-Zoll.	Cubik-Metr.	Cubik-Fuß.	Cubik-Zoll.
1	10,1519	1461,87	1	32,3459	55893,7
2	20,3037	2923,74	2	64,6917	111787,4
3	30,4556	4385,61	3	97,0376	167681,1
4	40,6075	5847,48	4	129,3835	223574,8
5	50,7593	7309,35	5	161,7293	279468,4
6	60,9112	8771,22	6	194,0752	335362,1
7	71,0632	10233,09	7	226,4211	391255,8
8	81,2150	11694,95	8	258,7670	447149,5
9	91,3668	13156,82	9	291,1129	503043,2

7. Verwandlung des englischen Fuß- und Zollmaaßes in preußisches.

Englisches Maaß.	Preußisches Maaß.				
	Fuß.	Zoll.	Linien.	Zoll.	Fuß.
1 Zoll	—	—	11,65	0,9711	0,08093
2 »	—	1	11,31	1,9423	0,16186
3 »	—	2	10,96	2,9134	0,24278
4 »	—	3	10,61	3,8846	0,32371
5 »	—	4	10,27	4,8557	0,40464
6 »	—	5	9,92	5,8268	0,48557
7 »	—	6	9,58	6,7980	0,56650
8 »	—	7	9,23	7,7691	0,64742
9 »	—	8	8,88	8,7403	0,72835
10 »	—	9	8,54	9,7114	0,80928
11 »	—	10	8,19	10,6825	0,89021
1 Fuß	—	11	7,84	11,6536	0,97114
2 »	1	11	3,69	23,3073	1,94227
3 »	2	10	11,53	34,9609	2,91341
4 »	3	10	7,38	46,6144	3,88454
5 »	4	10	3,22	58,2682	4,85568
6 »	5	9	11,06	69,9218	5,82682
7 »	6	9	6,91	81,5754	6,79795
8 »	7	9	2,75	93,2290	7,76909
9 »	8	8	10,60	104,8826	8,74022
10 »	9	8	6,44	116,5363	9,71136
11 »	10	8	2,28	128,1900	10,68250
12 »	11	7	10,12	139,8436	11,65363

8. Verwandlung des preußischen Fuß- und Zollmaaßes in englisches.

Preußisches Maaß.	Englisches Maaß.				
	Fuß.	Zoll.	Linien.	Zoll.	Fuß.
1 Zoll	—	1	0,36	1,0297	0,08581
2 »	—	2	0,71	2,0594	0,17162
3 »	—	3	1,07	3,0892	0,25743
4 »	—	4	1,43	4,1189	0,34324
5 »	—	5	1,78	5,1486	0,42905
6 »	—	6	2,14	6,1783	0,51486
7 »	—	7	2,50	7,2081	0,60067
8 »	—	8	2,85	8,2378	0,68648
9 »	—	9	3,21	9,2675	0,77229
10 »	—	10	3,57	10,2972	0,85810
11 »	—	11	3,92	11,3269	0,94391
1 Fuß	1	—	4,28	12,3567	1,02972
2 »	2	—	8,56	24,7133	2,05944
3 »	3	1	0,84	37,0700	3,08917
4 »	4	1	5,12	49,4266	4,11889
5 »	5	1	9,40	61,7833	5,14861
6 »	6	2	1,68	74,1400	6,17834
7 »	7	2	5,96	86,4966	7,20806
8 »	8	2	10,24	98,8533	8,23778
9 »	9	3	2,52	111,2099	9,26750

II. Trigonometrische Tabellen.

Einrichtung und Gebrauch der trigonometrischen Tabellen. Die erste der folgenden Tabellen giebt die vier trigonometrischen Linien Sinus, Cosinus, Tangente und Cotangente aller Winkel von 0° bis 90° mit Intervallen von 10 zu 10 Minuten an; die zweite Tabelle enthält die Logarithmen dieser Größen. Jede dieser Tabellen besteht aus 8 Verticalcolumnen, wovon die ersten und die letzten zwei die Grade und Minuten ausdrücken und die mittleren vier die entsprechenden Werthe der trigonometrischen Linien oder die Logarithmen derselben angeben. Die Grade und Minuten und die zugehörigen trigonometrischen Linien bilden eine horizontale Zeile. Die Winkel unter 45 Grad sind in den ersten zwei und die über 45 Grad in den letzten Verticalcolumnen enthalten. Auf jene beziehen sich die Ueber-, auf diese die Unterschriften der mittleren Verticalcolumnen. Die Zahlen zwischen je sechs, einem ganzen Grade entsprechenden Zeilen sind die Differenzen von je zwei auf einander folgenden trigonometrischen Linien. Man findet von einem Winkel unter 45° die ent-

sprechenden trigonometrischen Linien, oder die Logarithmen derselben, wenn man diesen Winkel in der vordersten Verticalcolumne aufsucht, und von der gefundenen Stelle aus horizontal herübergeht bis in die Verticalcolumne, deren Aufschrift mit dem Namen der gesuchten Linie übereinstimmt. So giebt z. B. die Tafel Nr. 1, $sin. 11^0, 20' = 0{,}1965$; $cos. 11^0, 20' = 0{,}9805$ u. s. w., weil diese Zahlen in den mit Sinus und Cosinus überschriebenen Verticalcolumnen und zugleich in der Zeile enthalten sind, die mit $11^0, 20'$ anfängt. Ebenso ist $cos. 34^0, 50' = 0{,}8208$ und $tang. 34^0, 50' = 0{,}6959$, endlich $cotang. 41^0,30' = 1{,}1303$. Ebenso findet man in der Tafel Nr. 2, $log. sin. 26^0, 30' = 9{,}64953$; $log. cos. 26^0,30' = 9{,}95179$, ferner $log. tang. 17^0,40' = 9{,}50311$, $log. cotang. 39^0, 10' = 10{,}08905$. Für einen Winkel über 45^0 findet man hingegen die entsprechende trigonometrische Linie oder deren Logarithmen, wenn man die gegebene Grad- und Minutenzahl in den hintersten Verticalcolumnen aufsucht, und von da aus horizontal herübergeht, bis man in die Verticalcolumne kommt, an deren Fuß der Name der gesuchten Linie steht. Hiernach findet man in der ersten Tabelle $sin. 48^0, 10' = 0{,}7451$, und $cos. 48^0, 10' = 0{,}6670$, weil diese Zahlen in der Zeile stehen, an deren Ende $48^0, 10'$ zu lesen ist und zugleich in Verticalreihen enthalten sind, an deren Fuß die Namen Sinus und Cosinus zu finden sind. Ebenso findet man
$cos. 61^0, 30' = 0{,}4772$, $tang. 61^0, 30' = 1{,}8418$, und $cotang. 76^0, 40' = 0{,}2370$. Auf gleiche Weise findet man in der zweiten Tabelle

$$log. sin. 50^0,40' = 9{,}88844,\ log. tang. 50^0,40' = 10{,}08647,$$
$$log. cos. 81^0,10' = 9{,}18628,\ log. cotang. 68^0,30' = 9{,}59540.$$

Uebrigens ist $sin. 50^0, 40'$ auch $= cos. 39^0, 20'$, ferner $cos. 61^0,30' = sin. 28^0,30'$, $cotang. 68^0,30' = tang. 21^0,30'$ u. s. w., weil von zwei Winkeln, deren Summe 90^0 beträgt, der Sinus des einen gleich dem Cosinus des andern, auch Tangente des einen gleich Cotangente des andern ist u. s. w.

Sind die Winkel bis auf Minuten genau gegeben, so hat man die in den Tabellen enthaltenen Werthe der trigonometrischen Linien mit Hülfe der Differenzen zu ergänzen, indem man das Interpolationsverfahren einschlägt. Hiernach ist

$$sin. 18^0, 13' = sin. 18^0, 10' + 0{,}3 . 28 = \left\{\begin{matrix} 0{,}3118 \\ \ldots 8 \end{matrix}\right\} = 0{,}3126 \cdot$$

$$sin. 56^0, 27' = \left\{\begin{matrix} 0{,}8323 \\ ..11 \end{matrix}\right\} = 0{,}8334,$$

$$tang. 43^0,34' = \left\{\begin{matrix} 0{,}9490 \\ 22 \end{matrix}\right\} = 0{,}9512, \text{ ferner}$$

$$log. sin. 26^0,16' = 9{,}64442 + 0{,}6 . 256 = \left\{\begin{matrix} 9{,}64442 \\ 154 \end{matrix}\right\} = 9{,}64596,$$

$$log. tang. 46^0, 21' = \left\{\begin{matrix} 10{,}02022 \\ 25 \end{matrix}\right\} = 10{,}02047.$$

Da der Cosinus und die Cotangente abnehmen, wenn der Winkel wächst, so hat man bei denselben die Tabellenwerthe durch Subtraction zu ergänzen. Es ist hiernach

$cos. 18^0, 14' = cos. 18^0, 10' - 0,4 . 9 = \left\{ \begin{matrix} 0,9502 \\ 4 \end{matrix} \right\} = 0,9498;$

$cos. 63^0, 25' = \left\{ \begin{matrix} 0,4488 \\ 13 \end{matrix} \right\} = 0,4475,$

$cotang. 34^0, 28' = \left\{ \begin{matrix} 1,4641 \\ 73 \end{matrix} \right\} = 1,4568,$ ferner

$log. cos. 35^0, 52' = \left\{ \begin{matrix} 9,90887 \\ 18 \end{matrix} \right\} = 9,90869,$ und

$log. cotang. 62^0, 37' = \left\{ \begin{matrix} 9,71648 \\ 217 \end{matrix} \right\} = 9,71431.$

Umgekehrt dienen die in Rede stehenden Tabellen auch dazu, um aus einer gegebenen trigonometrischen Linie oder ihrem Logarithmen den entsprechenden Winkel zu finden. In diesem Falle sucht man den gegebenen Zahlenwerth in derjenigen Verticalcolumme auf, welche den Namen desselben am Kopfe oder Fuße trägt, und geht von da links oder rechts herüber in die Grad- und Minutencolumnen. Hiernach ist z. B.

für $sin. x = 0,5568, x = 33^0, 50'$,
für $sin. x = 0,7916, x = 52^0, 20'$,
für $cos. x = 0,7604, x = 40^0, 30'$,
für $tang. x = 2,6746, x = 69^0, 30'$,
für $cotang. x = 1,5301, x = 33^0, 10'$; ferner
für $log. sin. x = 9,29340, x = 11^0, 20'$,
für $log. sin. x = 9,98901, x = 77^0, 10'$,
für $log. tang. x = 10,47548, x = 71^0, 30'$,
für $log. cotang. x = 9,98484, x = 46^0, 0'$.

In der Regel ist die gegebene Größe nicht genau in den Tabellen enthalten, und daher zur schärfern Bestimmung des Winkels das Interpoliren anzuwenden. Bei den Sinus und Tangenten nehme man den der nächst kleineren, bei den Cosinus und Cotangenten aber den der nächst größeren Zahl entsprechenden Winkel; dann dividire man die zehnfache Differenz beider Zahlen durch die Differenz, welche die Tafeln für zwei benachbarte Zahlen angeben, und endlich setze man den Quotienten zu den Minuten des erst aus den Tafeln genommenen Winkels. So ist z. B. für $sin. x = 0,3679$,

$$x = 21^0,30' + (3679 - 3665) . \frac{10'}{27} = 21^0,30' + \frac{140'}{27}$$
$$= 21^0, 35', 2;$$

nämlich der nächst kleineren Zahl 0,3665 entspricht $x = 21^0,30'$, der Quotient aus der zehnfachen Differenz von dieser und der gegebenen Zahl 0,3679 ist 140 und die von der Tabelle angegebene Differenz ist 27, folglich der Quotient beider = 5,2. Wenn ferner $tang. x = 0,9152$ ist, so hat man

$$x = 42^0, 20' + (52 - 10) \frac{10'}{53} = \left\{ \begin{matrix} 42^0, 20' \\ 8 \end{matrix} \right\} = 42^0, 28';$$

wenn $cos. x = 0,6095$, so hat man

$$x = 52^0, 20' + (111 - 95) \frac{10}{23} = \left\{ \begin{matrix} 52^0, 20' \\ 7' \end{matrix} \right\} = 52^0, 27',$$

und wenn $cotang. x = 1{,}5630$ ist, so folgt

$$x = 32^0, 30' + (697 - 630)\frac{10'}{100} = \left\{\begin{matrix} 32^0, 30' \\ 6{,}7 \end{matrix}\right\} = 32^0{,}36'{,}7$$

Ferner für $log. sin. x = 9{,}75344$ ist

$$x = 34^0, 30' + (44 - 13)\frac{10'}{183} = \left\{\begin{matrix} 34^0, 30' \\ 1'{,}7 \end{matrix}\right\} = 34^0.\ 31', 7$$

für $log. tang. x = 11{,}12537$,

$$x = 85^0{,}40' + (537 - 047)\frac{10'}{1710} = \left\{\begin{matrix} 85^0{,}40' \\ 3' \end{matrix}\right\} = 85^0{,}43',$$

für $log. cos. x = 9{,}72104$ ist

$$x = 58^0, 10' + \frac{2180 - 1040}{204} = \left\{\begin{matrix} 58^0, 10' \\ 5' \end{matrix}\right\} = 58^0, 15';$$

endlich für $log. cotang. x = 10{,}28853$,

$$x = 27^0{,}10' + \frac{9720 - 8530}{311} = \left\{\begin{matrix} 27^0, 10' \\ 3{,}5 \end{matrix}\right\} = 27^0, 13', 5.$$

Kommt es darauf an, wenig geneigte Linien auf den Horizont zu reduciren, so kann man mit Vortheil von folgendem Hülfstäfelchen Gebrauch machen. Hiernach ist z. B. die Horizontalprojection einer Linie von 45,382 Fuß Länge und $3^0{,}20'$ Ansteigen:

$$= 45{,}382 - 45{,}382 \text{ Sinus versus } 3^0{,}20'$$
$$= 45{,}382 - 45{,}382 \cdot 0{,}00169$$
$$= 45{,}382 - 0{,}077 = 45{,}305 \text{ Fuß.}$$

Hülfstäfelchen.

Die hunderttausendfachen Werthe der Sinus versus [100000 (1 — $cos. \alpha$)] der Winkel von 0^0 bis 7 Grad.

Minuten.	0^0	1^0	2^0	3^0	4^0	5^0	6^0
0	0	15	61	137	244	381	548
5	0	18	66	145	254	393	563
10	0	21	71	153	264	406	579
15	1	24	77	161	275	420	594
20	2	27	83	169	286	433	610
25	3	31	89	178	297	447	626
30	4	34	95	187	308	460	643
35	5	38	102	196	320	474	659
40	7	42	108	205	332	489	676
45	9	47	115	214	343	503	693
50	11	51	122	224	356	518	710
55	13	56	130	234	368	533	728
60	15	61	137	244	381	548	745

1. Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
0	0	0,0000	1,0000	0,0000	∞	90	0
	10	0,0029	1,0000	0,0029	343,77		50
	20	0,0058	1,0000	0,0058	171,89		40
	30	0,0087	1,0000	0,0087	114,59		30
	40	0,0116	0,9999	0,0116	85,940		20
	50	0,0145	0,9999	0,0145	68,750		10
		29	1	29	11,460		
1	0	0,0175	0,9998	0,0175	57,290	89	0
	10	0,0204	0,9998	0,0204	49,104		50
	20	0,0233	0,9997	0,0233	42,964		40
	30	0,0262	0,9997	0,0262	38,188		30
	40	0,0291	0,9996	0,0291	34,368		20
	50	0,0320	0,9995	0,0320	31,242		10
		29	1	29	2,606		
2	0	0,0349	0,9994	0,0349	28,636	88	0
	10	0,0378	0,9993	0,0378	26,432		50
	20	0,0407	0,9992	0,0407	24,542		40
	30	0,0436	0,9990	0,0437	22,904		30
	40	0,0465	0,9989	0,0466	21,470		20
	50	0,0494	0,9988	0,0495	20,206		10
		29	1	29	1,125		
3	0	0,0523	0,9986	0,0524	19,081	87	0
	10	0,0552	0,9985	0,0553	18,075		50
	20	0,0581	0,9983	0,0582	17,169		40
	30	0,0610	0,9981	0,0612	16,350		30
	40	0,0640	0,9980	0,0641	15,605		20
	50	0,0669	0,9978	0,0670	14,924		10
		29	2	29	623		
4	0	0,0698	0,9976	0,0699	14,301	86	0
	10	0,0727	0,9974	0,0729	13,727		50
	20	0,0756	0,9971	0,0758	13,197		40
	30	0,0785	0,9969	0,0787	12,706		30
	40	0,0814	0,9967	0,0816	12,251		20
	50	0,0843	0,9964	0,0846	11,826		10
		29	2	29	396		
5	0	0,0872	0,9962	0,0875	11,430	85	0
	10	0,0901	0,9959	0,0904	11,059		50
	20	0,0929	0,9957	0,0934	10,712		40
	30	0,0958	0,9954	0,0963	10,385		30
	40	0,0987	0,9951	0,0992	10,078		20
	50	0,1016	0,9948	0,1022	9,7882		10
		29	3	29	2738		
6	0	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	84	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1. Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel. Gr.	Winkel. Min.	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel. Gr.	Winkel. Min.
6	0	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	84	0
	10	0,1074	0,9942	0,1080	9,2553		50
	20	0,1103	0,9939	0,1110	9,0098		40
	30	0,1132	0,9936	0,1139	8,7769		30
	40	0,1161	0,9932	0,1169	8,5555		20
	50	0,1190	0,9929	0,1198	8,3450		10
		29	4	29	2007		
7	0	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443	83	0
	10	0,1248	0,9922	0,1257	7,9530		50
	20	0,1276	0,9918	0,1287	7,7704		40
	30	0,1305	0,9914	0,1317	7,5958		30
	40	0,1334	0,9911	0,1346	7,4287		20
	50	0,1363	0,9907	0,1376	7,2687		10
		29	4	29	1533		
8	0	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	82	0
	10	0,1421	0,9899	0,1435	6,9682		50
	20	0,1449	0,9894	0,1465	6,8269		40
	30	0,1478	0,9890	0,1495	6,6912		30
	40	0,1507	0,9886	0,1524	6,5606		20
	50	0,1536	0,9881	0,1554	6,4348		10
		28	4	30	1210		
9	0	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	81	0
	10	0,1593	0,9872	0,1614	6,1970		50
	20	0,1622	0,9868	0,1644	6,0844		40
	30	0,1650	0,9863	0,1673	5,9758		30
	40	0,1679	0,9858	0,1703	5,8708		20
	50	0,1708	0,9853	0,1733	5,7694		10
		28	5	30	981		
10	0	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	80	0
	10	0,1765	0,9843	0,1793	5,5764		50
	20	0,1794	0,9838	0,1823	5,4845		40
	30	0,1822	0,9833	0,1853	5,3955		30
	40	0,1851	0,9827	0,1883	5,3093		20
	50	0,1880	0,9822	0,1914	5,2257		10
		28	6	30	811		
11	0	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	79	0
	10	0,1937	0,9811	0,1974	5,0658		50
	20	0,1965	0,9805	0,2004	4,9894		40
	30	0,1994	0,9799	0,2035	4,9152		30
	40	0,2022	0,9793	0,2065	4,8430		20
	50	0,2051	0,9787	0,2095	4,7729		10
		28	6	31	683		
12	0	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	78	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1. Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
12	0	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	78	0
	10	0,2108	0,9775	0,2156	4,6382		50
	20	0,2136	0,9769	0,2186	4,5736		40
	30	0,2164	0,9763	0,2217	4,5107		30
	40	0,2193	0,9757	0,2247	4,4494		20
	50	0,2221	0,9750	0,2278	4,3897		10
		28	6	31	582		
13	0	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315	77	0
	10	0,2278	0,9737	0,2339	4,2747		50
	20	0,2306	0,9730	0,2370	4,2193		40
	30	0,2334	0,9724	0,2401	4,1653		30
	40	0,2363	0,9717	0,2432	4,1126		20
	50	0,2391	0,9710	0,2462	4,0611		10
		28	7	31	503		
14	0	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	76	0
	10	0,2447	0,9696	0,2524	3,9617		50
	20	0,2476	0,9689	0,2555	3,9136		40
	30	0,2504	0,9681	0,2586	3,8667		30
	40	0,2532	0,9674	0,2617	3,8208		20
	50	0,2560	0,9667	0,2648	3,7760		10
		28	7	31	439		
15	0	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	75	0
	10	0,2616	0,9652	0,2711	3,6891		50
	20	0,2644	0,9644	0,2742	3,6470		40
	30	0,2672	0,9636	0,2773	3,6059		30
	40	0,2700	0,9628	0,2805	3,5656		20
	50	0,2728	0,9621	0,2836	3,5261		10
		28	8	31	387		
16	0	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	74	0
	10	0,2784	0,9605	0,2899	3,4495		50
	20	0,2812	0,9596	0,2931	3,4124		40
	30	0,2840	0,9588	0,2962	3,3759		30
	40	0,2868	0,9580	0,2994	3,3402		20
	50	0,2896	0,9572	0,3026	3,3052		10
		28	9	31	343		
17	0	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	73	0
	10	0,2952	0,9555	0,3089	3,2371		50
	20	0,2979	0,9546	0,3121	3,2041		40
	30	0,3007	0,9537	0,3153	3,1716		30
	40	0,3035	0,9528	0,3185	3,1397		20
	50	0,3062	0,9520	0,3217	3,1084		10
		28	9	32	307		
18	0	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	72	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1. Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
18	0	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	72	0
	10	0,3118	0,9502	0,3281	3,0475		50
	20	0,3145	0,9492	0,3314	3,0178		40
	30	0,3173	0,9483	0,3346	2,9887		30
	40	0,3201	0,9474	0,3378	2,9600		20
	50	0,3228	0,9465	0,3411	2,9319		10
		27	10	32	277		
19	0	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042	71	0
	10	0,3283	0,9446	0,3476	2,8770		50
	20	0,3311	0,9436	0,3508	2,8502		40
	30	0,3338	0,9426	0,3541	2,8239		30
	40	0,3365	0,9417	0,3574	2,7980		20
	50	0,3393	0,9407	0,3607	2,7725		10
		27	10	33	250		
20	0	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	70	0
	10	0,3448	0,9387	0,3673	2,7228		50
	20	0,3475	0,9377	0,3706	2,6985		40
	30	0,3502	0,9367	0,3739	2,6746		30
	40	0,3529	0,9356	0,3772	2,6511		20
	50	0,3557	0,9346	0,3805	2,6279		10
		27	10	34	228		
21	0	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	69	0
	10	0,3611	0,9325	0,3872	2,5826		50
	20	0,3638	0,9315	0,3906	2,5605		40
	30	0,3665	0,9304	0,3939	2,5386		30
	40	0,3692	0,9293	0,3973	2,5172		20
	50	0,3719	0,9283	0,4006	2,4960		10
		27	11	34	209		
22	0	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751	68	0
	10	0,3773	0,9261	0,4074	2,4545		50
	20	0,3800	0,9250	0,4108	2,4342		40
	30	0,3827	0,9239	0,4142	2,4142		30
	40	0,3854	0,9228	0,4176	2,3945		20
	50	0,3881	0,9216	0,4210	2,3750		10
		27	11	35	191		
23	0	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559	67	0
	10	0,3934	0,9194	0,4279	2,3369		50
	20	0,3961	0,9182	0,4314	2,3183		40
	30	0,3987	0,9171	0,4348	2,2998		30
	40	0,4014	0,9159	0,4383	2,2817		20
	50	0,4041	0,9147	0,4417	2,2637		10
		26	12	35	177		
24	0	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	66	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1. Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel. Gr.	Min.	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel. Gr.	Min.
24	0	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	66	0
	10	0,4094	0,9124	0,4487	2,2286		50
	20	0,4120	0,9112	0,4522	2,2113		40
	30	0,4147	0,9100	0,4557	2,1943		30
	40	0,4173	0,9088	0,4592	2,1775		20
	50	0,4200	0,9075	0,4628	2,1609		10
		26	12	35	164		
25	0	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	65	0
	10	0,4253	0,9051	0,4699	2,1283		50
	20	0,4279	0,9038	0,4734	2,1123		40
	30	0,4305	0,9026	0,4770	2,0965		30
	40	0,4331	0,9013	0,4806	2,0809		20
	50	0,4358	0,9001	0,4841	2,0655		10
		26	13	36	152		
26	0	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	64	0
	10	0,4410	0,8975	0,4913	2,0353		50
	20	0,4436	0,8962	0,4950	2,0204		40
	30	0,4462	0,8949	0,4986	2,0057		30
	40	0,4488	0,8936	0,5022	1,9912		20
	50	0,4514	0,8923	0,5059	1,9768		10
		26	13	36	142		
27	0	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	63	0
	10	0,4566	0,8897	0,5132	1,9486		50
	20	0,4592	0,8884	0,5169	1,9347		40
	30	0,4617	0,8870	0,5206	1,9210		30
	40	0,4643	0,8857	0,5243	1,9074		20
	50	0,4669	0,8843	0,5280	1,8940		10
		26	14	37	133		
28	0	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	62	0
	10	0,4720	0,8816	0,5354	1,8676		50
	20	0,4746	0,8802	0,5392	1,8546		40
	30	0,4772	0,8788	0,5430	1,8418		30
	40	0,4797	0,8774	0,5467	1,8291		20
	50	0,4823	0,8760	0,5505	1,8165		10
		25	14	38	125		
29	0	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	61	0
	10	0,4874	0,8732	0,5581	1,7917		50
	20	0,4899	0,8718	0,5619	1,7796		40
	30	0,4924	0,8704	0,5658	1,7675		30
	40	0,4950	0,8689	0,5696	1,7556		20
	50	0,4975	0,8675	0,5735	1,7437		10
		25	15	39	116		
30	0	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	60	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1. Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
30	0	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	60	0
	10	0,5025	0,8646	0,5812	1,7205		50
	20	0,5050	0,8631	0,5851	1,7090		40
	30	0,5075	0,8616	0,5890	1,6977		30
	40	0,5100	0,8601	0,5930	1,6864		20
	50	0,5125	0,8587	0,5969	1,6753		10
		25	15	40	110		
31	0	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	59	0
	10	0,5175	0,8557	0,6048	1,6534		50
	20	0,5200	0,8542	0,6088	1,6426		40
	30	0,5225	0,8526	0,6128	1,6319		30
	40	0,5250	0,8511	0,6168	1,6212		20
	50	0,5275	0,8496	0,6208	1,6107		10
		25	16	41	104		
32	0	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	58	0
	10	0,5324	0,8465	0,6289	1,5900		50
	20	0,5348	0,8450	0,6330	1,5798		40
	30	0,5373	0,8434	0,6371	1,5697		30
	40	0,5398	0.8418	0,6412	1,5597		20
	50	0,5422	0,8403	0,6453	1,5497		10
		24	16	41	98		
33	0	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	57	0
	10	0,5471	0,8371	0,6536	1,5301		50
	20	0,5495	0,8355	0,6577	1,5204		40
	30	0,5519	0,8339	0,6619	1,5108		30
	40	0,5544	0,8323	0,6661	1,5013		20
	50	0,5568	0,8307	0,6703	1,4919		10
		24	17	42	93		
34	0	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826	56	0
	10	0,5616	0,8274	0,6787	1,4733		50
	20	0,5640	0,8258	0,6830	1,4641		40
	30	0,5664	0,8241	0,6873	1,4550		30
	40	0,5688	0,8225	0,6916	1,4460		20
	50	0,5712	0,8208	0,6959	1,4370		10
		24	17	43	89		
35	0	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	55	0
	10	0,5760	0,8175	0,7046	1,4193		50
	20	0,5783	0,8158	0,7089	1,4106		40
	30	0,5807	0,8141	0,7133	1,4019		30
	40	0,5831	0,8124	0,7177	1,3934		20
	50	0,5854	0,8107	0,7221	1,3848		10
		24	17	44	84		
36	0	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	54	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1. Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel. Gr.	Winkel. Min.	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel. Gr.	Winkel. Min.
36	0	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	54	0
	10	0,5901	0,8073	0,7310	1,3680		50
	20	0,5925	0,8056	0,7355	1,3597		40
	30	0,5948	0,8039	0,7400	1,3514		30
	40	0,5972	0,8021	0,7445	1,3432		20
	50	0,5995	0,8004	0,7490	1,3351		10
		23	18	46	81		
37	0	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	53	0
	10	0,6041	0,7969	0,7581	1,3190		50
	20	0,6065	0,7951	0,7627	1,3111		40
	30	0,6088	0,7934	0,7673	1,3032		30
	40	0,6111	0,7916	0,7720	1,2954		20
	50	0,6134	0,7898	0,7766	1,2876		10
		23	18	47	77		
38	0	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	52	0
	10	0,6180	0,7862	0,7860	1,2723		50
	20	0,6202	0,7844	0,7907	1,2647		40
	30	0,6225	0,7826	0,7954	1,2572		30
	40	0,6248	0,7808	0,8002	1,2497		20
	50	0,6271	0,7790	0,8050	1,2423		10
		23	19	48	74		
39	0	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	51	0
	10	0,6316	0,7753	0,8146	1,2276		50
	20	0,6338	0,7735	0,8195	1,2203		40
	30	0,6361	0,7716	0,8243	1,2131		30
	40	0,6383	0,7698	0,8292	1,2059		20
	50	0,6406	0,7679	0,8342	1,1988		10
		22	19	49	70		
40	0	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	50	0
	10	0,6450	0,7642	0,8441	1,1847		50
	20	0,6472	0,7623	0,8491	1,1778		40
	30	0,6494	0,7604	0,8541	1,1708		30
	40	0,6517	0,7585	0,8591	1,1640		20
	50	0,6539	0,7566	0,8642	1,1571		10
		22	19	51	67		
41	0	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	49	0
	10	0,6583	0,7528	0,8744	1,1436		50
	20	0,6604	0,7509	0,8796	1,1369		40
	30	0,6626	0,7490	0,8847	1,1303		30
	40	0,6648	0,7470	0,8899	1,1237		20
	50	0,6670	0,7451	0,8952	1,1171		10
		21	20	52	65		
42	0	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	48	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1. Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
42	0	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	48	0
	10	0,6713	0,7412	0,9057	1,1041		50
	20	0,6734	0,7392	0,9110	1,0977		40
	30	0,6756	0,7373	0,9163	1,0913		30
	40	0,6777	0,7353	0,9217	1,0850		20
	50	0,6799	0,7333	0,9271	1,0786		10
		21	20	54	62		
43	0	0,6820	0,7314	0,9325	1,0724	47	0
	10	0,6841	0,7294	0,9380	1,0661		50
	20	0,6862	0,7274	0,9435	1,0599		40
	30	0,6884	0,7254	0,9490	1,0538		30
	40	0,6905	0,7234	0,9545	1,0477		20
	50	0,6926	0,7214	0,9601	1,0416		10
		21	21	56	61		
44	0	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	46	0
	10	0,6967	0,7173	0,9713	1,0295		50
	20	0,6988	0,7153	0,9770	1,0235		40
	30	0,7009	0,7133	0,9827	1,0176		30
	40	0,7030	0,7112	0,9884	1,0117		20
	50	0,7050	0,7092	0,9942	1,0058		10
		21	21	58	58		
45	0	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000	45	0

2. Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linien.

0	0	— ∞	10,00000	— ∞	+ ∞	90	0
	10	7,46373	10,00000	7,46373	12,53627		50
	20	7,76475	9,99999	7,76476	12,23524		40
	30	7,94084	9,99998	7,94086	12,05914		30
	40	8,06578	9,99997	8,06581	11,93419		20
	50	8,16268	9,99995	8,16273	11,83727		10
		7918	2	7919	7919		
1	0	8,24186	9,99993	8,24192	11,75808	89	0
	10	8,30879	9,99991	8,30888	11,69112		50
	20	8,36678	9,99988	8,36689	11,63311		40
	30	8,41792	9,99985	8,41807	11,58193		30
	40	8 46366	9,99982	8,46385	11,53615		20
	50	8,50504	9,99978	8,50527	11,49473		10
		3778	4	3781	3781		
2	0	8,54282	9,99974	8,54308	11,45692	88	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

2. Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linien.

Winkel. Gr.	Min.	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel. G.	Min.
2	0	8,54282	9,99974	8,54308	11,45692	88	0
	10	8,57757	9,99969	8,57788	11,42212		50
	20	8,60973	9,99964	8,61009	11,38991		40
	30	8,63968	9,99959	8,64009	11,35991		30
	40	8,66769	9,99953	8,66816	11,33184		20
	50	8,69400	9,99947	8,69453	11,30547		10
		2480	7	2487	2487		
3	0	8,71880	9,99940	8,71940	11,28060	87	0
	10	8,74226	9,99934	8,74292	11,25708		50
	20	8,76451	9,99926	8,76525	11,23475		40
	30	8,78568	9,99919	8,78649	11,21351		30
	40	8,80585	9,99911	8,80674	11,19326		20
	50	8,82513	9,99903	8,82610	11,17390		10
		1845	9	1854	1854		
4	0	8,84358	9,99894	8,84464	11,15536	86	0
	10	8,86128	9,99885	8,86243	11,13757		50
	20	8,87829	9,99876	8,87953	11,12047		40
	30	8,89464	9,99866	8,89598	11,10402		30
	40	8,91040	9,99856	8,91185	11,08815		20
	50	8,92561	9,99845	8,92716	11,07284		10
		1469	11	1479	1479		
5	0	8,94030	9,99834	8,94195	11,05805	85	0
	10	8,95450	9,99823	8,95627	11,04373		50
	20	8,96825	9,99812	8,97013	11,02987		40
	30	8,98157	9,99800	8,98358	11,01642		30
	40	8,99450	9,99787	8,99662	11,00338		20
	50	9,00704	9,99775	9,00930	10,99070		10
		1219	14	1232	1232		
6	0	9,01923	9,99761	9,02162	10,97838	84	0
	10	9,03109	9,99748	9,03361	10,96639		50
	20	9,04262	9,99734	9,04528	10,95472		40
	30	9,05386	9,99720	9,05666	10,94334		30
	40	9,06481	9,99705	9,06775	10,93225		20
	50	9,07548	9,99690	9,07858	10,92142		10
		1041	15	1056	1056		
7	0	9,08589	9,99675	9,08914	10,91086	83	0
	10	9,09606	9,99659	9,09947	10,90053		50
	20	9,10599	9,99643	9,10956	10,89044		40
	30	9,11570	9,99627	9,11943	10,88057		30
	40	9,12519	9,99610	9,12909	10,87091		20
	50	9,13447	9,99593	9,13854	10,86146		10
		909	18	926	926		
8	0	9,14356	9,99575	9,14780	10,85220	82	0
Gr.	Min.					G.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

2. Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linie

Winkel. Gr.	Min.	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel. G.	Min.
8	0	9,14356	9,99575	9,14780	10,85220	82	0
	10	9,15245	9,99557	9,15688	10,84312		50
	20	9,16116	9,99539	9,16577	10,83423		40
	30	9,16970	9,99520	9,17450	10,82550		30
	40	9,17807	9,99501	9,18306	10,81694		20
	50	9,18628	9,99482	9,19146	10,80854		10
		805	20	825	825		
9	0	9,19433	9,99462	9,19971	10,80029	81	0
	10	9,20223	9,99442	9,20782	10,79218		50
	20	9,20999	9,99421	9,21578	10,78422		40
	30	9,21761	9,99400	9,22361	10,77639		30
	40	9,22509	9,99379	9,23130	10,76870		20
	50	9,23244	9,99357	9,23887	10,76113		10
		723	22	745	745		
10	0	9,23967	9,99335	9,24632	10,75368	80	0
	10	9,24677	9,99313	9,25365	10,74635		50
	20	9,25376	9,99290	9,26086	10,73914		40
	30	9,26063	9,99267	9,26797	10,73203		30
	40	9,26739	9,99243	9,27496	10,72504		20
	50	9,27405	9,99219	9,28186	10,71814		10
		655	24	679	679		
11	0	9,28060	9,99195	9,28865	10,71135	79	0
	10	9,28705	9,99170	9,29535	10,70465		50
	20	9,29340	9,99145	9,30195	10,69805		40
	30	9,29966	9,99119	9,30846	10,69154		30
	40	9,30582	9,99093	9,31489	10,68511		20
	50	9,31189	9,99067	9,32122	10,67878		10
		599	27	625	625		
12	0	9,31788	9,99040	9,32747	10,67253	78	0
	10	9,32378	9,99013	9,33365	10,66635		50
	20	9,32960	9,98986	9,33974	10,66026		40
	30	9,33534	9,98958	9,34576	10,65424		30
	40	9,34100	9,98930	9,35170	10,64830		20
	50	9,34658	9,98901	9,35757	10,64243		10
		551	29	579	579		
13	0	9,35209	9,98872	9,36336	10,63664	77	0
	10	9,35752	9,98843	9,36909	10,63091		50
	20	9,36289	9,98813	9,37476	10,62524		40
	30	9,36819	9,98783	9,38035	10,61965		30
	40	9,37341	9,98753	9,38589	10,61411		20
	50	9,37858	9,98722	9,39136	10,60864		10
		510	32	541	541		
14	0	9,38368	9,98690	9,39677	10,60323	76	0
Gr.	Min.					G.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

2. Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					G.	Min.
14	0	9,38368	9,98690	9,39677	10,60323	76	0
	10	9,38871	9,98659	9,40212	10,59788		50
	20	9,39369	9,98627	9,40742	10,59258		40
	30	9,39860	9,98594	9,41266	10,58734		30
	40	9,40346	9,98561	9,41784	10,58216		20
	50	9,40825	9,98528	9,42297	10,57703		10
		475	34	508	508		
15	0	9,41300	9,98494	9,42805	10,57195	75	0
	10	9,41768	9,98460	9,43308	10,56692		50
	20	9,42232	9,98426	9,43806	10,56194		40
	39	9,42690	9,98391	9,44299	10,55701		30
	40	9,43143	9,98356	9,44787	10,55213		20
	50	9,43591	9,98320	9,45271	10,54729		10
		443	36	479	479		
16	0	9,44034	9,98284	9,45750	10,54250	74	0
	10	9,44472	9,98248	9,46224	10,53776		50
	20	9,44905	9,98211	9,46694	10,53306		40
	30	9,45334	9,98174	9,47160	10,52840		30
	40	9,45758	9,98136	9,47622	10,52378		20
	50	9,46178	9,98098	9,48080	10,51920		10
		416	38	454	454		
17	0	9,46594	9,98060	9,48534	10,51466	73	0
	10	9,47005	9,98021	9,48984	10,51016		50
	20	9,47411	9,97982	9,49430	10,50570		40
	30	9,47814	9,97942	9,49872	10,50128		30
	40	9,48213	9,97902	9,50311	10,49689		20
	50	9,48607	9,97861	9,50746	10,49254		10
		391	40	432	432		
18	0	9,48998	9,97821	9,51178	10,48822	72	0
	10	9,49385	9,97779	9,51606	10,48394		50
	20	9,49768	9,97738	9,52031	10,47969		40
	30	9,50148	9,97696	9,52452	10,47548		30
	40	9,50523	9,97653	9,52870	10,47130		20
	50	9,50896	9,97610	9,53285	10,46715		10
		368	43	412	412		
19	0	9,51264	9,97567	9,53697	10,46303	71	0
	10	9,51629	9,97523	9,54106	10,45894		50
	20	9,51991	9,97479	9,54512	10,45488		40
	30	9,52350	9,97435	9,54915	10,45085		30
	40	9,52705	9,97390	9,55315	10,44685		20
	50	9,53057	9,97344	9,55712	10,44288		10
		348	45	395	395		
20	0	9,53405	9,97299	9,56107	10,43893	70	0
Gr.	Min.					G.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

2. Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linie

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					G.	Min
20	0	9,53405	9,97299	9,56107	10,43893	70	0
	10	9,53751	9,97252	9,56498	10,43502		50
	20	9,54093	9,97206	9,56887	10,43113		40
	30	9,54433	9,97159	9,57274	10,42726		30
	40	9,54769	9,97111	9,57658	10,42342		20
	50	9,55102	9,97063	9,58039	10,41961		10
		331	48	379	379		
21	0	9,55433	9,97015	9,58418	10,41582	69	0
	10	9,55761	9,96966	9,58794	10,41206		50
	20	9,56085	9,96917	9,59168	10,40832		40
	30	9,56408	9,96868	9,59540	10,40460		30
	40	9,56727	9,96818	9,59909	10,40091		20
	50	9,57044	9,96767	9,60276	10,39724		10
		314	50	365	365		
22	0	9,57358	9,96717	9,60641	10,39359	68	0
	10	9,57669	9,96665	9,61004	10,38996		50
	20	9,57978	9,96614	9,61364	10,38636		40
	30	9,58284	9,96562	9,61722	10,38278		30
	40	9,58588	9,96509	9,62079	10,37921		20
	50	9,58889	9,96456	9,62433	10,37567		10
		299	53	352	352		
23	0	9,59188	9,96403	9,62785	10,37215	67	0
	10	9,59484	9,96349	9,63135	10,36865		50
	20	9,59778	9,96294	9,63484	10,36516		40
	30	9,60070	9,96240	9,63830	10,36170		30
	40	9,60359	9,96185	9,64175	10,35825		20
	50	9,60646	9,96129	9,64517	10,35483		10
		285	56	341	341		
24	0	9,60931	9,96073	9,64858	10,35142	66	0
	10	9,61214	9,96017	9,65197	10,34803		50
	20	9,61494	9,95960	9,65535	10,34465		40
	30	9,61773	9,95902	9,65870	10,34130		30
	40	9,62049	9,95844	9,66204	10,33796		20
	50	9,62323	9,95786	9,66537	10,33463		10
		272	58	330	330		
25	0	9,62595	9,95728	9,66867	10,33133	65	0
	10	9,62865	9,95668	9,67196	10,32804		50
	20	9,63133	9,95609	9,67524	10,32476		40
	30	9,63398	9,95549	9,67850	10,32150		30
	40	9,63662	9,95488	9,68174	10,31826		20
	50	9,63924	9,95427	9,68497	10,31503		10
		260	61	321	321		
26	0	9,64184	9,95366	9,68818	10,31182	64	0
Gr.	Min.					G.	Min
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel	

2. Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					G.	Min.
26	0	9,64184	9,95366	9,68818	10,31182	64	0
	10	9,64442	9,95304	9,69138	10,30862		50
	20	9,64698	9,95242	9,69457	10,30543		40
	30	9,64953	9,95179	9,69774	10,30226		30
	40	9,65205	9,95116	9,70089	10,29911		20
	50	9,65456	9,95052	9,70404	10,29596		10
		249	64	313	313		
27	0	9,65705	9,94988	9,70717	10,29283	63	0
	10	9,65952	9,94923	9,71028	10,28972		50
	20	9,66197	9,94858	9,71339	10,28661		40
	30	9,66441	9,94793	9,71648	10,28352		30
	40	9,66682	9,94727	9,71955	10,28045		20
	50	9,66922	9,94660	9,72262	10,27738		10
		238	67	305	305		
28	0	9,67161	9,94593	9,72567	10,27433	62	0
	10	9,67398	9,94526	9,72872	10,27128		50
	20	9,67633	9,94458	9,73175	10,26825		40
	30	9,67866	9,94390	9,73476	10,26524		30
	40	9,68098	9,94321	9,73777	10,26223		20
	50	9,68328	9,94252	9,74077	10,25923		10
		229	70	298	298		
29	0	9,68557	9,94182	9,74375	10,25625	61	0
	10	9,68784	9,94112	9,74673	10,25327		50
	20	9,69010	9,94041	9,74969	10,25031		40
	30	9,69234	9,93970	9,75264	10,24736		30
	40	9,69456	9,93898	9,75558	10,24442		20
	50	9,69677	9,93826	9,75852	10,24148		10
		220	73	292	292		
30	0	9,69897	9,93753	9,76144	10,23856	60	0
	10	9,70115	9,93680	9,76435	10,23565		50
	20	9,70332	9,93606	9,76725	10,23275		40
	30	9,70547	9,93532	9,77015	10,22985		30
	40	9,70761	9,93457	9,77303	10,22697		20
	50	9,70973	9,93382	9,77591	10,22409		10
		211	75	286	286		
31	0	9,71184	9,93307	9,77877	10,22123	59	0
	10	9,71393	9,93230	9,78163	10,21837		50
	20	9,71602	9,93154	9,78448	10,21552		40
	30	9,71809	9,93077	9,78732	10,21268		30
	40	9,72014	9,92999	9,79015	10,20985		20
	50	9,72218	9,92921	9,79297	10,20703		10
		203	79	282	282		
32	0	9,72421	9,92842	9,79579	10,20421	58	0
Gr.	Min.					G.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

2. Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					G.	Min.
32	0	9,72421	9,92842	9,79579	10,20421	58	0
	10	9,72622	9,92763	9,79860	10,20140		50
	20	9,72823	9,92683	9,80140	10,19860		40
	30	9,73022	9,92603	9,80419	10,19581		30
	40	9,73219	9,92522	9,80697	10,19303		20
	50	9,73416	9,92441	9,80975	10,19025		10
		195	82	277	277		
33	0	9,73611	9,92359	9,81252	10,18748	57	0
	10	9,73805	9,92277	9,81528	10,18472		50
	20	9,73997	9,92194	9,81803	10,18197		40
	30	9,74189	9,92111	9,82078	10,17922		30
	40	9,74379	9,92027	9,82352	10,17648		20
	50	9,74568	9,91942	9,82626	10,17374		10
		188	85	273	273		
34	0	9,74756	9,91857	9,82899	10,17101	56	0
	10	9,74943	9,91772	9,83171	10,16829		50
	20	9,75128	9,91686	9,83442	10,16558		40
	30	9,75313	9,91599	9,83713	10,16287		30
	40	9,75496	9,91512	9,83984	10,16016		20
	50	9,75678	9,91425	9,84254	10,15746		10
		181	89	269	269		
35	0	9,75859	9,91336	9,84523	10,15477	55	0
	10	9,76039	9,91248	9,84791	10,15209		50
	20	9,76218	9,91158	9,85059	10,14941		40
	30	9,76395	9,91069	9,85327	10,14673		30
	40	9,76572	9,90978	9,85594	10,14406		20
	50	9,76747	9,90887	9,85860	10,14140		10
		175	91	266	266		
36	0	9,76922	9,90796	9,86126	10,13874	54	0
	10	9,77095	9,90704	9,86392	10,13608		50
	20	9,77268	9,90611	9,86656	10,13344		40
	30	9,77439	9,90518	9,86921	10,13079		30
	40	9,77609	9,90424	9,87185	10,12815		20
	50	9,77778	9,90330	9,87448	10,12552		10
		168	95	263	263		
37	0	9,77946	9,90235	9,87711	10,12289	53	0
	10	9,78113	9,90139	9,87974	10,12026		50
	20	9,78280	9,90043	9,88236	10,11764		40
	30	9,78445	9,89947	9,88498	10,11502		30
	40	9,78609	9,89849	9,88759	10,11241		20
	50	9,78772	9,89752	9,89020	10,10980		10
		162	99	261	261		
38	0	9,78934	9,89653	9,89281	10,10719	52	0
Gr.	Min.					G.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

2. Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					G.	Min.
38	0	9,78934	9,89653	9,89281	10,10719	52	0
	10	9,79095	9,89554	9,89541	10,10459		50
	20	9,79256	9,89455	9,89801	10,10199		40
	30	9,79415	9,89354	9,90061	10,09939		30
	40	9,79573	9,89254	9,90320	10,09680		20
	50	9,79731	9,89152	9,90578	10,09422		10
		156	102	259	259		
39	0	9,79887	9,89050	9,90837	10,09163	51	0
	10	9,80043	9,88948	9,91095	10,08905		50
	20	9,80197	9,88844	9,91353	10,08647		40
	30	9,80351	9,88741	9,91610	10,08390		30
	40	9,80504	9,88636	9,91868	10,08132		20
	50	9,80656	9,88531	9,92125	10,07875		10
		151	106	256	256		
40	0	9,80807	9,88425	9,92381	10,07619	50	0
	10	9,80957	9,88319	9,92638	10,07362		50
	20	9,81106	9,88212	9,92894	10,07106		40
	30	9,81254	9,88105	9,93150	10,06850		30
	40	9,81402	9,87996	9,93406	10,06594		20
	50	9,81549	9,87887	9,93661	10,06339		10
		145	109	255	255		
41	0	9,81694	9,87778	9,93916	10,06084	49	0
	10	9,81839	9,87668	9,94171	10,05829		50
	20	9,81983	9,87557	9,94426	10,05574		40
	30	9,82126	9,87446	9,94681	10,05319		30
	40	9,82269	9,87334	9,94935	10,05065		20
	50	9,82410	9,87221	9,95190	10,04810		10
		141	114	254	254		
42	0	9,82551	9,87107	9,95444	10,04556	48	0
	10	9,82691	9,86993	9,95698	10,04302		50
	20	9,82830	9,86879	9,95952	10,04048		40
	30	9,82968	9,86763	9,96205	10,03795		30
	40	9,83106	9,86647	9,96459	10,03541		20
	50	9,83242	9,86530	9,96712	10,03288		10
		136	117	254	254		
43	0	9,83378	9,86413	9,96966	10,03034	47	0
	10	9,83513	9,86295	9,97219	10,02781		50
	20	9,83648	9,86176	9,97472	10,02528		40
	30	9,83781	9,86056	9,97725	10,02275		30
	40	9,83914	9,85936	9,97978	10,02022		20
	50	9,84046	9,85815	9,98231	10,01769		10
		131	122	253	253		
44	0	9,84177	9,85693	9,98484	10,01516	46	0
Gr.	Min.					G.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

2. Tafel der **Logarithmen** trigonometrischer Linien

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					G.	Min.
44	0	9,84177	9,85693	9,98484	10,01516	46	0
	10	9,84308	9,85571	9,98737	10,01263		50
	20	9,84437	9,85448	9,98989	10,01011		40
	30	9,84566	9,85324	9,99242	10,00758		30
	40	9,84694	9,85200	9,99495	10,00505		20
	50	9,84822	9,85074	9,99747	10,00253		10
		127	125	253	253		
45	0	9,84949	9,84949	10,00000	10,00000	45	0
Gr.	Min.					G.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

III. Kreistafeln.

1. Einrichtung und Gebrauch der Bogentabelle. Die Bogentabelle giebt in zwei neben einander stehenden Verticalcolumnen die jedem Grade und jeder Minute entsprechende Länge des Kreisbogens bei dem Halbmesser r = Eins. Links steht die Grad- oder Minutenzahl, rechts die Länge des zugehörigen Bogens. Hiernach ist z. B.

$arc.\ 135^0$ oder Bogen von 135^0, $= 2{,}3562$; ferner

$arc.\ 0^0{,}56' = 0{,}0163$, ferner $arc.\ 105^0{,}21' = \left\{\begin{matrix}1{,}8326\\ 61\end{matrix}\right\} = 1{,}8387$;

auch $arc.\ 69^0{,}27'{,}40'' = \left\{\begin{matrix}1{,}2043\\ 79\\ 2\end{matrix}\right\} = 1{,}2124$. Umgekehrt folgt für den Bogen 2,0071 der Winkel 115°; für den Bogen $\beta = 3{,}7365$ aber, da

$\underline{3{,}7350}$ = Bogen von 214°, und
15 = Bogen von 5′ ist,
$\beta^0 = 214^0{,}5'$; ferner für

den Bogen $\beta = 0{,}6521$,
da $\underline{0{,}6458}$ = Bogen von 37°,
63
ferner $\underline{61}$ = Bogen von 21′,
2
und 2 = Bogen von 40″,
$\beta^0 = 37^0{,}21'{,}40''$.

2. Einrichtung und Gebrauch der Umfangstabelle. Diese Tabelle giebt die gegebenen Durchmessern entsprechenden Kreisumfänge an. Ihre Einrichtung stimmt mit der Einrichtung der Potenzentafeln, Wurzeltafeln u. s. w. vollkommen überein. Man findet daher in ihr den einem in 3 Ziffern ausgedrückten Durchmesser entsprechenden Kreisumfang, wenn man die vorderste Ziffer der gegebenen Zahl in der ober-

sten Horizontal- und die hinteren Ziffern in der ersten Verticalcolumne aufsucht, und nun zusieht, welche Zahl mit jener Ziffer in einer Vertical- und mit diesen Ziffern in einer Horizontalreihe sich befindet. Es ist hiernach für den Durchmesser $d =$ 237 Zoll der Umfang $p = 744{,}56$ Zoll, für $d = 5{,}08$, $p =$ 15,9593, für $d = 0{,}87$, $p = 2{,}7332$. Umgekehrt entspricht dem Umfange $p = 2114{,}3$ Fuß, der Durchmesser $d = 673$, und $p = 116{,}553$ giebt $d = 27{,}1$. Ferner $d = 59{,}36$ giebt $p = 186{,}27 + 0{,}6 \,.\, (0{,}611 - 0{,}270) = 186{,}27 + 0{,}205$ $= 186{,}475$, und $p = 1{,}5191$ Fuß entspricht

$$d = 0{,}483 + \frac{1{,}51910 - 1{,}51739}{1{,}52053 - 1{,}51739} \cdot \frac{1}{1000} = 0{,}483 + \frac{171}{314} \cdot \frac{1}{1000}$$
$$= 0{,}483 + 0{,}00054 = 0{,}48354 \text{ Fuß.}$$

3. Einrichtung und Gebrauch der Inhaltstabelle. Mit Hülfe dieser Tabelle läßt sich aus dem Durchmesser eines Kreises der Inhalt desselben, und aus dem Inhalte der Durchmesser finden. Die Einrichtung dieser Tabelle weicht von der Einrichtung der Umfangstabelle nicht ab. Hiernach ist z. B. für den Durchmesser $d = 431$ Fuß, der Inhalt $F =$ 145897 Quadratfuß, für $d = 4{,}9$, $F = 18{,}857$; $d = 26{,}73$, $F = 559{,}90 + 0{,}3 \,.\, (56{,}411 - 55{,}990) = 559{,}90 + 1{,}26$ $= 561{,}16$; umgekehrt, dem Inhalte $F = 1690{,}93$ Quadratzoll, entspricht der Durchmesser $d = 46{,}4$, ferner $F = 169{,}72$ giebt $d = 14{,}7$, endlich für $F = 8{,}367$ ist

$$d = 3{,}26 + \frac{8{,}3670 - 8{,}3469}{8{,}3982 - 8{,}3469} \cdot \frac{1}{100} = 3{,}264.$$

Beim Setzen des Decimalstriches ist zu berücksichtigen, daß zwei Decimalziffern in F nur einer Decimalziffer in d entsprechen.

4. Einrichtung und Gebrauch der Segmententafel. Diese Tabelle enthält die Höhen und Inhalte der Segmente, welche gegebenen Centriwinkeln beim Halbmesser 1 entsprechen. Die erste Columne enthält die Gradzahl der Winkel, die zweite die Bogenhöhe und die dritte den Inhalt des entsprechenden Segmentes. Hiernach ist für das dem Centriwinkel 116° entsprechende Segment beim Halbmesser 1 die Bogenhöhe $h = 0{,}4701$ und der Inhalt $F = 0{,}56289$, und daher beim Halbmesser $3\frac{1}{2}$ Fuß, $h = 0{,}4701 \,.\, 3{,}5 = 1{,}645$ Fuß, und $F = 0{,}56289 \,.\, 3{,}5^2 = 6{,}895$ Quadratfuß. Umgekehrt, dem Inhalte $F = 0{,}42242$ Quadratfuß entspricht bei 1 Fuß Halbmesser, der Centriwinkel $\beta^0 = 104^0$ und die Bogenhöhe $h =$ 0,3843 Fuß. Ist ferner beim Halbmesser $r = 5$ Fuß, der Inhalt 16,425 Quadratfuß, also für den Halbmesser 1 der Inhalt $F = \frac{16{,}425}{5^2} = 0{,}657$, so hat man den Centriwinkel $\beta^0 =$

$$123^0 + \frac{0{,}65700 - 0{,}65404}{0{,}66759 - 0{,}65404} \cdot 60' = 139^0 + \frac{296 \,.\, 60}{355} =$$

$123^0, 50'$, und die Bogenhöhe $h = 5 \,.\, (0{,}5228 + \frac{5}{6} \,.\, 0{,}0077)$ $= 5 \,.\, (0{,}5228 + 0{,}0064) = 2{,}646$ Fuß.

1. Bogentabelle.
($r = 1$.)

Gr.	Bogen.	Gr.	Bogen.	Gr.	Bogen.	Gr.	Bogen.
1	0,0175	41	0,7156	81	1,4137	121	2,1118
2	0,0349	42	0,7330	82	1,4312	122	2,1293
3	0,0524	43	0,7505	83	1,4486	123	2,1468
4	0,0698	44	0,7679	84	1,4661	124	2,1642
5	0,0873	45	0,7854	85	1,4835	125	2,1817
6	0,1047	46	0,8029	86	1,5010	126	2,1991
7	0,1222	47	0,8203	87	1,5184	127	2,2166
8	0,1396	48	0,8378	88	1,5359	128	2,2340
9	0,1571	49	0,8552	89	1,5533	129	2,2515
10	0,1745	50	0,8727	90	1,5708	130	2,2689
11	0,1920	51	0,8901	91	1,5882	131	2,2864
12	0,2094	52	0,9076	92	1,6057	132	2,3038
13	0,2269	53	0,9250	93	1,6232	133	2,3213
14	0,2443	54	0,9425	94	1,6406	134	2,3387
15	0,2618	55	0,9599	95	1,6581	135	2,3562
16	0,2793	56	0,9774	96	1,6755	136	2,3736
17	0,2967	57	0,9948	97	1,6930	137	2,3911
18	0,3142	58	1,0123	98	1,7104	138	2,4086
19	0,3316	59	1,0297	99	1,7279	139	2,4260
20	0,3491	60	1,0472	100	1,7453	140	2,4435
21	0,3665	61	1,0647	101	1,7628	141	2,4609
22	0,3840	62	1,0821	102	1,7802	142	2,4784
23	0,4014	63	1,0996	103	1,7977	143	2,4958
24	0,4189	64	1,1170	104	1,8151	144	2,5133
25	0,4363	65	1,1345	105	1,8326	145	2,5307
26	0,4538	66	1,1519	106	1,8500	146	2,5482
27	0,4712	67	1,1694	107	1,8675	147	2,5656
28	0,4887	68	1,1868	108	1,8850	148	2,5831
29	0,5061	69	1,2043	109	1,9024	149	2,6005
30	0,5236	70	1,2217	110	1,9199	150	2,6180
31	0,5411	71	1,2392	111	1,9373	151	2,6354
32	0,5585	72	1,2566	112	1,9548	152	2,6529
33	0,5760	73	1,2741	113	1,9722	153	2,6704
34	0,5934	74	1,2915	114	1,9897	154	2,6878
35	0,6109	75	1,3090	115	2,0071	155	2,7053
36	0,6283	76	1,3265	116	2,0246	156	2,7227
37	0,6458	77	1,3439	117	2,0420	157	2,7402
38	0,6632	78	1,3614	118	2,0595	158	2,7576
39	0,6807	79	1,3788	119	2,0769	159	2,7751
40	0,6981	80	1,3963	120	2,0944	160	2,7925

1. Bogentabelle.
($r = 1.$)

Gr.	Bogen.	Gr.	Bogen.	Gr.	Bogen.	Gr.	Bogen.
161	2,8100	201	3,5081	241	4,2062	281	4,9044
162	2,8274	202	3,5256	242	4,2237	282	4,9218
163	2,8449	203	3,5430	243	4,2412	283	4,9393
164	2,8623	204	3,5605	244	4,2586	284	4,9567
165	2,8798	205	3,5779	245	4,2761	285	4,9742
166	2,8972	206	3,5954	246	4,2935	286	4,9916
167	2,9147	207	3,6128	247	4,3110	287	5,0091
168	2,9322	208	3,6303	248	4,3284	288	5,0265
169	2,9496	209	3,6477	249	4,3459	289	5,0440
170	2,9671	210	3,6652	250	4,3633	290	5,0615
171	2,9845	211	3,6826	251	4,3808	291	5,0789
172	3,0020	212	3,7001	252	4,3982	292	5,0964
173	3,0194	213	3,7176	253	4,4157	293	5,1138
174	3,0369	214	3,7350	254	4,4331	294	5,1313
175	3,0543	215	3,7525	255	4,4506	295	5,1487
176	3,0718	216	3,7699	256	4,4680	296	5,1662
177	3,0892	217	3,7874	257	4,4855	297	5,1836
178	3,1067	218	3,8048	258	4,5029	298	5,2011
179	3,1241	219	3,8223	259	4,5204	299	5,2185
180	3,1416	220	3,8397	260	4,5379	300	5,2360
181	3,1590	221	3,8572	261	4,5553	301	5,2534
182	3,1765	222	3,8746	262	4,5728	302	5,2709
183	3,1940	223	3,8921	263	4,5902	303	5,2883
184	3,2114	224	3,9095	264	4,6077	304	5,3058
185	3,2289	225	3,9270	265	4,6251	305	5,3233
186	3,2463	226	3,9444	266	4,6426	306	5,3407
187	3,2638	227	3,9619	267	4,6600	307	5,3582
188	3,2812	228	3,9794	268	4,6775	308	5,3756
189	3,2987	229	3,9968	269	4,6949	309	5,3931
190	3,3161	230	4,0143	270	4,7124	310	5,4105
191	3,3336	231	4,0317	271	4,7298	311	5,4280
192	3,3510	232	4,0492	272	4,7473	312	5,4454
193	3,3685	233	4,0666	273	4,7647	313	5,4629
194	3,3859	234	4,0841	274	4,7822	314	5,4803
195	3,4034	235	4,1015	275	4,7997	315	5,4978
196	3,4208	236	4,1190	276	4,8171	316	5,5152
197	3,4383	237	4,1364	277	4,8346	317	5,5327
198	3,4558	238	4,1539	278	4,8520	318	5,5501
199	3,4732	239	4,1713	279	4,8695	319	5,5676
200	3,4907	240	4,1888	280	4,8869	320	5,5851

1. Bogentabelle.
(r = 1.)

Gr.	Bogen.	Minuten. Min.	Bogen.	Min.	Bogen.
321	5,6025	1	0,00029	31	0,00902
322	5,6200	2	0,00058	32	0,00931
323	5,6374	3	0,00087	33	0,00960
324	5,6549	4	0,00116	34	0,00989
325	5,6723	5	0,00145	35	0,01018
326	5,6898	6	0,00175	36	0,01047
327	5,7072	7	0,00204	37	0,01076
328	5,7247	8	0,00233	38	0,01105
329	5,7421	9	0,00262	39	0,01134
330	5,7596	10	0,00291	40	0,01164
331	5,7770	11	0,00320	41	0,01193
332	5,7945	12	0,00349	42	0,01222
333	5,8119	13	0,00378	43	0,01251
334	5,8294	14	0,00407	44	0,01280
335	5,8469	15	0,00436	45	0,01309
336	5,8643	16	0,00465	46	0,01338
337	5,8818	17	0,00495	47	0,01367
338	5,8992	18	0,00524	48	0,01398
339	5,9167	19	0,00553	49	0,01425
340	5,9341	20	0,00582	50	0,01454
341	5,9516	21	0,00611	51	0,01484
342	5,9690	22	0,00640	52	0,01513
343	5,9865	23	0,00669	53	0,01542
344	6,0039	24	0,00698	54	0,01571
345	6,0214	25	0,00727	55	0,01600
346	6,0388	26	0,00756	56	0,01629
347	6,0563	27	0,00785	57	0,01658
348	6,0737	28	0,00814	58	0,01687
349	6,0912	29	0,00844	59	0,01716
350	6,1087	30	0,00873	60	0,01745
351	6,1261	Secunden.			
352	6,1436				
353	6,1610				
354	6,1785				
355	6,1959				
356	6,2134	Secun.	Bogen.	Secun.	Bogen.
357	6,2308				
358	6,2483	10	0,00005	40	0,00019
359	6,2657	20	0,00010	50	0,00024
360	6,2832	30	0,00015	60	0,00029

2. Kreisumfangstabelle.

Durchmesser.	Umfang.				
	0	100	200	300	400
0	0,0000	314,16	628,32	942,48	1256,64
1	3,1416	317,30	631,46	945,62	1259,78
2	6,2832	320,44	634,60	948,76	1262,92
3	9,4248	323,58	637,74	951,90	1266,06
4	12,566	326,73	640,89	955,04	1269,20
5	15,708	329,87	644,03	958,19	1272,35
6	18,850	333,01	647,17	961,33	1275,49
7	21,991	336,15	650,31	964,47	1278,63
8	25,133	339,29	653,45	967,61	1281,77
9	28,274	342,43	656,59	970,75	1284,91
10	31,416	345,58	659,73	973,89	1288,05
11	34,558	348,72	662,88	977,04	1291,19
12	37,699	351,86	666,02	980,18	1294,34
13	40,841	355,00	669,16	983,32	1297,48
14	43,982	358,14	672,30	986,46	1300,62
15	47,124	361,28	675,44	989,60	1303,76
16	50,265	364,42	678,58	992,74	1306,90
17	53,407	367,57	681,73	995,88	1310,04
18	56,549	370,71	684,87	999,03	1313,19
19	59,690	373,85	688,01	1002,17	1316,33
20	62,832	376,99	691,15	1005,31	1319,47
21	65,973	380,13	694,29	1008,45	1322,61
22	69,115	383,27	697,43	1011,59	1325,75
23	72,257	386,42	700,58	1014,73	1328,89
24	75,398	389,56	703,72	1017,88	1332,04
25	78,540	392,70	706,86	1021,02	1335,18
26	81,681	395,84	710,00	1024,16	1338,32
27	84,823	398,98	713,14	1027,30	1341,46
28	87,965	402,12	716,28	1030,44	1344,60
29	91,106	405,27	719,42	1033,58	1347,74
30	94,248	408,41	722,57	1036,73	1350,88
31	97,389	411,55	725,71	1039,87	1354,03
32	100,53	414,69	728,85	1043,01	1357,17
33	103,67	417,83	731,99	1046,15	1360,31
34	106,81	420,97	735,13	1049,29	1363,45
35	109,96	424,12	738,27	1052,43	1366,59
36	113,10	427,26	741,42	1055,58	1369,73
37	116,24	430,40	744,56	1058,72	1372,88
38	119,38	433,54	747,70	1061,86	1376,02
39	122,52	436,68	750,84	1065,00	1379,16

2. Kreisumfangstabelle.

Durchmesser.	Umfang.				
	500	600	700	800	900
0	1570,80	1884,96	2199,11	2513,27	2827,43
1	1573,94	1888,10	2202,26	2516,42	2830,58
2	1577,08	1891,24	2205,40	2519,56	2833,72
3	1580,22	1894,38	2208,54	2522,70	2836,86
4	1583,36	1897,52	2211,68	2525,84	2840,00
5	1586,50	1900,66	2214,82	2528,98	2843,14
6	1589,65	1903,81	2217,96	2532,12	2846,28
7	1592,79	1906,95	2221,11	2535,27	2849,42
8	1595,93	1910,09	2224,25	2538,41	2852,57
9	1599,07	1913,23	2227,39	2541,55	2855,71
10	1602,21	1916,37	2230,53	2544,69	2858,85
11	1605,35	1919,51	2233,67	2547,83	2861,99
12	1608,50	1922,65	2236,81	2550,97	2865,13
13	1611,64	1925,80	2239,96	2554,11	2868,27
14	1614,78	1928,94	2243,10	2557,26	2871,42
15	1617,92	1932,08	2246,24	2560,40	2874,56
16	1621,06	1935,22	2249,38	2563,54	2877,70
17	1624,20	1938,36	2252,52	2566,68	2880,84
18	1627,35	1941,50	2255,66	2569,82	2883,98
19	1630,49	1944,65	2258,81	2572,96	2887,12
20	1633,63	1947,79	2261,95	2576,11	2890,27
21	1636,77	1950,93	2265,09	2579,25	2893,41
22	1639,91	1954,07	2268,23	2582,39	2896,55
23	1643,05	1957,21	2271,37	2585,53	2899,69
24	1646,20	1960,35	2274,51	2588,67	2902,83
25	1649,34	1963,50	2277,65	2591,81	2905,97
26	1652,48	1966,64	2280,80	2594,96	2909,11
27	1655,62	1969,78	2283,94	2598,10	2912,26
28	1658,76	1972,92	2287,08	2601,24	2915,40
29	1661,90	1976,06	2290,22	2604,38	2918,54
30	1665,04	1979,20	2293,36	2607,52	2921,68
31	1668,19	1982,35	2296,50	2610,66	2924,82
32	1671,33	1985,49	2299,65	2613,81	2927,96
33	1674,47	1988,63	2302,79	2616,95	2931,11
34	1677,61	1991,77	2305,93	2620,09	2934,25
35	1680,75	1994,91	2309,07	2623,23	2937,39
36	1683,89	1998,05	2312,21	2626,37	2940,53
37	1687,04	2001,19	2315,35	2629,51	2943,67
38	1690,18	2004,34	2318,50	2632,65	2946,81
39	1693,32	2007,48	2321,64	2635,80	2949,96

2. Kreisumfangstabelle.

Durchmesser.	Umfang.				
	0	100	200	300	400
40	125,66	439,82	753,98	1068,14	1382,30
41	128,81	442,96	757,12	1071,28	1385,44
42	131,95	446,11	760,27	1074,42	1388,58
43	135,09	449,25	763,41	1077,57	1391,73
44	138,23	452,39	766,55	1080,71	1394,87
45	141,37	455,53	769,69	1083,85	1398,01
46	144,51	458,67	772,83	1086,99	1401,15
47	147,65	461,81	775,97	1090,13	1404,29
48	150,80	464,96	779,12	1093,27	1407,43
49	153,94	468,10	782,26	1096,42	1410,58
50	157,08	471,24	785,40	1099,56	1413,72
51	160,22	474,38	788,54	1102,70	1416,86
52	163,36	477,52	791,68	1105,84	1420,00
53	166,50	480,66	794,82	1108,98	1423,14
54	169,65	483,81	797,96	1112,12	1426,28
55	172,79	486,95	801,11	1115,27	1429,42
56	175,93	490,09	804,25	1118,41	1432,57
57	179,07	493,23	807,39	1121,55	1435,71
58	182,21	496,37	810,53	1124,69	1438,85
59	185,35	499,51	813,67	1127,83	1441,99
60	188,50	502,65	816,81	1130,97	1445,13
61	191,64	505,80	819,96	1134,11	1448,27
62	194,78	508,94	823,10	1137,26	1451,42
63	197,92	512,08	826,24	1140,40	1454,56
64	201,06	515,22	829,38	1143,54	1457,70
65	204,20	518,36	832,52	1146,68	1460,84
66	207,35	521,50	835,66	1149,82	1463,98
67	210,49	524,65	838,81	1152,96	1467,12
68	213,63	527,79	841,95	1156,11	1470,27
69	216,77	530,93	845,09	1159,25	1473,41
70	219,91	534,07	848,23	1162,39	1476,55
71	223,05	537,21	851,37	1165,53	1479,69
72	226,19	540,35	854,51	1168,67	1482,83
73	229,34	543,50	857,66	1171,81	1485,97
74	232,48	546,64	860,80	1174,96	1489,11
75	235,62	549,78	863,94	1178,10	1492,26
76	238,76	552,92	867,08	1181,24	1495,40
77	241,90	556,06	870,22	1184,38	1498,54
78	245,04	559,20	873,36	1187,52	1501,68
79	248,19	562,35	876,50	1190,63	1504,82

2. Kreisumfangstabelle.

Durchmesser.	Umfang.				
	500	600	700	800	900
40	1696,46	2010,62	2324,78	2638,94	2953,10
41	1699,60	2013,76	2327,92	2642,08	2956,24
42	1702,74	2016,90	2331,06	2645,22	2959,38
43	1705,88	2020,04	2334,20	2648,36	2962,52
44	1709,03	2023,19	2337,34	2651,50	2965,66
45	1712,17	2026,33	2340,49	2654,65	2968,81
46	1715,31	2029,47	2343,63	2657,79	2971,95
47	1718,45	2032,61	2346,77	2660,93	2975,09
48	1721,59	2035,75	2349,91	2664,07	2978,23
49	1724,73	2038,89	2353,05	2667,21	2981,37
50	1727,88	2042,04	2356,19	2670,35	2984,51
51	1731,02	2045,18	2359,34	2673,50	2987,65
52	1734,16	2048,32	2362,48	2676,64	2990,80
53	1737,30	2051,46	2365,62	2679,78	2993,94
54	1740,44	2054,60	2368,76	2682,92	2997,08
55	1743,58	2057,74	2371,90	2686,06	3000,22
56	1746,73	2060,88	2375,04	2689,20	3003,36
57	1749,87	2064,03	2378,19	2692,34	3006,50
58	1753,01	2067,17	2381,33	2695,49	3009,65
59	1756,15	2070,31	2384,47	2698,63	3012,79
60	1759,29	2073,45	2387,61	2701,77	3015,93
61	1762,43	2076,59	2390,75	2704,91	3019,07
62	1765,58	2079,73	2393,89	2708,05	3022,21
63	1768,72	2082,88	2397,04	2711,19	3025,35
64	1771,86	2086,02	2400,18	2714,34	3028,50
65	1775,00	2089,16	2403,32	2717,48	3031,64
66	1778,14	2092,30	2406,46	2720,62	3034,78
67	1781,28	2095,44	2409,60	2723,76	3037,92
68	1784,42	2098,58	2412,74	2726,90	3041,06
69	1787,57	2101,73	2415,88	2730,04	3044,20
70	1790,71	2104,87	2419,03	2733,19	3047,34
71	1793,85	2108,01	2422,17	2736,33	3050,49
72	1796,99	2111,15	2425,31	2739,47	3053,63
73	1800,13	2114,29	2428,45	2742,61	3056,77
74	1803,27	2117,43	2431,59	2745,75	3059,91
75	1806,42	2120,58	2434,73	2748,89	3063,05
76	1809,56	2123,72	2437,88	2752,04	3066,19
77	1812,70	2126,86	2441,02	2755,18	3069,34
78	1815,84	2130,00	2444,16	2758,32	3072,48
79	1818,98	2133,14	2447,30	2761,46	3075,62

2. Kreisumfangstabelle.

Durchmesser	Umfang.				
	0	100	200	300	400
80	251,33	565,49	879,65	1193,81	1507,96
81	254,47	568,63	882,79	1196,95	1511,11
82	257,61	571,77	885,93	1200,09	1514,25
83	260,75	574,91	889,07	1203,23	1517,39
84	263,89	578,05	892,21	1206,37	1520,53
85	267,04	581,19	895,35	1209,51	1523,67
86	270,18	584,34	898,50	1212,65	1526,81
87	273,32	587,48	901,64	1215,80	1529,96
88	276,46	590,62	904,78	1218,94	1533,10
89	279,60	593,76	907,92	1222,08	1536,24
90	282,74	596,90	911,06	1225,22	1539,38
91	285,88	600,04	914,20	1228,36	1542,52
92	289,03	603,19	917,35	1231,50	1545,66
93	292,17	606,33	920,49	1234,65	1548,81
94	295,31	609,47	923,63	1237,79	1551,95
95	298,45	612,61	926,77	1240,93	1555,09
96	301,59	615,75	929,91	1244,07	1558,23
97	304,73	618,89	933,05	1247,21	1561,37
98	307,88	622,04	936,19	1250,35	1564,51
99	311,02	625,18	939,34	1253,50	1567,65
100	314,16	628,32	942,48	1256,64	1570,80

3. Kreisinhaltstabelle.

Durchmesser	Inhalt.				
	0	100	200	300	400
0	0,0000	7854,0	31416	70686	125664
1	0,7854	8011,9	31731	71158	126293
2	3,1416	8171,3	32047	71631	126923
3	7,0686	8332,3	32365	72107	127556
4	12,5664	8494,9	32685	72583	128190
5	19,6350	8659,0	33006	73062	128825
6	28,2743	8824,7	33329	73542	129462
7	38,4845	8992,0	33654	74023	130100
8	50,2655	9160,9	33979	74506	130741
9	63,6173	9331,3	34307	74991	131382

2. Kreisumfangstabelle.

Durchmesser	Umfang				
	500	600	700	800	900
80	1822,12	2136,28	2450,44	2764,60	3078,76
81	1825,27	2139,42	2453,58	2767,74	3081,90
82	1828,41	2142,57	2456,73	2770,88	3085,04
83	1831,55	2145,71	2459,87	2774,03	3088,19
84	1834,69	2148,85	2463,01	2777,17	3091,33
85	1837,83	2151,99	2466,15	2780,31	3094,47
86	1840,97	2155,13	2469,29	2783,45	3097,61
87	1844,11	2158,27	2472,43	2786,59	3100,75
88	1847,26	2161,42	2475,58	2789,73	3103,89
89	1850,40	2164,56	2478,72	2792,88	3107,04
90	1853,54	2167,70	2481,86	2796,02	3110,18
91	1856,68	2170,84	2485,00	2799,16	3113,32
92	1859,82	2173,98	2488,14	2802,30	3116,46
93	1862,96	2177,12	2491,28	2805,44	3119,60
94	1866,11	2180,27	2494,42	2808,58	3122,74
95	1869,25	2183,41	2497,57	2811,73	3125,88
96	1872,39	2186,55	2500,71	2814,87	3129,03
97	1875,53	2189,69	2503,85	2818,01	3132,17
98	1878,67	2192,83	2506,99	2821,15	3135,31
99	1881,81	2195,97	2510,13	2824,29	3138,45
100	1884,96	2199,11	2513,27	2827,43	3141,59

3. Kreisinhaltstabelle.

Durchmesser	Inhalt				
	500	600	700	800	900
0	196350	282743	384845	502655	636173
1	197136	283687	385945	503912	637587
2	197923	284631	387047	505171	639003
3	198713	285578	388151	506432	640421
4	199504	286526	389256	507694	641840
5	200296	287475	390363	508958	643261
6	201090	288426	391471	510223	644683
7	201886	289379	392580	511490	646107
8	202683	290333	393692	512758	647533
9	203482	291289	394805	514028	648960

3. Kreisinhaltstabelle.

Durchmesser	Inhalt 0	100	200	300	400
10	78,54	9503,3	34636	75477	132025
11	95,03	9676,9	34967	75964	132670
12	113,10	9852,0	35299	76454	133317
13	132,73	10028,8	35633	76945	133965
14	153,94	10207,0	35968	77437	134614
15	176,71	10386,9	36305	77931	135265
16	201,06	10568,3	36644	78427	135918
17	226,98	10751,3	36984	78924	136572
18	254,47	10935,9	37325	79423	137228
19	283,53	11122,0	37668	79923	137885
20	314,16	11310	38013	80425	138544
21	346,36	11499	38360	80928	139205
22	380,13	11690	38708	81433	139867
23	415,48	11882	39057	81940	140531
24	452,39	12076	39408	82448	141196
25	490,87	12272	39761	82958	141863
26	530,93	12469	40115	83469	142531
27	572,56	12668	40471	83982	143201
28	615,75	12868	40828	84496	143872
29	660,52	13070	41187	85012	144545
30	706,86	13273	41548	85530	145220
31	754,77	13478	41910	86049	145896
32	804,25	13685	42273	86570	146574
33	855,30	13893	42638	87092	147254
34	907,92	14103	43005	87616	147934
35	962,11	14314	43374	88141	148617
36	1017,88	14527	43744	88668	149301
37	1075,21	14741	44115	89197	149987
38	1134,11	14957	44488	89727	150674
39	1194,59	15175	44863	90259	151363
40	1256,63	15394	45239	90792	152053
41	1320,25	15615	45617	91327	152745
42	1385,44	15837	45996	91863	153439
43	1452,20	16061	46377	92401	154134
44	1520,53	16286	46759	92941	154830
45	1590,43	16513	47144	93482	155528
46	1661,90	16742	47529	94025	156228
47	1734,94	16972	47916	94569	156930
48	1809,56	17203	48305	95115	157633
49	1885,74	17437	48695	95662	158337

3. Kreisinhaltstabelle.

Durch-messer	Inhalt				
	500	600	700	800	900
10	204282	292247	395919	515300	650388
11	205084	293206	397035	516573	651818
12	205887	294166	398153	517848	653250
13	206692	295128	399272	519124	654684
14	207499	296092	400393	520402	656118
15	208307	297057	401515	521681	657555
16	209117	298024	402639	522962	658993
17	209928	298992	403765	524245	660433
18	210741	299962	404892	525529	661874
19	211556	300934	406020	526814	663317
20	212372	301907	407150	528102	664761
21	213189	302882	408282	529391	666207
22	214008	303858	409416	530681	667654
23	214829	304836	410550	531973	669103
24	215651	305815	411687	533267	670554
25	216475	306796	412825	534562	672006
26	217301	307779	413965	535858	673460
27	218128	308763	415106	537157	674915
28	218956	309748	416248	538456	676372
29	219787	310736	417393	539758	677831
30	220618	311725	418539	541061	679291
31	221452	312715	419686	542365	680752
32	222287	313707	420835	543671	682216
33	223123	314700	421986	544979	683680
34	223961	315696	423138	546288	685147
35	224801	316692	424292	547599	686615
36	225642	317690	425447	548912	688084
37	226484	318690	426604	550226	689555
38	227329	319692	427762	551541	691028
39	228175	320695	428922	552858	692502
40	229022	321699	430084	554177	693978
41	229871	322705	431247	555497	695455
42	230722	323713	432412	556819	696934
43	231574	324722	433578	558142	698415
44	232428	325733	434746	559467	699897
45	233283	326745	435916	560794	701380
46	234140	327759	437087	562122	702865
47	234998	328775	438259	563452	704352
48	235858	329792	439433	564783	705840
49	236720	330810	440609	566116	707330

3. Kreisinhaltstabelle.

Durchmesser	Inhalt				
	0	100	200	300	400
50	1963,5	17671	49087	96211	159043
51	2042,8	17908	49481	96762	159751
52	2123,7	18146	49876	97314	160460
53	2206,2	18385	50273	97868	161171
54	2290,2	18627	50671	98423	161883
55	2375,8	18869	51071	98980	162597
56	2463,0	19113	51472	99538	163313
57	2551,8	19359	51875	100098	164030
58	2642,1	19607	52279	100660	164748
59	2734,0	19856	52685	101223	165468
60	2827,4	20106	53093	101788	166190
61	2922,5	20358	53502	102354	166914
62	3019,1	20612	53913	102922	167639
63	3117,2	20867	54325	103491	168365
64	3217,0	21124	54739	104062	169093
65	3318,3	21382	55155	104635	169823
66	3421,2	21642	55572	105209	170554
67	3525,7	21904	55990	105785	171287
68	3631,7	22167	56410	106362	172021
69	3739,3	22432	56832	106941	172757
70	3848,5	22698	57256	107521	173494
71	3959,2	22966	57680	108103	174234
72	4071,5	23235	58107	108687	174974
73	4185,4	23506	58535	109272	175716
74	4300,8	23779	58965	109858	176460
75	4417,9	24053	59396	110447	177205
76	4536,5	24328	59828	111036	177952
77	4656,6	24606	60263	111628	178701
78	4778,4	24885	60699	112221	179451
79	4901,7	25165	61136	112815	180203
80	5026,6	25447	61575	113411	180956
81	5153,0	25730	62016	114009	181711
82	5281,0	26016	62458	114608	182467
83	5410,6	26302	62902	115209	183225
84	5541,8	26590	63347	115812	183984
85	5674,5	26880	63794	116416	184745
86	5808,8	27172	64242	117021	185508
87	5944,7	27465	64692	117628	186272
88	6082,1	27759	65144	118237	187038
89	6221,1	28055	65597	118847	187805

8. Kreisinhaltstabelle

Durchmesser	Inhalt 500	600	700	800	900
50	237583	331831	441786	567450	708822
51	238448	332853	442965	568786	710315
52	239314	333876	444146	570124	711809
53	240182	334901	445328	571463	713306
54	241051	335927	446511	572803	714803
55	241922	336955	447697	574146	716303
56	242795	337985	448883	575490	717804
57	243669	339016	450072	576835	719306
58	244545	340049	451262	578182	720810
59	245422	341083	452453	579530	722316
60	246301	342119	453646	580880	723823
61	247181	343157	454841	582232	725332
62	248063	344196	456037	583585	726842
63	248947	345237	457234	584940	728354
64	249832	346279	458434	586297	729867
65	250719	347323	459635	587655	731382
66	251607	348368	460837	589014	732899
67	252497	349415	462041	590375	734417
68	253388	350464	463247	591738	735937
69	254281	351514	464454	593102	737458
70	255176	352565	465663	594468	738981
71	256072	353618	466873	595835	740506
72	256970	354673	468085	597204	742032
73	257869	355730	469298	598575	743559
74	258770	356788	470513	599947	745088
75	259672	357847	471730	601320	746619
76	260576	358908	472948	602696	748151
77	261482	359971	474168	604073	749685
78	262389	361035	475389	605451	751221
79	263298	362101	476612	606831	752758
80	264208	363168	477836	608212	754296
81	265120	364237	479062	609595	755837
82	266033	365308	480290	610980	757378
83	266948	366380	481519	612366	758922
84	267865	367453	482750	613754	760466
85	268783	368528	483982	615143	762013
86	269703	369605	485216	616534	763561
87	270624	370684	486451	617927	765111
88	271547	371764	487688	619321	766662
89	272471	372845	488927	620717	768215

3. Kreisinhaltstabelle.

Durchmesser.	Inhalt.				
	0	100	200	300	400
90	6361,7	28353	66052	119459	188574
91	6503,9	28652	66508	120072	189345
92	6647,6	28953	66966	120687	190117
93	6792,9	29255	67426	121304	190890
94	6939,8	29559	67887	121922	191665
95	7088,2	29865	68349	122542	192442
96	7238,2	30172	68813	123163	193221
97	7389,8	30481	69279	123786	194000
98	7543,0	30791	69747	124410	194782
99	7697,7	31103	70215	125036	195565
100	7854,0	31416	70686	125664	196350

4. Kreissegmentetabelle. ($r = 1$).

Bogen φ Grad.	Bogenhöhe $1 - \cos.\frac{\varphi}{2}$	Segment $\frac{\varphi - \sin.\varphi}{2}$	Bogen φ Grad.	Bogenhöhe $1 - \cos.\frac{\varphi}{2}$	Segment $\frac{\varphi - \sin.\varphi}{2}$
1	0,00004	0,00000	25	0,0237	0,00686
2	0,00015	0,00000	26	0,0256	0,00771
3	0,00034	0,00001	27	0,0276	0,00862
4	0,00061	0,00003	28	0,0297	0,00961
5	0,00095	0,00006	29	0,0319	0,01067
6	0,00137	0,00010	30	0,0341	0,01180
7	0,00187	0,00015	31	0,0364	0,01301
8	0,00244	0,00023	32	0,0387	0,01429
9	0,00308	0,00032	33	0,0412	0,01566
10	0,00381	0,00044	34	0,0437	0,01711
11	0,00460	0,00059	35	0,0463	0,01864
12	0,00548	0,00076	36	0,0489	0,02027
13	0,00643	0,00097	37	0,0517	0,02198
14	0,00745	0,00121	38	0,0545	0,02378
15	0,00856	0,00149	39	0,0574	0,02568
16	0,00973	0,00181	40	0,0603	0,02767
17	0,01098	0,00217	41	0,0633	0,02976
18	0,01231	0,00257	42	0,0664	0,03195
19	0,01371	0,00302	43	0,0696	0,03425
20	0,01519	0,00352	44	0,0728	0,03664
21	0,01675	0,00408	45	0,0761	0,03915
22	0,01837	0,00468	46	0,0795	0,04176
23	0,02008	0,00535	47	0,0829	0,04448
24	0,02185	0,00607	48	0,0865	0,04731

3. Kreisinhaltstabelle.

Durchmesser.	Inhalt 500	600	700	800	900
90	273397	373928	490167	622114	769769
91	274325	375013	491409	623513	771325
92	275254	376099	492652	624913	772882
93	276184	377187	493897	626315	774441
94	277117	378276	495143	627718	776002
95	278051	379367	496391	629124	777564
96	278986	380459	497641	630530	779128
97	279923	381554	498892	631938	780693
98	280862	382649	500145	633348	782260
99	281802	383746	501399	634760	783828
100	282743	384845	502655	636173	785398

4. Kreissegmentetabelle. ($r = 1$).

Bogen φ Grad.	Bogenhöhe $1 - cos. \frac{\varphi}{2}$	Segment $\frac{\varphi - sin. \varphi}{2}$	Bogen φ Grad.	Bogenhöhe $1 - cos. \frac{\varphi}{2}$	Segment $\frac{\varphi - sin. \varphi}{2}$
49	0,0900	0,05025	73	0,1961	0,15889
50	0,0937	0,05331	74	0,2014	0,16514
51	0,0974	0,05649	75	0,2066	0,17154
52	0,1012	0,05978	76	0,2120	0,17808
53	0,1051	0,06319	77	0,2174	0,18477
54	0,1090	0,06673	78	0,2229	0,19160
55	0,1130	0,07039	79	0,2284	0,19859
56	0,1171	0,07417	80	0,2340	0,20573
57	0,1212	0,07808	81	0,2396	0,21301
58	0,1254	0,08212	82	0,2453	0,22045
59	0,1296	0,08629	83	0,2510	0,22804
60	0,1340	0,09059	84	0,2569	0,23578
61	0,1384	0,09502	85	0,2627	0,24367
62	0,1428	0,09958	86	0,2686	0,25171
63	0,1474	0,10428	87	0,2746	0,25990
64	0,1520	0,10911	88	0,2807	0,26825
65	0,1566	0,11408	89	0,2867	0,27675
66	0,1613	0,11919	90	0,2929	0,28540
67	0,1661	0,12443	91	0,2991	0,29420
68	0,1710	0,12982	92	0,3053	0,30316
69	0,1759	0,13535	93	0,3116	0,31226
70	0,1808	0,14102	94	0,3180	0,32152
71	0,1859	0,14683	95	0,3244	0,33093
72	0,1910	0,15279	96	0,3309	0,34050

4. Kreissegmentetabelle. ($r = 1$).

Bogen φ Grad.	Bogenhöhe $1 - cos. \frac{\varphi}{2}$	Segment $\frac{\varphi - sin. \varphi}{2}$	Bogen φ Grad.	Bogenhöhe $1 - cos. \frac{\varphi}{2}$	Segment $\frac{\varphi - sin. \varphi}{2}$
97	0,3374	0,35021	139	0,6498	0,88497
98	0,3439	0,36008	140	0,6580	0,90034
99	0,3506	0,37009	141	0,6662	0,91580
100	0,3572	0,38026	142	0,6744	0,93135
101	0,3639	0,39058	143	0,6827	0,94700
102	0,3707	0,40104	144	0,6910	0,96274
103	0,3775	0,41166	145	0,6993	0,97858
104	0,3843	0,42242	146	0,7076	0,99449
105	0,3912	0,43334	147	0,7160	1,01050
106	0,3982	0,44439	148	0,7244	1,02658
107	0,4052	0,45560	149	0,7328	1,04275
108	0,4122	0,46695	150	0,7412	1,05900
109	0,4193	0,47844	151	0,7496	1,07532
110	0,4264	0,49008	152	0,7581	1,09171
111	0,4336	0,50187	153	0,7666	1,10818
112	0,4408	0,51379	154	0,7750	1,12472
113	0,4481	0,52586	155	0,7836	1,14132
114	0,4554	0,53807	156	0,7921	1,15799
115	0,4627	0,55041	157	0,8006	1,17472
116	0,4701	0,56289	158	0,8092	1,19151
117	0,4775	0,57551	159	0,8178	1,20835
118	0,4850	0,58827	160	0,8264	1,22525
119	0,4925	0,60116	161	0,8350	1,24221
120	0,5000	0,61418	162	0,8436	1,25921
121	0,5076	0,62734	163	0,8522	1,27626
122	0,5152	0,64063	164	0,8608	1,29335
123	0,5228	0,65404	165	0,8695	1,31049
124	0,5305	0 66759	166	0,8781	1,32766
125	0,5388	0,68125	167	0,8868	1,34487
126	0,5460	0,69505	168	0 8955	1,36212
127	0,5538	0,70897	169	0,9042	1,37940
128	0,5616	0,72301	170	0,9128	1,39671
129	0,5695	0,73716	171	0,9215	1,41404
130	0,5774	0,75144	172	0,9302	1,43140
131	0,5853	0,76584	173	0,9390	1,44878
132	0,5933	0,78034	174	0,9477	1,46617
133	0,6013	0,79497	175	0,9564	1,48359
134	0,6093	0,80970	176	0,9651	1,50101
135	0,6173	0,82454	177	0,9738	1,51845
136	0.6254	0,83949	178	0,9825	1,53589
137	0,6335	0,85455	179	0,9913	1,55334
138	0,6416	0,86971	180	1,0000	1,57080

Zweiter Abschnitt.

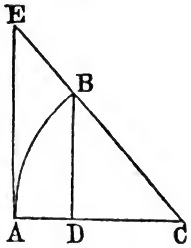
Formeln und Regeln der theoretischen Geometrie.

Erstes Capitel.

Planimetrie.

§. 1. Trigonometrische Linien einfacher Winkel. In Fig. 1 sei $CA = CB = 1$, der Winkel $ACB = \alpha$ und der Winkel $CBD = CEA = \beta = 90^0 - \alpha$. Dann hat man

Fig. 1.



$$BD = sin.\ \alpha = cos.\ \beta,$$
$$CD = cos.\ \alpha = sin.\ \beta,$$
$$AE = tang.\ \alpha = cotang.\ \beta;$$

überdies noch

$$CE = sec.\ \alpha = cosec.\ \beta = \frac{1}{cos.\ \alpha} = \frac{1}{sin.\ \beta} \text{ und}$$
$$AD = sin.\ vers.\ \alpha = cos.\ vers.\ \beta = 1 - cos.\ \alpha = 1 - sin.\ \beta.$$

Für einige Winkel des ersten Quadranten haben die trigonometrischen Linien folgende Werthe:

Winkel.	Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.
0^0	0	1	0	∞
30^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
45^0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
60^0	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
90^0	1	0	∞	0

Folgende Formeln drücken die Abhängigkeiten der trigonometrischen Linien unter einander aus:

I. $(sin.\,\alpha)^2 + (cos.\,\alpha)^2 = 1$, weshalb folgt:

$$sin.\,\alpha = \sqrt{1-(cos.\,\alpha)^2}, \text{ und } cos.\,\alpha = \sqrt{1-(sin.\,\alpha)^2}.$$

II. $tang.\,\alpha \,.\, cotang.\,\alpha = 1$, weshalb sich

$$tang.\,\alpha = \frac{1}{cotang.\,\alpha} \text{ und } cotang.\,\alpha = \frac{1}{tang.\,\alpha}$$

herausstellt.

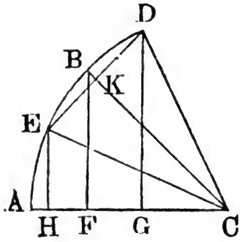
III. $tang.\,\alpha = \dfrac{sin.\,\alpha}{cos.\,\alpha}$ und $cotang.\,\alpha = \dfrac{cos.\,\alpha}{sin.\,\alpha}$;

hiernach $sin.\,\alpha = \dfrac{tang.\,\alpha}{\sqrt{1+(tang.\,\alpha)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+(cotg.\,\alpha)^2}}$

und $cos.\,\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+(tang.\,\alpha)^2}} = \dfrac{cotang.\,\alpha}{\sqrt{1+(cotg.\,\alpha)^2}}$.

§. 2. Trigonometrische Linien zusammengesetzter Winkel. Ist in Fig. 2 der Winkel $ACB = \alpha$, und der Winkel $BCD = BCE = \beta$, so giebt an:

Fig. 2



$BF = sin.\,\alpha$, $CF = cos.\,\alpha$,
$KD = KE = sin.\,\beta$,
$CK = cos.\,\beta$;
$DG = sin.\,(\alpha+\beta)$,
$CG = cos.\,(\alpha+\beta)$;
$EH = sin.\,(\alpha-\beta)$,
$CH = cos.\,(\alpha-\beta)$.

Nun gelten folgende allgemeine Regeln:

I. $sin.\,(\alpha \pm \beta) = sin.\,\alpha\ cos.\,\beta \pm cos.\,\alpha\ sin.\,\beta$,

II. $cos.\,(\alpha \pm \beta) = cos.\,\alpha\ cos.\,\beta \mp sin.\,\alpha\ sin.\,\beta$.

Hieraus folgt:

III. $sin.\,2\alpha = 2\,sin.\,\alpha\ cos.\,\alpha$,

IV. $sin.\,3\alpha = 3\,sin.\,\alpha - 4\,(sin.\,\alpha)^3$,

V. $cos.\,2\alpha = (cos.\,\alpha)^2 - (sin.\,\alpha)^2 = 2\,(cos.\,\alpha)^2 - 1$
$= 1 - 2\,(sin.\,\alpha)^2$,

VI. $cos.\,3\alpha = 4\,(cos.\,\alpha)^3 - 3\,cos.\,\alpha$.

Ferner:

VII. $sin.\,\alpha + sin.\,\beta = 2\,sin.\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) cos.\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$,

VIII. $sin.\,\alpha - sin.\,\beta = 2\,cos.\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) sin.\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$,

IX. $cos.\,\alpha + cos.\,\beta = 2\,cos.\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) cos.\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$,

X. $cos.\,\alpha - cos.\,\beta = -2\,sin.\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) sin.\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

Für die Potenzen der trigonometrischen Linien gilt Folgendes:

XI. $(sin.\,\alpha)^2 = \frac{1}{2}\,(1 - cos.\,2\alpha)$; also

$$sin.\,\alpha = \sqrt{\frac{1 - cos.\,2\alpha}{2}}, \text{ auch } sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 - cos.\,\alpha}{2}}$$

XII. $(cos.\,\alpha)^2 = \tfrac{1}{2}(1 + cos.\,2\,\alpha)$; also

$$cos.\,\alpha = \sqrt{\frac{1 + cos.\,2\alpha}{2}}, \text{ auch } cos.\,\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 + cos.\,\alpha}{2}}.$$

XIII. $(sin.\,\alpha)^3 = \tfrac{1}{4}(3\,sin.\,\alpha - sin.\,3\,\alpha)$,

XIV. $(cos.\,\alpha)^3 = \tfrac{1}{4}(3\,cos.\,\alpha + cos.\,3\,\alpha)$,

XV. $(sin.\,\alpha)^4 = \tfrac{1}{8}(3 - 4\,cos.\,2\alpha + cos.\,4\alpha)$,

XVI. $(cos.\,\alpha)^4 = \tfrac{1}{8}(3 + 4\,cos.\,2\alpha + cos.\,4\alpha)$,

XVII. $(sin.\,\alpha)^5 = \tfrac{1}{16}(10\,sin.\,\alpha - 5\,sin.\,3\alpha + sin.\,5\,\alpha)$,

XVIII. $(cos.\,\alpha)^5 = \tfrac{1}{16}(10\,cos.\,\alpha + 5\,cos.\,3\alpha + cos.\,5\,\alpha)$.

Für die Tangenten und Cotangenten stellt sich heraus:

XIX. $$tang.\,(\alpha \pm \beta) = \frac{tang.\,\alpha \pm tang.\,\beta}{1 \mp tang.\,\alpha\,tang.\,\beta}.$$

XX. $$cotang.\,(\alpha \pm \beta) = \frac{cotang.\,\alpha\,cotang.\,\beta \mp 1}{\pm\,cotang.\,\alpha + cotang.\,\beta}.$$

Hieraus folgt

XXI. $$tang.\,2\,\alpha = \frac{2\,tang.\,\alpha}{1 - (tang.\,\alpha)^2},$$

XXII. $$cotang.\,2\,\alpha = \frac{(cotang.\,\alpha)^2 - 1}{2\,cotang.\,\alpha}.$$ Umgekehrt

XXIII. $$tang.\,\alpha = \sqrt{\frac{1 - cos.\,2\alpha}{1 + cos.\,2\alpha}} = \frac{sin.\,2\,\alpha}{1 + cos.\,2\,\alpha} = \frac{2\,tang.\,\tfrac{1}{2}\alpha}{1 - (tang.\tfrac{1}{2}\alpha)^2}.$$

XXIV. $$cotang.\,\alpha = \sqrt{\frac{1 + cos.\,2\alpha}{1 - cos.\,2\alpha}} = \frac{sin.\,2\,\alpha}{1 - cos.\,2\,\alpha} = \frac{(cotang.\,\tfrac{1}{2}\alpha)^2 - 1}{2\,cotang.\,\tfrac{1}{2}\alpha}.$$

XXV. $$tang.\,\alpha \pm tang.\,\beta = \frac{sin.\,(\alpha \pm \beta)}{cos.\,\alpha\;cos.\,\beta},$$

XXVI. $$cotang.\,\beta \pm cotang.\,\alpha = \frac{sin.\,(\alpha \pm \beta)}{sin.\,\alpha\;sin.\,\beta},$$

XXVII. $$\frac{sin.\,\alpha + sin.\,\beta}{sin.\,\alpha - sin.\,\beta} = \frac{tang.\,\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)}{tang.\,\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)}.$$

§. 3. Trigonometrische Linien in verschiedenen Quadranten. Es ist

$sin.\,0^0 = 0$	$sin.\,90^0 = 1$	$sin.\,180^0 = 0$	$sin.\,270^0 = -1$
$cos.\,0^0 = 1$	$cos.\,90^0 = 0$	$cos.\,180^0 = -1$	$cos.\,270^0 = 0$
$tg.\,0^0 = 0$	$tg.\,90^0 = \infty$	$tg.\,180^0 = 0$	$tg.\,270^0 = -\infty$
$cotg.\,0^0 = \infty$	$cotg.\,90^0 = 0$	$cotg.\,180^0 = -\infty$	$cotg.\,270^0 = 0$

Ferner:

$$sin.\,(90^0 \pm \alpha) = cos.\,\alpha$$
$$tg.\,(90^0 \pm \alpha) = \mp cotg.\,\alpha$$
$$sin.\,(180^0 \pm \alpha) = \mp sin.\,\alpha$$
$$tg.\,(180^0 \pm \alpha) = \pm tg.\,\alpha$$
$$sin.\,(270^0 \pm \alpha) = -cos.\,\alpha$$
$$tg.\,(270^0 \pm \alpha) = \mp cotg.\,\alpha$$
$$sin.\,(360^0 \pm \alpha) = \pm sin.\,\alpha$$
$$tg.\,(360^0 \pm \alpha) = \pm tg.\,\alpha$$

$$cos.\,(90^0 \pm \alpha) = \mp sin.\,\alpha$$
$$cotg.\,(90^0 \pm \alpha) = \mp tg.\,\alpha$$
$$cos.\,(180^0 \pm \alpha) = -cos.\,\alpha$$
$$cotg.\,(180^0 \pm \alpha) = \pm cotg.\,\alpha$$
$$cos.\,(270^0 \pm \alpha) = \pm sin.\,\alpha$$
$$cotg.\,(270^0 \pm \alpha) = \mp tg.\,\alpha$$
$$cos.\,(360^0 \pm \alpha) = cos.\,\alpha$$
$$cotg.\,(360^0 \pm \alpha) = \pm cotg.\,\alpha$$

Endlich:

$$sin.\,(-\alpha) = -sin.\,\alpha \qquad cos.\,(-\alpha) = cos.\,\alpha$$
$$tg.\,(-\alpha) = -tg.\,\alpha \qquad cotg.\,(-\alpha) = -cotg.\,\alpha.$$

Regel 1. Von zwei Winkeln, welche einander zu 90° ergänzen, ist der Sinus des einen gleich dem Cosinus des andern, und umgekehrt, der Cosinus des einen auch gleich dem Sinus des andern, auch Tangente des einen gleich Cotangente des andern, sowie Cotangente des einen gleich Tangente des andern.

Regel 2. Winkel, welche einander zu 180° ergänzen, haben gleiche Sinus, und gleich große entgegengesetzte Cosinus, Tangenten und Cotangenten.

Die Zeichen der trigonometrischen Linien in verschiedenen Quadranten giebt folgende Tabelle an:

Winkel.	Sinus.	Cosinus	Tang.	Cotang.
im ersten Quadranten (0° bis 90°)	+	+	+	+
im zweiten Quadranten (90° bis 180°)	+	−	−	−
im dritten Quadranten (180° bis 270°)	−	−	+	+
im vierten Quadranten (270° bis 360°)	−	+	−	−

§. 4. Trigonometrische Reihen.

I. $$sin.\,x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \cdots,$$

II. $$cos.\,x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \cdots,$$

Auch ist

III. $$cos.\,x \pm sin.\,x\,.\sqrt{-1} = e^{\pm x\sqrt{-1}},$$

IV. $$cos.\,x = \tfrac{1}{2}\left(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}\right).$$

Ferner

V. $tang.\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2\,x^5}{3\,.\,5} + \frac{17\,x^7}{3\,.\,5\,.\,7\,.\,3} + \cdots,$

VI. $cotg.\, x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3.5.3} - \frac{2\,x^5}{3.5.7.9} - \frac{x^7}{3.5.7.9.5} - \cdots,$

VII. $x = sin.\, x + \frac{1\,.\,(sin.\, x)^3}{2\,.\,3} + \frac{1\,.\,3\,.\,(sin.\, x)^5}{2\,.\,4\,.\,5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,(sin.\, x)^7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,7} + \cdots,$

VIII. $x = tang.\, x - \tfrac{1}{3}\,(tang.\, x)^3 + \tfrac{1}{5}\,(tang.\, x)^5 - \tfrac{1}{7}\,(tang.\, x)^7 + \cdots,$

IX. $tang.\, x = sin.\, x + \tfrac{1}{2}\,(sin,\, x)^3 + \frac{1.3}{2.4}\,(sin.\, x)^5 + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\,(sin.\, x)^7 + \cdots,$

X. $log.\, sin.\, x = log.\, x - m\left(\frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{4.9.5} + \frac{x^6}{9.5.7.9} + \cdots\right),$

XI. $log.\, cos.\, x = -m\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^6}{5.9} + \frac{17\,x^8}{5.7.8.9} + \cdots\right),$

XII. $log.\, tang.\, x = log.\, x + m\left(\frac{x^2}{3} + \frac{7\,x^4}{9\,.\,10} + \frac{62\,x^6}{5\,.7.9^2} + \cdots\right).$

Hierin bezeichnet für briggische Logarithmen $m = 0{,}4342945$. (S. Seite 81.)

Uebrigens ist $x = arc.\, x = \frac{x^0}{180^0} \cdot \pi = 0{,}0174533 \ldots x^0 = 0{,}000290888 \ldots x' = 0{,}00000484813 \ldots x''$ einzusetzen. Umgekehrt hat man

$$x^0 = \frac{x}{\pi} \cdot 180^0 = 57^0{,}2958\,.\,x,\; x' = 3437'{,}77\, x = 206265''.\,x.$$

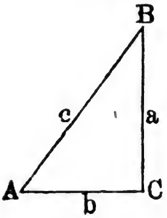
Beispiel. Welche trigonometrische Linien entsprechen dem Winkel von $7\tfrac{1}{2}^0$, oder dem Bogen $0{,}0174533\,.\,7{,}5 = 0{,}13089975$? Es ist:

$$sin.\, x = 0{,}13089975 - 0{,}00037382 + 0{,}00000032 = 0{,}1305262,$$ und

$$tang.\, x = 0{,}13089975 + 0{,}00074764 + 0{,}00000512 = 0{,}1316525.$$

§. 5. Tafel der Formeln zur Auflösung rechtwinkeliger Dreiecke.

Fig. 3.



In dem rechtwinkeligen Dreiecke ABC, Fig. 3, bezeichne c die Hypotenuse AB, a die dem Winkel A gegenüber liegende Kathete BC und b die dem Winkel B gegenüber stehende Kathete AC. Wie aus einer Seite und noch einem anderen Stücke eines solchen Dreieckes die übrigen sich bestimmen lassen, giebt folgende Tafel an.

Gegeben.	Gesucht.	Formel.
a, b	A	$tang. A = \frac{a}{b}$,
	B	$tang. B = \frac{b}{a}$, auch $B = 90^0 - A$,
	c	$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{a}{sin. A} = \frac{b}{cos. A}$.
a, c	A	$sin. A = \frac{a}{c}$,
	B	$cos. B = \frac{a}{c}$, auch $B = 90^0 - A$,
	b	$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)}$.
a, A	b	$b = a \, cotang. A$,
	c	$c = \frac{a}{sin. A}$.
b, A	a	$a = b \, tang. A$,
	c	$c = \frac{b}{cos. A}$.
c, A	a	$a = c \, sin. A$,
	b	$b = c \, cos. A$.

Beispiel 1. Eine senkrechte Stange von 25 Fuß Länge wirft auf den horizontalen Boden einen Schatten von 16,3 Fuß Länge, wie hoch steht die Sonne zu dieser Zeit? Hier ist $a = 25$, $b = 16{,}3$ und A der gesuchte Höhenwinkel. Nach der Formel $tang. A = \frac{a}{b}$ berechnet sich A auf folgende Weise:

$$\begin{aligned} log. 25 &= 1{,}39794 \\ log. 16{,}3 &= 1{,}21219 \\ log. tang. A &= 10{,}18575, \quad A = 56^0, 54'. \end{aligned}$$

Beispiel 2. Eine Bergstraße soll auf 106 Fuß Länge 4,5 Fuß ansteigen, welches ist ihr Steigwinkel? Hier hat man $c = 106$, $a = 4{,}5$ und $sin. A = \frac{a}{c}$; logarithmisch:

$$\begin{aligned} log. 4{,}5 &= 0{,}65321 \\ log. 106 &= 2{,}02531 \\ log. sin. A &= 8{,}62790, \quad A = 2^0, 26' \end{aligned}$$ das Ansteigen.

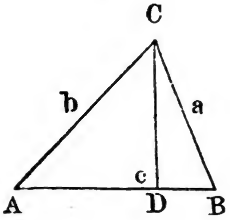
Beispiel 3. Wie hoch wird ein Dach und wie lang werden die dazu nöthigen Sparren ausfallen, wenn die Tiefe des Hauses 24 Ellen und der Neigungswinkel des Daches 35° betragen soll? Es ist $b = {}^{24}/_{2} = 12$ Ellen und $A = 35^0$, daher die Höhe $a = b\ tang.\ A = 12\ tang.\ 35^0 = 12 . 0{,}7002 = 8{,}4024$ Ellen, und die Sparrenlängen

$$c = \frac{b}{cos.\ A} = \frac{12}{cos.\ 35^0} = \frac{12}{0{,}81915} = 14{,}65 \text{ Ellen,}$$

auch $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{144 + 70{,}6003} = \sqrt{214{,}6003} = 14{,}65$ Ellen.

§. 6. Tafel der Formeln zur Auflösung schiefwinkeliger Dreiecke. In dem schiefwinkeligen Dreiecke ABC, Fig. 4, bezeichnen a, b und c die den Winkeln A, B und C gegenüber liegenden Seiten BC, AC und AB. Wie aus einer Seite und zwei anderen Stücken eines solchen Dreieckes die übrigen zu berechnen sind, giebt folgende Tafel an. Bei den Formeln in dieser Tafel sind die Winkel A, B und C spitz angenommen; ist aber einer der Winkel stumpf, so hat man bei dem Cosinus, sowie bei der Tangente und der Cotangente das Vorzeichen zu ändern.

Fig. 4.



Gegeben.	Gesucht.	Formel.
a, b, c	A	$cos.\ A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, oder, wenn $a + b + c = s$ ist, $sin.\ A = \frac{2}{bc}\sqrt{{}^1/_2 s({}^1/_2 s - a)({}^1/_2 s - b)({}^1/_2 s - c)}$, auch $cos.\ {}^1/_2 A = \sqrt{\frac{{}^1/_2 s({}^1/_2 s - a)}{bc}}$ und $sin.\ \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{({}^1/_2 s - b)({}^1/_2 s - c)}{bc}}$.
a, b, A	B	$sin.\ B = \frac{b\ sin.\ A}{a}$; übrigens kann $B \gtrless 90^0$ sein; ist $b \gtrless a$, so hat man auch $B \gtrless A$.
	C	$C = 180^0 - (A + B)$,
	c	$c = \frac{a\ sin.\ C}{sin.\ A}$.

Gegeben.	Gesucht.	Formel.
a, b, C	A	$tang. A = \frac{a\, sin. C}{b - a\, cos. C}$, oder
	B	$\frac{A+B}{2} = 90^0 - \frac{C}{2}$ und
		$tang. \left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{a-b}{a+b} cotang. \frac{C}{2}$,
		hiernach $A = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}$ und
		$B = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}$.
	c	$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\, cos. C}$ oder, nachdem A und B bestimmt ist, $c = \frac{a\, sin. C}{sin. A}$.
		Auch ist
		$c = (a+b)\, sin. \varphi$, wenn
		$cos. \varphi = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} cos. \frac{1}{2} C$ bezeichnet.
a, A, B	b	$b = \frac{a\, sin. B}{sin. A}$
	C	$C = 180^0 - (A + B)$
	c	$c = \frac{a\, sin. C}{sin. A} = \frac{a\, sin. (A+B)}{sin. A}$.
a, B, C	A	$A = 180^0 - (B + C)$
	b	$b = \frac{a\, sin. B}{sin. A} = \frac{a\, sin. B}{sin. (B+C)}$
	c	$c = \frac{a\, sin. C}{sin. A} = \frac{a\, sin. C}{sin. (B+C)}$.

Beispiel 1. Sind die drei Seiten eines Dreieckes folgende: $a = 33{,}5$ Ruthen, $b = 41{,}7$ Ruthen und $c = 29{,}1$ Ruthen, so hat man für den Winkel A desselben:

$$cos. A = \frac{41{,}7^2 + 29{,}1^2 - 33{,}5^2}{2 \,.\, 41{,}7 \,.\, 29{,}1} = \frac{1463{,}45}{2 \,.\, 41{,}7 \,.\, 29{,}1}, \text{ nun ist}$$

$$\begin{array}{lrl} log. & 1463{,}45 & = 3{,}16538 \\ log. & 2 & = 0{,}30103 \\ log. & 41{,}7 & = 1{,}62014 \\ log. & 29{,}1 & = 1{,}46389 \\ & & \quad 8{,}38506 \\ \end{array}$$

$log. cos. A = 9{,}78032$, daher $A = 52^0, 55'$; B folgt $= 83^0, 18'$ und $C = 43^0, 52'$.

Da $a + b + c = 104{,}3$, so folgt auf anderem Wege:

$$\cos. \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{52{,}15 \,.\, 18{,}65}{41{,}7 \,.\, 29{,}1}}; \text{ aber}$$

$$\begin{array}{ll} \log. 52{,}15 = 1{,}71725 & \log. 41{,}7 = 1{,}62014 \\ \log. 18{,}65 = \underline{1{,}27068} & \log. 29{,}1 = \underline{1{,}46389} \\ \quad 2{,}98793 & \quad 3{,}08403 \\ \quad \underline{3{,}08403} & \\ \quad \underline{1{,}90390 - 2} & \\ 2)\ 0{,}95195 - 1 & \end{array}$$

$$\log. \cos. \tfrac{1}{2}A = 9{,}95195,\ \frac{A}{2} = 26^0{,}27\tfrac{1}{2}',\ A = 52^0{,}55'.$$

Beispiel 2. Aus den zwei Seiten $a = 402{,}58$, $b = 361{,}27$ Fuß und aus dem eingeschlossenen Winkel $C = 117^0{,}9'$ folgt für die übrigen Winkel

$$\frac{A+B}{2} = 90^0 - \frac{C}{2} = 90^0 - 58^0{,}34\tfrac{1}{2}' = 31^0{,}25\tfrac{1}{2}' \text{ und}$$

$$\text{tang.} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \text{cotang.} \frac{C}{2} = \frac{41{,}31.\text{cotg.} 58^0{,}34\tfrac{1}{2}'}{763{,}85};$$

$$\begin{array}{rl} \text{nun ist } \log. 41{,}31 = & 1{,}61606 \\ \log. \text{cotang.} 58^0{,}34\tfrac{1}{2}' = & \underline{9{,}78604} \\ & 11{,}40210 \\ \log. 763{,}85 = & \underline{2{,}88301} \end{array}$$

$$\log. \text{tang.} \left(\frac{A-B}{2}\right) = 8{,}51909,\ \frac{A-B}{2} = 1^0{,}53\tfrac{1}{2}',$$

$$\text{aber } \frac{A+B}{2} = 31^0{,}25\tfrac{1}{2}',$$

folglich $A = 33^0{,}19'$ und $B = 29^0{,}32'$.

Für die Seite c ist nun $c = \dfrac{a \sin. C}{\sin. A}$, aber

$$\begin{array}{rl} \log. 402{,}58 = & 2{,}60485 \\ \log. \sin. 117^0{,}9' = & \underline{9{,}94930} \\ & 12{,}55415 \\ \log. \sin. 33^0{,}19' = & \underline{9{,}73978} \\ \log. c = & 2{,}81437,\ c = 652{,}2 \text{ Fuß}. \end{array}$$

Unmittelbar ergiebt sich die Seite c durch die Formel $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,ab \cos. C}$. Nun ist aber $a^2 + b^2 = 292587$ und $2\,ab \cos. C = -2.402{,}58.361{,}27.\cos. 62^0{,}51' = -132735$; es folgt daher $c = \sqrt{425322} = 652{,}2$ Fuß.

§. 7. **Coordinatenformeln.** 1. Ein Punkt P, Fig. 5 (a. f. S.), wird in Hinsicht auf zwei rechtwinkelige Coordinataxen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$ bestimmt entweder durch den Winkel $XOP = \beta$ und die Entfernung $OP = s$, oder durch die Coordinaten $OP_1 = PP_2 = x$ und $OP_2 = PP_1 = y$, und es ist

I. $x = s \cos. \beta$, sowie $y = s \sin. \beta$, ferner

$$\text{II. } s = \sqrt{x^2 + y^2},\ \text{tang.} \beta = \frac{y}{x},\ \sin. \beta = \frac{y}{s},\ \cos. \beta = \frac{x}{s}.$$

2. Eine durch den Anfangspunkt O gehende gerade Linie AB ist bestimmt, mittelst des Winkels $XOP = \beta$ oder durch die Gleichung

III. $y = x\, tang.\, \beta$.

3. Geht die Gerade AB, Fig. 6, nicht durch den Anfangspunkt, sondern steht sie um $ON = n$ von diesem Punkte O ab, so ist

IV. $y\, cos.\beta - x\, sin.\beta = n$, und daher

$$y = \frac{n + x\, sin.\beta}{cos.\beta} = \frac{n}{cos.\beta} + x\, tang.\beta.$$

Fig. 5.

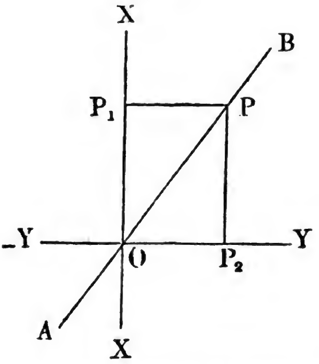
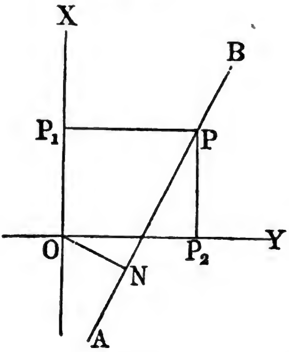


Fig. 6.



4. Ist statt des Abstandes ON ein Punkt K in der Geraden AC, Fig. 7, durch seine Coordinaten $OK_1 = x_1$, und $OK_2 = y_1$ gegeben, so gilt die Gleichung

V. $\frac{y - y_1}{x - x_1} = tang.\beta$; es ist daher

$y = y_1 + (x - x_1)\, tang.\beta$; und

$n = y_1\, cos.\beta - x_1\, sin.\beta$.

5. Sind zwei Punkte K und L, Fig. 7, einer Geraden AC durch ihre Coordinaten $OK_1 = x_1$, $OK_2 = y_1$, $OL_1 = x_2$ und $OL_2 = y_2$ gegeben, so hat man für dieselbe

VI. $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ und daher

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1).$$

6. Liegt der eine Punkt A in der Axe $X\bar{X}$, und der andere Punkt B in der Axe $Y\bar{Y}$, so sind $OA = a$ und $OB = b$ die sogenannten Parameter der Linie, und man hat

VII. $\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1$, oder

$$y = b\left(1 - \frac{x}{a}\right) = b - \frac{b}{a}x = b + x\, tang.\beta,$$

auch ist $tang.\beta = -\frac{b}{a}$.

7. Die Entfernung KL zweier durch ihre Coordinaten x_1, y_1, x_2 und y_2 gegebenen Punkte wird bestimmt durch die Formel

VIII. $KL = s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$;

und der Winkel $XAC = \beta$, um welchen KL von der Abscissenaxe OX abweicht, durch die Gleichungen:

IX. $tang.\,\beta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $sin.\,\beta = \frac{y_2 - y_1}{s}$, $cos.\,\beta = \frac{x_2 - x_1}{s}$.

8. Die Coordinaten $CP_1 = x$ und $CP_2 = y$, Fig. 8, gehen in

X. $OQ_1 = x_1 = x - x_0$ und $OQ_2 = y_1 = y - y_0$ über,

wenn man bei unveränderter Axenrichtung, den Anfangspunkt C um die Coordinaten $CO_1 = x_0$ und $CO_2 = y_0$ verschiebt und dadurch nach O verlegt.

Fig. 7.

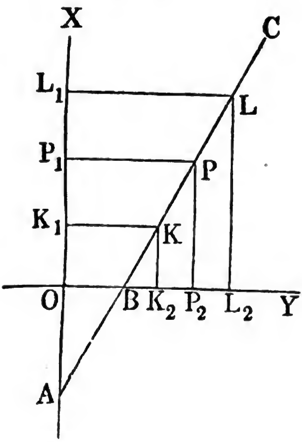
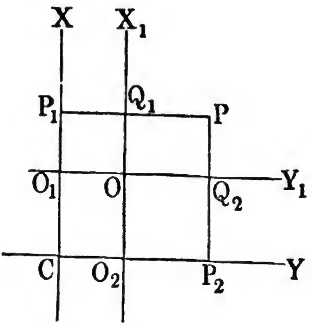


Fig. 8.

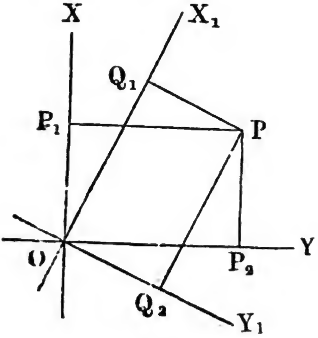


9. Die Coordinaten $OP_1 = x$ und $OP_2 = y$ eines Punktes P, Fig. 9, gehen in die Coordinaten

XI. $OQ_1 = x_1 = y\,sin.\,\delta + x\,cos.\,\delta$ und
$OQ_2 = y_1 = y\,cos.\,\delta - x\,sin.\,\delta$

über, wenn man bei unverändertem Nullpunkt O, das Axenkreuz, um den Winkel $XOX_1 = YOY_1 = \delta$ dreht.

Fig. 9.



10. Sind zwei Linien AC und A_1C_1, Fig. 10 (a. f. S.), durch ihre Richtungswinkel $XAC = \beta$ und $XA_1C_1 = \beta_1$, und ihre Abstände $ON = n$ und $ON_1 = n_1$ vom

Nullpunkte O gegeben, so bestimmt sich ihr Durchschnittspunkt K mittelst der Coordinaten:

$$\text{XII.} \quad OK_1 = x = \frac{n \cos.\beta_1 - n_1 \cos.\beta}{\sin.\delta} \text{ und}$$

$$OK_2 = y = \frac{n \sin.\beta_1 - n_1 \sin.\beta}{\sin.\delta};$$

wo $\delta = \beta_1 - \beta$, den Winkel AKA_1 bezeichnet, welchen beide Linien mit einander einschließen.

11. Das von einem Punkte $P(x_1, y_1)$ gegen eine durch die Gleichung $y \cos.\beta - x \sin.\beta = n$ gegebene Linie AC, Fig. 11, gefällte Loth $PN = n_1$ ist bestimmt durch die Formel:

$$\text{XIII.} \quad n_1 = n + x_1 \sin.\beta - y_1 \cos.\beta$$

Fig. 10.

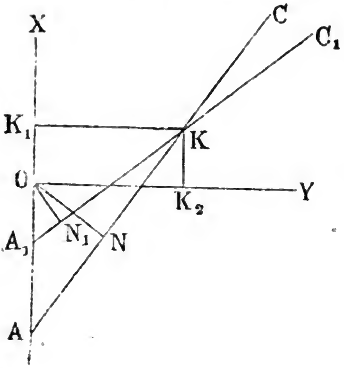
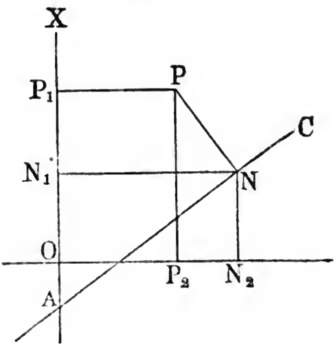


Fig. 11.



und die Coordinaten ON_1 und ON_2 (x, y) des Lothpunktes N sind

$$\text{XIV.} \quad x = x_1 - n_1 \sin.\beta,$$

$$y = y_1 + n_1 \cos.\beta.$$

Beispiel. Zwei Punkte sind durch die Coordinaten $x_1 = 2$, $y_1 = 1{,}3$; $x_2 = 3$, $y_2 = 3{,}5$ gegeben, man sucht ihre Entfernung u. s. w. Diese Entfernung ist

$s = \sqrt{(3-2)^2 + (3{,}5 - 1{,}3)^2} = \sqrt{1 + 4{,}84} = \sqrt{5{,}84}$ $= 2{,}417$; der Neigungswinkel gegen die erste Axe ist bestimmt durch $tang.\,\beta = \frac{2{,}2}{1} = 2{,}2$, daher $\beta = 65^0, 33^1/_2{}'$; die Gleichung der Verbindungslinie ist endlich

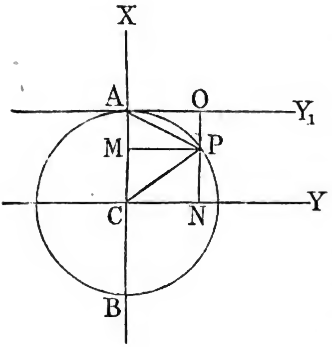
$\frac{2 - x}{3 - x} = \frac{1{,}3 - y}{3{,}5 - y}$, oder zusammengezogen, $2{,}2x - y = 3{,}1$,

oder in die gewöhnliche Form gebracht, $\frac{x}{1{,}409} - \frac{y}{3{,}1} = 1$; es sind also die Parameter dieser Linie

$$a = 1{,}409 \text{ und } b = -3{,}1.$$

§. 8. Kreisformeln. Ist r der Halbmesser $CA = CB$ eines Kreises, Fig. 12, und sind x und y die im Mittelpunkte C anfangenden Coordinaten CM und CN eines Punktes P im Umfange, so gilt die Kreisgleichung

Fig. 12.



I. $x^2 + y^2 = r^2$ oder $\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$;

es ist also

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Sind aber x und y die in einem Punkte A des Umfanges anfangenden Coordinaten AM und $AO = MP$, so gilt die Kreisgleichung

II. $y^2 = x\,(2r - x)$, es ist also dann

1) $y = \sqrt{x\,(2r - x)}$,

2) $x = r - \sqrt{r^2 - y^2}$ oder wenn x und y klein sind gegen r, $x = \frac{y^2}{2r}$, genauer $x = \frac{y^2}{2r}\left(1 + \left(\frac{y}{2r}\right)^2\right)$;

3) $r = \frac{1}{2}\left(x + \frac{y^2}{x}\right) = \frac{x^2 + y^2}{2x}$.

Bezeichnet β den Centriwinkel ACP, so ist $\frac{\beta}{2} = APM$, daher

$$4)\ tang.\ \frac{\beta}{2} = \frac{x}{y};\ \text{und}$$

$$5)\ r = \frac{y}{sin.\ \beta}.$$

Bezeichnet noch z die Sehne AP, so hat man auch

III. $z = 2r\,sin.\ \frac{\beta}{2}$ und $z^2 = 2rx$.

IV. Steht das Centrum C des Kreises um die Coordinaten a und b vom Nullpunkte ab, so geht die Kreisgleichung in folgende über:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.\quad \text{(S. X, §. 7).}$$

Das **Verhältniß des Kreisumfanges zum Durchmesser** oder des halben Umfanges zum Halbmesser ist

$\pi = 3{,}14159265359\ldots$, läßt sich meist genau genug $= 3{,}1416$ setzen und annähernd durch die Brüche $= \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}$ ausdrücken.

Errichtet man in den Endpunkten des Durchmessers AB,

Fig. 13.

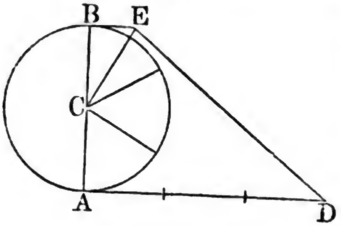


Fig. 13, die Perpendikel $AD = 3 \, . \, CA$ und $BE = tang. 30^0 . CB$, so ist $DE = 3,14153 . CA$, also nahe $= \pi . CA =$ der halben Peripherie des mit $CA = CB$ beschriebenen Kreises.

Uebrigens sind folgende Ausdrücke mit π häufig in Anwendung:

$$\pi = 3,14159, \quad log. \; \pi = 0,49715,$$
$$2\pi = 6,28319, \quad log. \; 2\pi = 0,79818,$$
$$\frac{1}{\pi} = 0,31831, \quad log. \; \frac{1}{\pi} = 0,50285 - 1,$$
$$\frac{1}{2\pi} = 0,15915, \quad log. \left(\frac{1}{2\pi}\right) = 0,20182 - 1,$$
$$\frac{2}{\pi} = 0,63662, \quad log. \; \frac{2}{\pi} = 0,80388 - 1,$$
$$\tfrac{1}{2}\pi = 1,57080, \quad log. \; \frac{\pi}{2} = 0,19612,$$
$$\frac{\pi}{3} = 1,04720, \quad log. \; \frac{\pi}{3} = 0,02003,$$
$$\frac{\pi}{4} = 0,78540, \quad log. \; \frac{\pi}{4} = 0,89509 - 1,$$
$$\frac{\pi}{6} = 0,52360, \quad log. \; \frac{\pi}{6} = 0,71900 - 1,$$
$$\pi^2 = 9,86960, \quad log. \; \pi^2 = 0,99430,$$
$$\sqrt{\pi} = 1,77245, \quad log. \; \sqrt{\pi} = 0,24857,$$
$$\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0,56419, \quad log. \; \sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0,75143 - 1.$$

Aus dem Halbmesser r oder dem Durchmesser $d = 2r$ ergiebt sich der Kreisumfang durch die Formel:

V. $p = \pi d = 2\pi r$. Umgekehrt ist

$$d = \frac{p}{\pi} \text{ und } r = \frac{p}{2\pi}.$$

Aus dem Halbmesser $CA = CP = r$ und dem Centriwinkel $ACP = \beta^0$, folgt die Länge des entsprechenden Bogens AP (Fig. 12):

$$\text{VI.} \quad b = \frac{\beta^0}{360^0} \cdot p = \frac{\beta^0 \pi d}{360^0} = \frac{\beta^0 \pi r}{180^0},$$

umgekehrt ist

$$\beta^0 = \frac{b}{\pi r} \cdot 180^0 \text{ und } r = \frac{180^0 \, . \, b}{\beta^0 \, . \, \pi}.$$

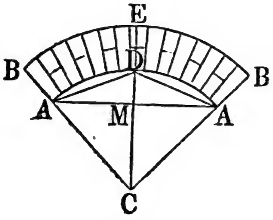
Ist der Halbmesser = 1, so hat man den Bogen:

$\beta = \frac{\beta^0 \pi}{180^0} = 0,017453 \,.\, \beta^0$, sowie umgekehrt

$\beta^0 = 57^0, 2958 \,.\, \beta$ (s. §. 4, Seite 159).

Beispiel 1. Aus der Weite $AA = 2AM = 2y =$ 7 Fuß eines Gewölbbogens, Fig. 14, und aus der Höhe $MD = x = 1,5$ Fuß desselben folgt für den halben Centriwinkel $ACM = \beta$:

Fig. 14.



$tang. \frac{\beta}{2} = \frac{x}{y} = \frac{1,5}{3,5}$

$= 0,42857, \; \frac{\beta}{2} = 23^0, 11'$,

daher $\beta = 46^0, 22'$, und der Halbmesser des Gewölbes:

$$CA = r = \frac{y}{sin. \beta} = \frac{3,5}{sin. 46^0, 22'} = 4,835 \text{ Fuß};$$

unmittelbar ist

$$r = \frac{x^2 + y^2}{2x} = \frac{2,25 + 12,25}{3} = \frac{14,5}{3} = 4,833 \text{ Fuß}.$$

Beispiel 2. Die Länge eines Kreisbogens von $106^0, 21'$ ist bei dem Halbmesser $r = 2,35$ Zoll,

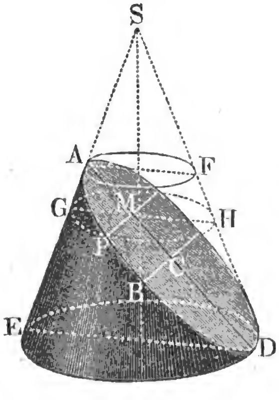
$$b = \frac{\beta^0 \pi r}{180^0} = 106,35 \,.\, 0,017453 \,.\, 2,35 = 4,362 \text{ Zoll}.$$

Beispiel 3. Einem Bogen von 365 Fuß Länge entspricht bei einem Halbmesser r von 2544 Fuß Länge, der Centriwinkel

$$\beta^0 = \frac{b}{\pi r} \cdot 180^0 = \frac{365 \,.\, 57^0,2958}{2544} = 8^0, 2204 = 8^0, 13', 13''.$$

§. 9. Die Ellipse. Bezeichne in der einen Kegelschnitt bildenden Ellipse $APBD$, Fig. 15, a die große Halbaxe $CA = CD$, b die kleine Halbaxe CB, $x = AM$ die erste Coordinate oder Absciffe und $y = MP$ die zweite Coordinate oder Ordinate eines Punktes P dieser Curve, bezeichnen endlich c und d die Durchmesser der Begrenzungskreise DE und AF; dann ist

Fig. 15.



$y^2 = \frac{cd}{4a^2}(2ax - x^2)$; oder da für $x = a$, $y = b$, also

$b^2 = \frac{cd}{4}$ ist,

$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$ und

$y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}$.

Führt man statt x, $CM = CA - AM = a - x$ ein, so erhält man die Gleichung aus dem Mittelpunkt C:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ oder}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \text{ und } y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Aus beiden Gleichungen der Ellipse folgt, daß sich die Ordinate MP, Fig. 16, der Ellipse zu der Ordinate MQ des Kreises, welcher die große Halbaxe dieser Curve zum Halbmesser hat, wie die kleine zur großen Halbaxe verhält. Auf dieses Verhältniß zwischen einer Ellipse und dem Kreise beruht die in Fig. 16 angedeutete Construction der ersteren Curve. Man beschreibt mittelst der Halbmesser $CA = a$ und $CB = b$ zwei concentrische Kreise, zieht die Halbmesser CQ, CQ_1 ..., und durch die Endpunkte Q, Q_1 ... derselben gerade Linien QM, Q_1M_1 parallel zur kleinen Axe BE, sowie aus den Durchschnittspunkten R, R_1 ... zwischen diesen Halbmessern und dem kleineren Kreise gerade Linien parallel zur großen Axe AD. Die sich ergebenden Durchschnitte P, P_1 ... liegen in der Ellipse.

Die Brennpunkte F und F_1 einer Ellipse ABD, Fig. 17, ergeben sich, wenn man $BF = BF_1 = a$ macht, oder die Excentricität

$$e = CF = CF_1 = \sqrt{a^2 - b^2} \text{ aufträgt.}$$

Fig. 16.

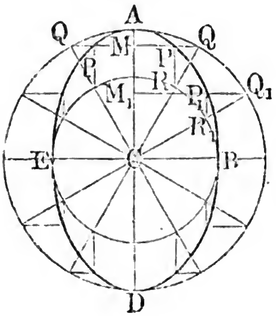
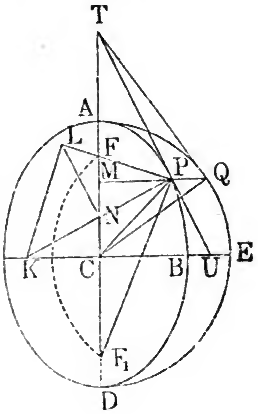


Fig. 17.



Der erste Radiusvector FP eines Punktes P ist

$$z = a - \frac{ex}{a}, \text{ der zweite Radius } F_1P:$$

$$z_1 = a + \frac{ex}{a}$$

und beide zusammen sind $= 2a$. Setzt man den Drehungswinkel $AFP = \varphi$, so hat man auch den Radius

$$z = \frac{b^2}{a + e \cos. \varphi}.$$

Die **Normale** PN halbirt den Winkel FPF_1 zwischen den Radien, die Tangente TU schließt daher mit denselben die gleichen Winkel TPF und UPF_1 ein. Auch durchschneidet sie mit der entsprechenden Tangente QT des Kreises die Richtung der großen Axe in einem und demselben Punkte T. Der in der Richtung der Normale befindliche **Krümmungshalbmesser** KP eines Punktes P ist

$$r = \frac{(z \,.\, z_1)^{3/2}}{ab},$$

daher für den Endpunkt A der großen Halbaxe,

$$r_1 = \frac{b^2}{a}$$

und für den Endpunkt B der kleinen Halbaxe,

$$r_2 = \frac{a^2}{b}.$$

Errichtet man NL rechtwinkelig auf PN, und LK rechtwinkelig auf PF oder PL, so erhält man in KP den Krümmungshalbmesser für den Punkt P.

Errichtet man auf FB, Fig. 18, das Perpendikel FM, so schneidet dasselbe von der Richtung der kleinen Halbaxe den Krümmungshalbmesser $MB = r_2$ für den Punkt B ab; fällt man ferner CD rechtwinkelig auf BF, so erhält man in BD den Krümmungshalbmesser $OA = r_1$ des Punktes A. Derselbe ist auch gleich der Ordinate FP im Brennpunkte F = der Hälfte des Parameters PP_1.

Schneiden zwei **conjugirte Durchmesser** DD_1 und EE_1 die große Axe AA_1 der Ellipse, Fig. 19, unter den Winkeln α und

Fig. 18.

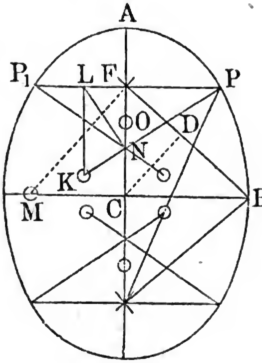
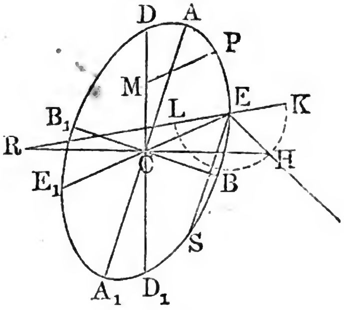


Fig. 19.

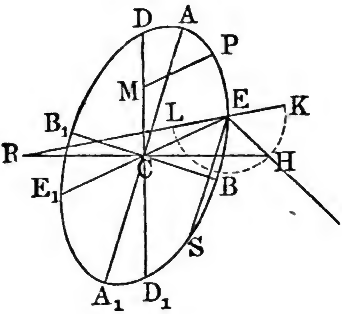


β, so ist $a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$ und $a_1 b_1 \sin.(\alpha + \beta) = ab$, übrigens gilt für die mit diesen Durchmessern parallelen Coordinaten $CM = x_1$ und $MP = y_1$ die Gleichung

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{y_1^2}{b_1^2} = 1.$$

Um aus den conjugirten Durchmessern DD_1 und EE_1 einer Ellipse, Fig. 20, die Axen AA_1 und BB_1 zu finden, ziehe man CH rechtwinkelig auf CD und mache auch $CH = CR = CD$, sowie $EK = EL = EH$ und halbire den Winkel REH; die Halbirungslinie ES giebt die Richtung der großen Axe an, und es ist RK die Größe dieser Axe $2a$, sowie RL die der kleinen Axe $2b$.

Fig. 20.



Der Umfang einer Ellipse ist

$$p = \pi (a+b) \left[1 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + \tfrac{1}{64}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4 + \tfrac{1}{256}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^6 + \cdots\right].$$

Setzt man $a + b =$ dem Durchmesser d eines Kreises, so erhält man für das Verhältniß des Umfanges der Ellipse zu dem Umfange πd dieses Kreises:

$$\mu = 1 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + \tfrac{1}{64}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4 + \cdots,$$

und es ist:

für $\frac{a-b}{a+b} =$	$0/10$	$1/10$	$2/10$	$3/10$	$4/10$	$5/10$
$\mu =$	1,0000	1,0025	1,0100	1,0226	1,0404	1,0635

für $\frac{a-b}{a+b} =$	$6/10$	$7/10$	$8/10$	$9/10$	$10/10$
$\mu =$	1,0922	1,1267	1,1677	1,2155	1,2732

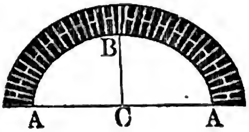
Für einen durch die Coordinaten x und y gegebenen Ellipsenbogen hat man, wenn

$\frac{x}{a} = \sin.\varphi$, $\frac{y}{b} = \cos.\varphi$, und $\frac{a-b}{a+b} = k$ gesetzt wird,

$$s = \frac{a+b}{2}\left[\varphi\left(1 + \tfrac{1}{4}k^2 + \tfrac{1}{64}k^4 + \cdots\right) + k \sin.2\varphi\left(1 - \frac{k^2}{8} + \cdots\right) - \frac{k^2}{8}\sin.4\varphi\left(1 - \frac{k^2}{4}\right) + \frac{k^3}{8}\sin.6\varphi - \tfrac{5}{256}k^4 \sin.8\varphi + \cdots\right].$$

Beispiel. Für ein halbelliptisches Gewölbe, Fig. 21, dessen Weite 10 Fuß und Höhe 3 Fuß ist, hat man die Krümmungshalbmesser $r_1 = \frac{3^2}{5} = 1{,}8$ Fuß und $r_2 = \frac{5^2}{3} = 8^2/_3$ Fuß, sowie die Bogenlänge, da $\frac{a-b}{a+b} = {}^1/_4$,

Fig. 21.

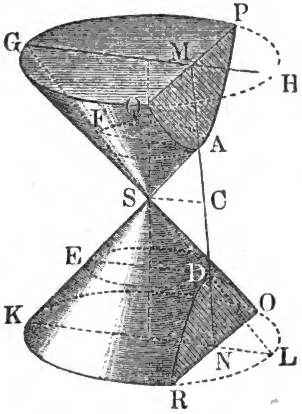


also $\mu = 1{,}0164$ ist,

$$p = {}^1/_2 \,.\, 3{,}1416 \,.\, 16 \,.\, 1{,}0164 = 25{,}536 \text{ Fuß}.$$

§. 10. **Die Hyperbel.** In Fig. 22 seien APQ und DOR die durch einen Kegelschnitt gebildeten zwei Zweige einer Hyperbel. Bezeichnet a die eine Halbaxe $CA = CD$, c den Durchmesser AF und d den Durchmesser DE der durch die Scheitel A und D gehenden Parallelkreise, ist ferner x die Abscisse AM und y die entsprechende Ordinate MP eines Punktes P der Hyperbel, so gilt die Gleichung:

Fig. 22.



$$y^2 = \frac{cd}{4a^2}(2ax + x^2),$$

oder für $\frac{cd}{4} = b^2$, d. i. das Quadrat der zweiten Halbaxe eingeführt,

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2) \text{ und}$$

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax + x^2}.$$

Setzt man den Anfangspunkt nach der Mitte C, führt also statt x, $x - a$ ein, so erhält man die Hyperbelgleichung aus dem Mittelpunkte:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2).$$

Die Brennpunkte F und F_1 einer Hyperbel, Fig. 23 (a. f. S.), ergeben sich, wenn man die Excentricität $CF = CF_1 = CB = e = \sqrt{a^2 + b^2}$ vom Mittelpunkte C aus auf beide Seiten der Axe aufträgt. Es ist der eine Radius

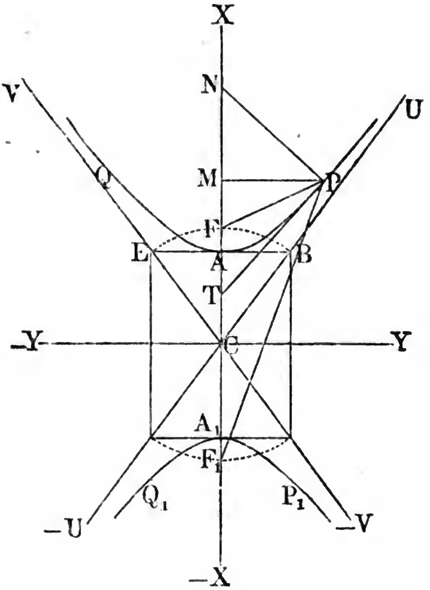
$$FP = z = \frac{ex}{a} - a$$

und der andere

$$F_1P = z_1 = \frac{ex}{a} + a;$$

die Differenz beider Radien ist $z_1 - z = 2a$.

Fig. 23.



Setzt man den Umdrehungswinkel $AFP = \varphi$, so hat man die Polargleichung:

$$z = \frac{b^2}{a + e \cos. \varphi}.$$

Die Tangente PT eines Punktes P halbirt den Winkel FPF_1 zwischen den Radien FP und F_1P, und der Krümmungshalbmesser der Hyperbel an diesem Punkte ist:

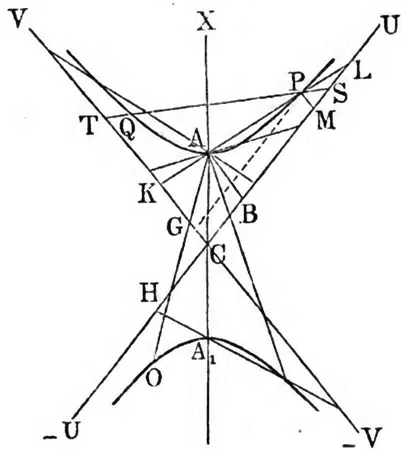
$$r = \frac{(z z_1)^{3/2}}{ab}.$$

Im Scheitel ist dieser Halbmesser $r_1 = \frac{b^2}{a}$ am kleinsten. Je entfernter ein Element vom Scheitel liegt, je größer ist auch sein Krümmungshalbmesser. Uebrigens ist dieser Halbmesser construirend genau so zu finden wie bei der Ellipse.

Der Winkel $UCX = VCX = \alpha$, unter welchem die Axe XX von den Asymptoten $U\overline{U}$, $V\overline{V}$ geschnitten wird, ist bestimmt durch die Gleichung $tang. \alpha = \frac{b}{a}$. Bei der gleichseitigen Hyperbel ist $b = a$, daher $tang. \alpha = 1$ und $\alpha = 45^0$. Nimmt man die Coordinaten in den Richtungen der Asymp-

toten, setzt man die Abscisse $CM = u$, und die entsprechende Ordinate $MP = v$, Fig. 24, so gilt die Gleichung

Fig. 24.



$$uv = \frac{a^2 + b^2}{4},$$

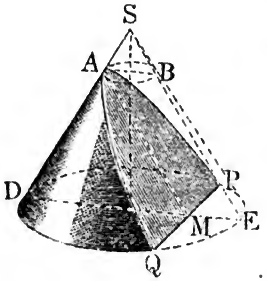
oder die sogenannte **Potenz** $\frac{a^2 + b^2}{4}$ der Hyperbel durch p^2 bezeichnet,

$$uv = p^2.$$

Die Stücke PS und QT einer Geraden, zwischen den Asymptoten und der Hyperbel, sind einander gleich. Ebenso ist auch $PL = AK$, $OH = AG$ u. s. w. Hierauf beruht eine einfache Construction der Hyperbel.

§. 11. **Die Parabel.** Wenn der Schnitt APQ, Fig. 25, eines Kegels DSE einer Kegelseite SE parallel läuft, und auf der Axenebene DSE rechtwinkelig steht, so ist die Durchschnittsfigur eine **Parabel**. Bezeichnet c den Durchmesser AB des Kreises durch den Scheitel, d die Seite BS parallel zum Schnitte, x die Abscisse AM und y die Ordinate MP, so hat man die Parabelgleichung

Fig. 25.



$$y^2 = \frac{c^2 x}{d}$$ oder den Parameter $$p = \frac{c^2}{d}$$ eingeführt, $y^2 = px$.

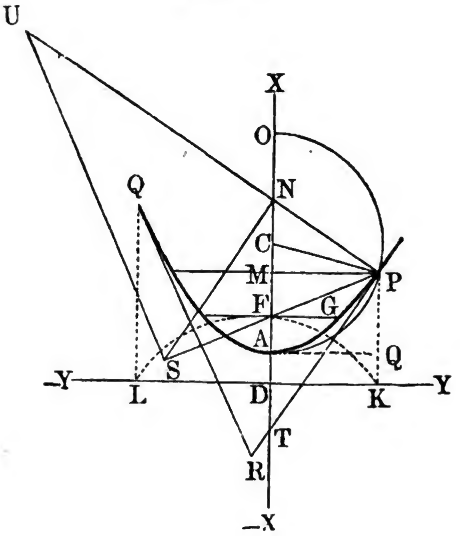
Trägt man den gegebenen Parameter $p = MO$, Fig. 26 (a.f.S.) an das Ende einer Abscisse $x = AM$, und beschreibt man über AO einen Kreis, so schneidet dieser die entsprechende Ordinate MP von dem Perpendikel in M ab. Für $x = p$ ist auch $y = p$, und für $AF = x = \frac{p}{4}$, $FG = y = \frac{p}{2}$.

Der **Brennpunkt** F ergiebt sich, wenn man die Brennweite $AF = \frac{p}{4}$ aufträgt. Der **Radius** FP ist $z = x + \frac{p}{4}$, oder durch den Umdrehungswinkel $AFP = \varphi$ ausgedrückt,

$$z = \frac{\frac{1}{2} p}{1 + \cos. \varphi}.$$

Die Subtangente MT ist $= 2x$, d. i. gleich der doppelten Abscisse, und die Subnormale MN ist dem halben

Fig. 26.



Parameter $\left(\frac{p}{2}\right)$ gleich. Uebrigens schließt die Tangente PT mit der Abscissenaxe $X\overline{X}$ und mit dem Radius FP gleiche Winkel $PTF = TPF = \alpha$ ein.

Um aus einem Punkte R außerhalb der Parabel die Tangenten an diese zu ziehen, beschreibe man mit RF aus R den Kreisbogen KFL und errichte in K und L die Perpendikel KP und LQ auf der Leitlinie: P und Q sind dann die entsprechenden Berührungspunkte.

Der Krümmungshalbmesser PU eines Punktes P ist $r = \frac{(4x + p)^{3/2}}{2\sqrt{p}} = \frac{4 z^{3/2}}{\sqrt{p}}$, also für den Scheitel A, $r = \frac{1}{2} p$.

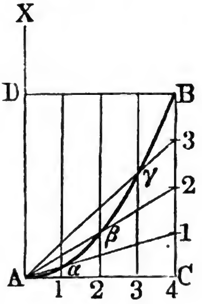
Die Construction zur Bestimmung des Krümmungshalbmessers PU ist genau dieselbe wie bei der Ellipse; es ist NS rechtwinkelig auf PN, und SU rechtwinkelig auf PF zu legen.

Die Leitlinie $Y\overline{Y}$ steht auf der Axe $X\overline{X}$ winkelrecht, und vom Scheitel A um $AD = \frac{p}{4}$ ab. Es ist

$PK = PF = x + \frac{p}{4}$, d. h. jeder Punkt P der Parabel steht von der Leitlinie eben so viel ab, wie vom Brennpunkte F.

Hiernach läßt sich die Parabel leicht construiren. Einfach aber auch dadurch, daß man die Coordinaten AC und CB, Fig. 27, in gleiche Theile theilt, durch die Theilpunkte der AC Parallelen zu AX und aus dem Scheitel A Transversalen nach den Theilpunkten von CB zieht: die Durchschnittspunkte α, β, γ liegen in der Parabel AB.

Fig. 27.



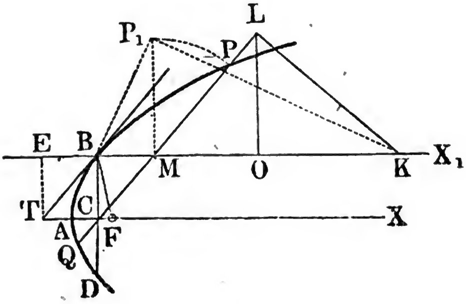
Der mit der Axe AX parallel laufende Durchmesser BX_1, Fig. 28, halbirt alle Sehnen PQ parallel zur Tangente BT. Bezeichnen x_1 und y_1 die in den letzten Richtungen genommenen Coordinaten BM und MP, so hat man wie für die in A anfangenden Coordinaten

$y_1^2 = p_1 x_1$, und es ist der entsprechende Parameter

$$p_1 = \frac{p}{sin.\ \alpha^2} = 4 \text{ Radius } FB.$$

Der Parameter $MK = p_1$ wird gefunden, wenn man $MP_1 = MP = y_1$ rechtwinkelig auf BX_1 stellt, und P_1K

Fig. 28.



rechtwinkelig auf BP_1 zieht. Aus p_1 bestimmt sich der Parameter $KO = p$, wenn man KL rechtwinkelig auf MP und LO rechtwinkelig gegen MX_1 fällt.

Um die Parabelaxe zu finden, macht man in der Verlängerung von BX_1, $BE = \frac{1}{2} MO$, errichtet in E das Perpendikel ET, und zieht durch den Durchschnitt T desselben mit der Tangente durch B die Parallele TX zu BX_1. Macht man endlich noch $TA = \frac{1}{2} BE = \frac{1}{4} MO$, so erhält man in A den Parabelscheitel.

Die Länge eines gedrückten Parabelbogens PAQ, Fig. 29 (a. f. S.), ist annähernd $b = s\left[1 + \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{h}{s}\right)^2\right]$,

wenn s die Sehne PQ und h die Bogenhöhe AM bezeichnet. Diese Formel läßt sich übrigens auf alle Bogen anwenden, deren Höhe h klein gegen die Sehne s ist

Fig. 29.



Umgekehrt ist

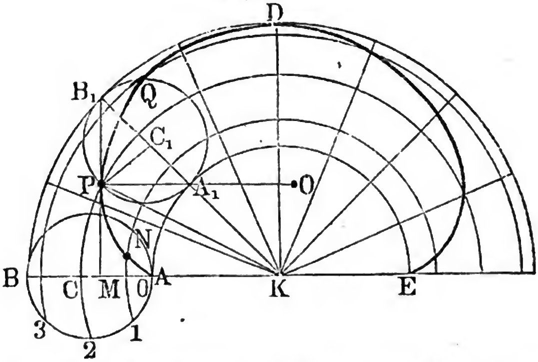
$$h = \sqrt{\tfrac{3}{8} s (b - s)}.$$

Beispiel. Ein gedrückter Bogen, dessen Sehne 10mal so groß ist als seine Höhe, hat annähernd die Länge

$$b = s\left[1 + \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2\right] = \left(1 + \frac{8}{300}\right) s = 1{,}027 \,.\, s.$$

§. 12. **Rolllinien.** Wenn ein Kreis AB, Fig. 30, auf einem anderen Kreise AE rollt oder sich auf demselben wälzt, so

Fig. 30.



beschreibt jeder Punkt desselben, z. B. A, eine Epicycloide, wie $APDE$. Erfolgt dieses Wälzen innerhalb des Grundkreises, so wird eine Hypocycloide erzeugt. Ist der Grundkreis unendlich groß gegen den Erzeugungskreis, so geht ein Theil desselben in eine gerade Linie über, und dann ist die erzeugte Curve eine Cycloide. Bei dem Rollen oder Wälzen ist der auf dem Grundkreise zurückgelegte bogenförmige Weg AA_1 gleich dem Drehungsbogen A_1P des Erzeugungskreises. Ist r der Halbmesser $AC = BC$ des Erzeugungskreises, und a der Halbmesser $AK = A_1K$ des Grundkreises, ferner ψ der Umdrehungswinkel A_1C_1P des Erzeugungs- und φ der entsprechende Centriwinkel AKA_1 des Grundkreises, so hat man $r\psi = a\varphi$, und daher $\varphi = \frac{r}{a}\psi$. Für eine halbe Umdrehung oder für eine halbe Epicycloide ist $\psi = 180^0$, daher $AKD = \varphi = \frac{r}{a} \cdot 180^0$. Theilt man nun den Winkel AKD und den Halbkreis AB in eine gleiche Anzahl gleicher Theile, so ergeben sich Punkte N, P, Q der Epicycloide, wenn man $1N$, $2P$, $3Q$ u. s. w. den Bögen gleich macht, welche bei entsprechenden Halbmessern einen, zwei, drei Theile u. s. w. des Centriwinkels AKD zwischen sich fassen. Für die Coordinaten $KM = x$ und $MP = y$ eines Punktes hat man

$$x = (a + r)\cos.\varphi - r\cos.(\varphi + \psi) \text{ und}$$
$$y = (a + r)\sin.\varphi - r\sin.(\varphi + \psi).$$

Die **Normale** PA_1 in einem Punkte P der Epicycloide geht durch den Punkt A_1, in welchem der Erzeugungskreis den Grundkreis berührt, die **Tangente** PB_1 aber geht durch den gegenüberliegenden Punkt B_1 des Erzeugungskreises. Der **Krümmungshalbmesser** ist $PO = \frac{a+r}{a+2r}$ mal die doppelte Sehne $A_1 P$. Die **Bogenlänge** ANP ist $\frac{a+r}{a}$ mal die doppelte Differenz, zwischen dem Durchmesser $A_1 B_1$ und der Sehne PB_1. Algebraisch ist

$$PO = k = \frac{4(a+r)r}{a+2r} \sin.\, {}^1\!/_2\, \psi \text{ und}$$

$$ANP = s = \frac{4r(a+r)}{a}(1 - \cos.\, {}^1\!/_2\, \psi).$$

Im Anfangspunkte A ist $k=0$, im Scheitel D ist $k = \frac{4(a+r)r}{a+2r}$. Die Länge der vollständigen Epicycloide ADE giebt die Formel

$$l = \frac{8r(a+r)}{a}.$$

Für die **Hypocycloide** geht $a + r$ in $a - r$ und $a + 2r$ in $a - 2r$ über, es ist daher die Länge einer vollständigen Hypocycloide

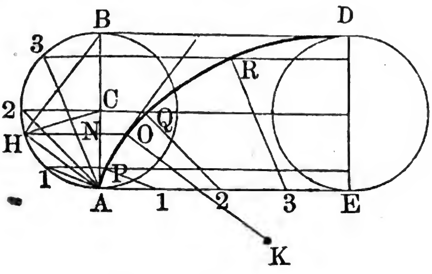
$$l = \frac{8r(a-r)}{a}, \text{ z. B. für } r = {}^1\!/_2\, a.$$

$$s = 2a = 4r.$$

Ein Kreis, welcher sich im Innern eines doppelt so großen Kreises wälzt, beschreibt allerdings eine mit dem Durchmesser des letzteren zusammenfallende **Hypocycloide**.

Bei der **gemeinen Cycloide** AOD, Fig. 31, ist $a = \infty$, daher der Krümmungshalbmesser an einer Stelle O derselben, $OK = 4r\sin.{}^1\!/_2\psi$, d. i. gleich der doppelten Sehne AH des Erzeugungskreises AHB, und die Bogenlänge

Fig. 31.



$$AO = s = 4r(1 - \cos.\, {}^1\!/_2 \psi),$$

d. i. gleich der doppelten Differenz zwischen dem Durchmesser AB und der Sehne HB. Die Länge der halben Cycloide AOD ist $= 4r$. Um die Cycloide zu construiren, theilt man den Halbkreis $AHB = \pi r$, sowie die Basis $AE = \pi r$ in gleiche Theile, und trägt die Theile $A1$, $A2$, $A3$ u. s. w. der letzteren Linie

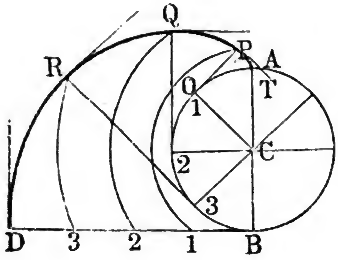
parallel zu AE an die Theilpunkte 1, 2, 3 ... des ersteren; die sich hierdurch ergebenden Punkte P, Q, R ... liegen in der Cycloide AOD.

Aus dem Drehungswinkel $ACH = \psi$ ergiebt sich auch die Abscisse $AN = x = r\,(1 - cos.\,\psi)$
und die Ordinate $NO = y = r\,(\psi - sin.\,\psi)$, auch ist

$$y = r\,arc.\left(cos. = \frac{r-x}{r}\right) - \sqrt{x\,(2\,r - x)}.$$

§. 13. **Die Kreisevolvente.** Die Kreisevolvente und die Cycloide stehen in genauer Beziehung zu einander. Während die Cycloide von einem Punkte eines sich auf einer geraden Linie wälzenden Kreises beschrieben wird, entsteht die Kreisevolvente dadurch, daß sich eine gerade Linie auf dem Kreise wälzt. Um die letztere zu construiren, mache man den Bogen AOB, Fig. 32, des Grundkreises AB der gegebenen Erzeugungslinien BD gleich, theile beide in gleiche Theile, ziehe Tangenten durch die Theilpunkte des ersten und trage auf diese die 1-, 2-, 3fachen Theile u. s. w. der Geraden BD; die sich ergebenden Punkte P, Q, R liegen in der Kreisevolvente. Mechanisch construirt man dieselbe durch einen Faden AB und mit Hülfe einer kreisförmigen Schablone. Man legt diesen Faden allmälig auf den Umfang der Schablone auf, indem man das übrig bleibende gerade Stück tangential auszieht.

Fig. 32.



Man findet die Normale in einem Punkte P dieser Curve, wenn man eine Berührungslinie PO nach dem Grundkreise zieht, daher die Tangente, wenn man ein Perpendikel PT auf PO errichtet. Der Krümmungshalbmesser der Kreisevolvente ist der Tangente PO des Grundkreises gleich, die Evolventenlänge AP ist

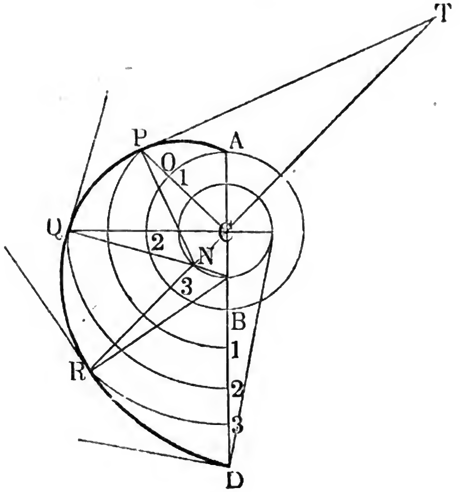
$$s = \frac{u^2}{2\,r},$$

wenn u den abgewickelten Bogen $OA = OP$, sowie r den Halbmesser $CA = CO$ des Grundkreises bezeichnet.

§. 13*. **Die archimedische Spirallinie und die Daumencurve.** Um eine archimedische Spirallinie AQD, Fig. 33, zu construiren, theilt man den gegebenen Kreisbogen $AOB = \beta r$ und die entsprechende Höhe oder das Wachsthum $BD = b$ des Halbmessers $CB = r$, in gleiche Theile, zieht durch die ersteren Theilpunkte radiale Linien, sowie durch die

letzteren aus dem Mittelpunkte C des gegebenen Kreises concentrische Kreisbögen; die letzteren durchschneiden die ersteren in Punkten P, Q, R der archimedischen Spirallinie.

Fig. 33.



Ist u das Wachsthum OP des Strahles CO für den Drehungswinkel $ACO = \psi$, so hat man $\frac{u}{b} = \frac{\psi}{\beta}$, daher $u = \frac{b\psi}{\beta}$, und den veränderlichen Radius $CP = z = r + \frac{b\psi}{\beta}$.

Auch ist $z = r + a\psi$, wenn $a = \frac{b}{\beta}$ den Halbmesser bezeichnet, welcher dem Centriwinkel $ACB = \beta$ und der Höhe $BD = b$, als Bogenlänge angesehen, zukommt.

Die Subtangente eines Punktes P ist $CT = \frac{z^2}{a}$, und die Subnormale $CN = a$.

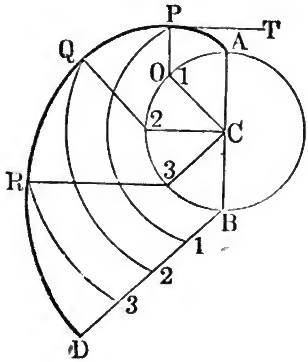
Die Tangente PT steht rechtwinkelig auf PN, wie die Subtangente und Subnormale rechtwinkelig auf CP.

Die Kreisevolvente und die archimedische Spirallinie sind specielle Fälle der Daumencurve AQD, Fig. 34 (a. f. S.), während bei der Kreisevolvente die Erzeugende OP rechtwinkelig auf den Drehungshalbmesser steht, und bei der archimedischen Spirallinie in die Verlängerung dieses Halbmessers fällt, schließt bei dem Daumencurven die Erzeugende OP irgend einen schiefen Winkel COP mit dem Drehungshalbmesser CO ein. Um diese Curve zu construiren, theilt man den Bogen $AOB = r\beta$, und die entsprechende Größe $BD = b$ der Erzeugungslinie in gleiche Theile, trägt den gegebenen Winkel $CBD = \delta$ an die ersteren Theilpunkte und beschreibt aus den Theilpunkten der

BD concentrische Kreise; dieselben schneiden von den Schenkeln der Winkel $C1P = C2Q = C3R = CBD$ die Punkte P, Q, R in der Daumenlinie ab.

Für den Tangentenwinkel $OPT = \alpha$ der Daumencurve ist

Fig. 34.



$$tang.\,\alpha = \frac{u - r\,cos.\,\delta}{a - r\,sin.\,\delta},$$

wo u die entsprechende Größe OP der Erzeugungslinie und

$$a = \frac{b}{\beta} = \frac{BD}{arc.\,ACB}$$

ist.

Für die Kreisevolvente ist $\delta = 90$ Grad und $b = \beta r$, folglich

$$tang.\,\alpha = \frac{u}{0} = \infty,$$ also

$\alpha = 90$ Grad, für die archimedische Spirallinie ist dagegen $\delta = 180^0$, daher

$$tang.\,\alpha = \frac{u + r}{a} = \frac{z}{a}.$$

§. 14. Flächenräume geradliniger Figuren. Ist die Seite $AB = BC$ eines Quadrates, Fig. 35, $= a$, so hat man für den Inhalt desselben:

I. $F = a^2$, und umgekehrt, $a = \sqrt{F}$.

Ist die Grundlinie eines recht- oder schiefwinkeligen Parallelogrammes AC, Fig. 36 oder Fig. 37, $= a$ und die Höhe $= h$, so hat man für den Inhalt desselben:

Fig. 35.

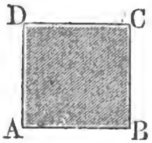
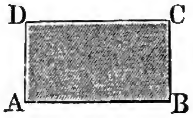


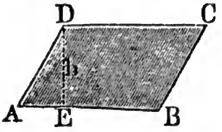
Fig. 36.



II. $F = a\,h$.

Aus den Seiten $AB = a$ und $AD = BC = b$ ergiebt sich mit Hülfe des Winkels $BAD = A$ der Inhalt des letzteren $F = ab\,sin.\,A$.

Fig. 37.

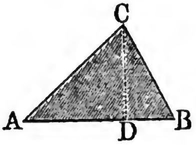


Aus der Grundlinie $AB = c$ und der Höhe $CD = h$ ergiebt sich der Inhalt eines Dreieckes ABC, Fig. 38, durch die Formel

$$F = \frac{ch}{2}.$$

Mit Hülfe der Seiten $AB = c$ und $AC = b$ und des eingeschlossenen Winkels A aber:

Fig. 38.



$$F = \tfrac{1}{2} bc \sin. A.$$

Aus den Winkeln und einer Seite $AB = c$ folgt:

$$F = \frac{c^2 \sin. A \sin. B}{2 \sin. C}.$$

Mit Hülfe aller drei Seiten a, b, c, deren Summe $a + b + c = s$ sein möge, folgt

$$F = \sqrt{\tfrac{1}{2}s(\tfrac{1}{2}s - a)(\tfrac{1}{2}s - b)(\tfrac{1}{2}s - c)}.$$

Aus den parallelen Seiten $AB = a_1$ und $CD = a_2$ und aus der Höhe $DE = h$ folgt der Inhalt eines Trapezes, Fig. 39:

$$\text{III.} \quad F = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) h.$$

Der Inhalt eines Trapezoides, Fig. 40, ergiebt sich aus der

Fig. 39.

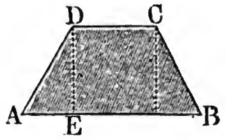
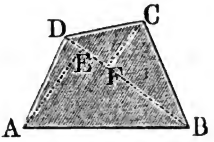


Fig. 40.



Diagonale $BD = d$ und den Höhen $AE = h_1$ und $CF = h_2$ der Dreiecke, in welche diese Figur durch die Diagonale getheilt wird, mittels der Formel:

$$\text{IV.} \quad F = \left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right) d.$$

Die Inhalte von Polygonen, wie Fig. 41, 42 und 43

Fig. 41.

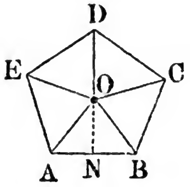
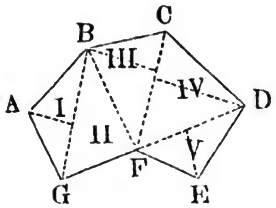


Fig. 42.



(a. f. S.) findet man, wenn man diese in Dreiecke oder Trapeze zerlegt und die Inhalte derselben addirt.

Aus den Coordinaten $OB_1 = x_1$, $OC_1 = y_1$ und $OB_2 = x_2$ und $OC_2 = y_2$ zweier Endpunkte eines Dreieckes $A_1 A_2 O$, dessen dritter Endpunkt O, Fig. 44 (a. f. S.), mit dem Anfangspunkte der Axen zusammenfällt, ergiebt sich der Inhalt desselben:

V. $F = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2}$.

Fig. 43.

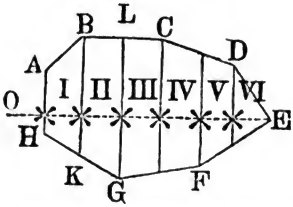
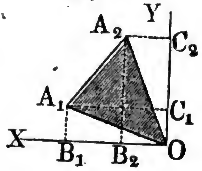


Fig. 44.



Durch wiederholte Anwendung dieser Formel läßt sich nun auch der Inhalt eines Polygones ACE, Fig. 45, finden, wenn dessen Endpunkte ebenfalls rücksichtlich zweier Axen XX und YY bestimmt sind.

Fig. 45.

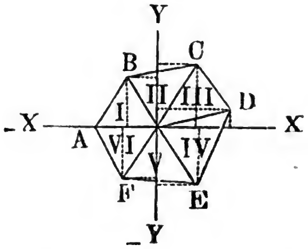
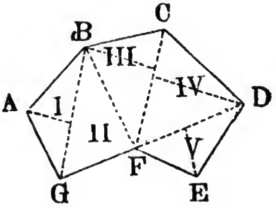


Fig. 46.



Sind y_1, y_2, $y_3 \ldots$ die Parallelen AH, BK, $GL \ldots$ des Polygones $AGEC$, Fig. 43, sowie x_1, x_2, $x_3 \ldots$ die Abstände derselben von einem gewissen Anfangspunkte O, so hat man für den Inhalt dieses Polygons

$$\text{VI.} \quad F = \tfrac{1}{2} [(x_2 - x_1)\, y_1 + (x_3 - x_1)\, y_2 + (x_4 - x_2)\, y_3 + (x_5 - x_3)\, y_4 + \cdots].$$

Beispiel 1. Das Siebeneck, Fig. 46, besteht aus fünf Dreiecken mit folgenden Dimensionen und Inhalten:

Nummer.	Grundlinie.	Höhe.	Inhalt.
I.	75,2 Fuß	25,0	940 □Fuß
II.	75,2 »	38,0	1428,8 »
III.	68,7 »	41,6	1429,0 »
IV.	68,7 »	54,2	1861,8 »
V.	69,0 »	29,0	1000,5 »
Hiernach ist der Inhalt der ganzen Fläche:			6660,1 □Fuß

Beispiel 2. Das Achteck $ACEF$, Fig. 43, läßt sich in sechs Trapeze mit folgenden Verhältnissen zerlegen:

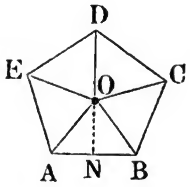
Nummer des Trapes.	Erste Grundlinie.	Zweite Grundlinie.	Höhe.	Inhalt.
I.	37,0 Ruth.	66,2	17,6	908,16 □R.
II.	66,2 »	80,4	24,0	1759,20 »
III.	80,4 »	77,0	23,2	1825,84 »
IV.	77,0 »	65,0	21,7	1540,70 »
V.	65,0 »	49,8	16,2	929,88 »
VI.	49,8 »	0,0	23,2	577,68 »
Hiernach ist der Inhalt der ganzen Fläche:				7541,46 □R.

Beispiel 3. Das Sechseck ACE, Fig. 45, ist durch folgende Coordinaten seiner Eckpunkte gegeben, und läßt sich daher in folgende Dreiecke zerlegen:

Eckpunkte.	Coordinaten.		Dreiecke.	
	x	y	Nummer.	Inhalte.
A	36,0	0	I.	504,00
B	19,2	28,0	II.	595,76
C	— 17,8	36,1	III.	634,68
D	— 39,6	9,0	IV.	733,14
E	— 23,0	— 31,8	V.	683,30
F	22,0	— 29,0	VI.	522,00
Hiernach ist der Inhalt der ganzen Figur:				3672,88.

Beispiel 4. Aus der Seite $AB = s$, eines regelmäßigen Fünfeckes, Fig. 47, folgt der Halbmesser

Fig. 47.



$$AO = r = s\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}},$$

und daher die Höhe

$$ON = h = \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}$$

$$= s\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}};$$

demnach ist der Inhalt des regelmäßigen Fünfeckes:

$$F = 5 \cdot \frac{sh}{2} = \tfrac{5}{2} s^2 \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{20}} = \frac{s^2}{4} \sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}$$
$$= 1{,}7205\, s^2.$$

Ist allgemein, n die Anzahl der Seiten eines regelmäßigen Polygons, r der Halbmesser des umschließenden Kreises, s die Seitenlänge und h die Höhe eines Ergänzungsdreieckes und α der Centriwinkel oder der Winkel an der Spitze eines solchen Dreieckes, so hat man

$$\alpha^0 = \frac{360^0}{n}, \quad \alpha = \frac{2\pi}{n},$$

$$s = 2r\, sin. \frac{\alpha}{2} = 2r\, sin. \left(\frac{180^0}{n}\right)$$

$$h = r\, cos. \frac{\alpha}{2} = r\, cos. \left(\frac{180^0}{n}\right)$$

und daher den Inhalt des ganzen Polygones

$$F = \frac{nsh}{2} = nr^2\, sin. \frac{\alpha}{2}\, cos. \frac{\alpha}{2} = \frac{nr^2}{2}\, sin.\, \alpha$$
$$= \frac{nr^2}{2}\, sin. \left(\frac{360^0}{n}\right).$$

Hiernach hat man für die ersten 14 regelmäßigen Polygone folgende Inhalte:

Polygone.	Seitenlänge $s = 1$.		Halbmesser $r = 1$.	
	Halbmesser r.	Inhalt F.	Seite s.	Inhalt F.
Dreieck . . .	0,5774	0,4330	1,73205	1,2990
Viereck . . .	0,7071	1,0000	1,41421	2,0000
Fünfeck . . .	0,8507	1,7205	1,17557	2,3776
Sechseck . .	1,0000	2,5981	1,00000	2,5981
Siebeneck . .	1,1524	3,6339	0,86777	2,7364
Achteck . . .	1,3066	4,8284	0,76537	2,8284
Neuneck . .	1,4619	6,1818	0,68404	2,8925
Zehneck . .	1,6180	7,6942	0,61803	2,9389
Elfeck . . .	1,7747	9,3656	0,56347	2,9735
Zwölfeck . .	1,9319	11,1962	0,51764	3,0000
Dreizehneck .	2,0893	13,1858	0,47863	3,0207
Vierzehneck .	2,2470	15,3345	0,44504	3,0371
Fünfzehneck .	2,4049	17,6424	0,41582	3,0505
Sechszehneck .	2,5629	20,1094	0,39018	3,0615

§. 15. Flächenräume krummliniger Figuren.

Der Inhalt einer Kreisfläche, Fig. 48, ergiebt sich aus dem Halbmesser $CA = CB = r$ durch die Formel:

I. $F = \pi r^2$,

und aus dem Durchmesser $AB = d = 2r$ durch die Formel:

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = 0{,}7854 \, . \, d^2.$$

Umgekehrt entspricht dem kreisförmigen Flächenraume F der Halbmesser

$$r = \sqrt{\frac{F}{\pi}} = 0{,}5642 \sqrt{F},$$

und der Durchmesser

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = 1{,}1284 \sqrt{F}.$$

Fig. 48.

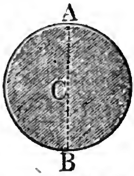
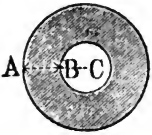


Fig. 49.



Für die Ringfläche, Fig. 49, mit den Halbmessern $CA = r_1$ und $CB = r_2$ ist:

II. $F = \pi (r_1^2 - r_2^2) = \pi (r_1 + r_2)(r_1 - r_2)$.

Für den Kreisausschnitt, Fig. 50, mit dem Halbmesser $CA = r$ und dem Centriwinkel $ACB = \beta^0$ ist

III. $F = \frac{1}{2} br = \frac{1}{2} \beta r^2 = \frac{\beta^0}{360^0} \cdot \pi r^2 = 0{,}008727 \beta^0 r^2$,

wenn β den Bogen vom Halbmesser 1 und b den Bogen AB des Ausschnittes mit dem Halbmesser r bezeichnet. Umgekehrt ist:

$$\beta^0 = \frac{F}{\pi r^2} \cdot 360^0 \text{ und } r = \sqrt{\frac{360^0}{\beta^0} \cdot \frac{F}{\pi}} = \sqrt{\frac{2F}{\beta}}.$$

Fig. 50.

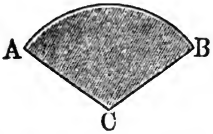
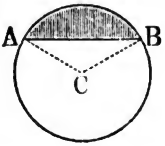


Fig. 51.



Für den Kreisabschnitt AB, Fig. 51, mit dem Halbmesser $CA = CB = r$ und dem Centriwinkel $ACB = \beta^0$ hat man:

IV. $F = (\beta - sin. \beta) \frac{r^2}{2} = \left(\frac{\beta^0 \pi}{180^0} - sin. \beta\right) \frac{r^2}{2}$

$= (0{,}017453 \beta^0 - sin. \beta) \frac{r^2}{2}$.

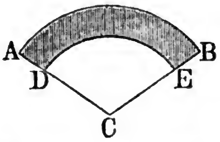
Um aus dem Inhalte F und dem Halbmesser r den Centriwinkel zu finden, muß man den Näherungsweg einschlagen. Es ist nämlich $\beta - sin. \beta = \frac{2F}{r^2}$ zu setzen. Ist β_1 ein Näherungswerth von β, so läßt sich setzen:

$$\beta = \left(\frac{2F}{r^2} + sin. \beta_1 - \beta_1 \, cos. \beta_1\right) : (1 - cos. \beta_1).$$

Diese Bestimmung wird durch die Tafel IV., Seite 152, wesentlich erleichtert.

Der Inhalt des Ringstückes AE, Fig. 52, ergiebt sich aus den Halbmessern $CA = r_1$ und $CD = r_2$ und aus den Centriwinkeln $ACB = \beta$ durch die Formel:

Fig. 52.

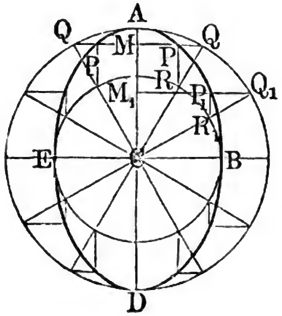


$$\text{V.} \quad F = \frac{\beta (r_1^2 - r_2^2)}{2}$$
$$= \frac{\beta^0 \pi}{360^0} (r_1^2 - r_2^2)$$
$$= 0{,}008727 \; \beta^0 (r_1^2 - r_2^2).$$

Der Inhalt einer Ellipse, Fig. 53, wird aus beiden Halbaxen $CA = a$ und $CB = b$ durch die Formel

$$F = \pi a b \text{ gefunden.}$$

Fig. 53.



Der Inhalt des elliptischen Segmentes PAP ist

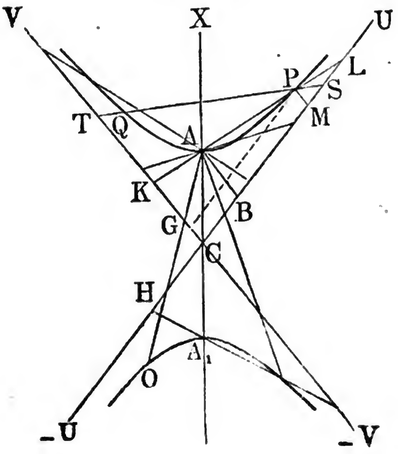
$$= \frac{b}{a} \text{ mal Kreissegment}$$

$$QAQ = (\beta - \sin.\beta) \frac{ab}{2},$$

wenn β den Centriwinkel QCQ des entsprechenden Kreissegmentes bezeichnet.

Sind a und b die Halbaxen CA und CB einer Hyperbel, Fig. 54, und ist e die Excentricität derselben $\sqrt{a^2 + b^2}$, u aber eine

Fig. 54.



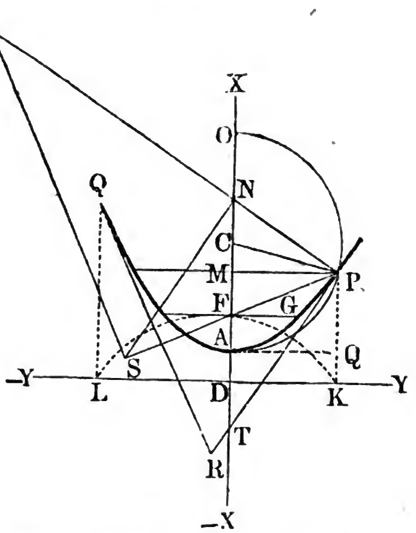
Abscisse CM auf der einen Asymptote CU, so hat man für das durch die Ordinaten AB und PM begrenzte sowie zwischen der Curve und zwischen der Asymptote liegende Flächenstück:

$$F = \frac{a\,b}{2}\ log.\,nat.\left(\frac{2\,u}{c}\right).$$

Daher der Name hyperbolische Logarithmen.

Der Inhalt eines Parabelsegmentes AMP, Fig. 55, ist

Fig. 55.

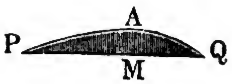


zwei Drittel von dem umschließenden Rechtecke $AMPQ = \frac{2}{3}xy$. Ebenso läßt sich für ein niedriges Segment PQ, Fig. 56, setzen:

$$F = \frac{2}{3}\,sh,$$

wenn s die Sehne PQ und h die Höhe AM bezeichnet.

Fig. 56.



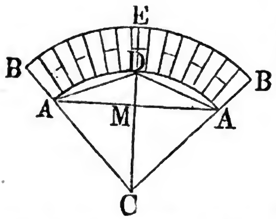
Beispiel 1. Von der Stirnfläche AE eines Gewölbes, Fig. 57, mißt der innere Halbmesser $CA = 8{,}5$ Fuß, die Dicke $AB = 1\frac{3}{4}$ Fuß und der Centriwinkel 140°, 15', welches ist der Inhalt derselben?

$$F = 0{,}008727 \,.\, 104^0{,}25 \,.\, (8{,}5 + 10{,}25) \,.\, 1{,}75$$

$$= 0{,}008727 \,.\, 104^0{,}25 \,.\, \frac{525}{16}$$

$$= 29{,}85 \text{ Quadrat-Fuß.}$$

Fig. 57.



Beispiel 2. Von dem elliptischen Segmente PAP, Fig. 53, mißt die Höhe $AM = 5$ Zoll, die Sehne $PP = 16$ Zoll und die Halbaxe $CA = a = 15$ Zoll. man sucht den Inhalt

desselben. Zunächst ist für den Centriwinkel $QCQ = \beta$ des entsprechenden Kreissegmentes:

$$\cos. \tfrac{1}{2}\beta = \frac{CM}{CQ} = \frac{15-5}{15} = {}^{10}/_{15} = {}^{2}/_{3},\ \tfrac{1}{2}\beta = 48^0, 11', 23'',$$

daher $\beta = 96^0, 22', 46''$, und die halbe Sehne des Kreises: $QM = 15\ \sin.\ \tfrac{1}{2}\beta = 11{,}18$ Zoll, hieraus die Halbaxe

$$CB = b = \frac{PM}{QM} \cdot CB = \frac{8 \,.\, 15}{11{,}18} = 10{,}736 \text{ Zoll, und}$$

endlich der gesuchte Inhalt des elliptischen Segmentes:

$$F = (\beta - \sin.\ \beta)\,\frac{ab}{2} = (1{,}68214 - 0{,}99381)\,\frac{15 \,.\, 10{,}736}{2}$$

$= 55{,}42$ Quadrat=Zoll.

§. 16. Simpson's Regel. Aus der Grundlinie $AB = a$ und den drei in gleichen Abständen gemessenen Höhen h_0, h_1 und h_2 der Figur in Fig. 58 ergiebt sich die mittlere Höhe derselben durch die Formel:

$$h = \frac{h_0 + 4h_1 + h_2}{6}$$

und der Inhalt, jedoch nur annähernd, wenn CD kein Parabelbogen ist:

$$\text{I.} \quad F = ah = \frac{a(h_0 + 4h_1 + h_2)}{6}.$$

Fig. 58.

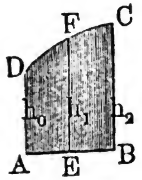
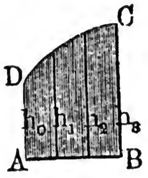


Fig. 59.



Aus der Grundlinie $AB = a$, Fig. 59, und den vier, in gleichen Abständen von einander liegenden Höhen h_0, h_1, h_2, h_3 folgt der mittlere Werth dieser Höhen:

$$h = \frac{h_0 + 3(h_1 + h_2) + h_3}{8}$$

und daher der Inhalt:

$$\text{II.} \quad F = \frac{a[h_0 + 3(h_1 + h_2) + h_3]}{8}.$$

Für den Inhalt einer durch die Länge $EF = a$ und durch die Höhen $h_0, h_1, h_2 \dots h_n$ gegebenen Figur, Fig. 60, hat man annähernd:

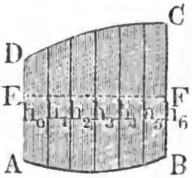
$$\text{III.} \quad F = (\tfrac{1}{2}h_0 + h_1 + h_2 + \dots + h_{n-1} + \tfrac{1}{2}h_n)\frac{a}{n},$$

oder genauer, wenn die Zahl der Theile eine gerade ist:

$$\text{IV.} \quad F = [h_0 + 4(h_1 + h_3 + \dots + h_{n-1}) + 2(h_2 + h_4 + \dots + h_{n-2}) + h_n]\frac{a}{3n}.$$

Die letzte Formel ist unter dem Namen der Simpson'schen Regel bekannt, und läßt sich auch in dem Falle anwenden, wenn die Zahl der gleich breiten Streifen, in welche die Fläche durch die Höhen h_0, h_1, h_2 u. s. w. zerlegt wird, eine ungerade ist. In diesem Falle berechnet man entweder ein Stück mit 3 Streifen nach der Regel II. oder nur einen Streifen, wie z. B. $AEFD$, Fig. 58, nach der Formel

Fig. 60.



$$\text{V.}\quad F_1 = (5h_0 + 8h_1 - h_2)\frac{a}{24},$$

und den übrigen Theil nach der Formel IV.

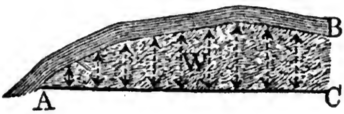
Uebrigens gelten die Formeln I. und V. sowohl für eine convexe als auch für eine concave Begrenzungscurve CD. Ist aber diese Curve beides zugleich, befindet sich also in derselben ein Wendungspunkt, so hat man die Fläche $ABCD$, Fig. 58, nach der Formel

$$F = (h_0 + 2h_1 + h_2)\frac{a}{4}$$

zu berechnen.

Beispiel. Um den Inhalt einer Wiese W, Fig. 61, zu finden, hat man über der 45 Ruthen langen Grundlinie in gleichen Abständen 10 Perpendikel errichtet und für ihre Längen folgende Werthe gefunden: 0 Ruthen; 4,8; 6,8; 8,7; 10,0; 12,1; 12,3; 13,0; 12,0; 11,2.

Fig. 61.



Hieraus berechnet sich der Flächenraum über den ersten 30 Ruthen der Grundlinie:

$$F_1 = [0 + 4(4,8 + 8,7 + 12,1) + 2(6,8 + 10,0) + 12,3]\frac{30}{18}$$
$$= 148,3 \,.\, {}^5/_3 = 237,16 \text{ Quadrat-Ruthen;}$$

und der Flächenraum über den letzten 15 Ruthen der Grundlinie:

$$F_2 = [12,3 + 3(13 + 12) + 11,2]\frac{15}{8} = 98,5 \,.\, {}^{15}/_8$$
$$= 184,69 \text{ Quadrat-Ruthen;}$$

es ist demnach der Flächenraum der ganzen Wiese

$F = F_1 + F_2 = 421,85$ Quadrat-Ruthen.

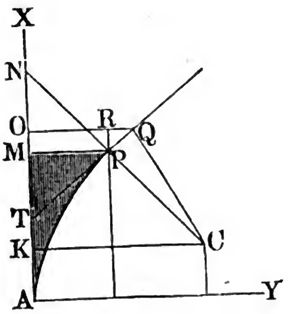
Mittels Planimeter lassen sich die Inhalte krummliniger Figuren durch einfaches Umkreisen derselben bestimmen.

§. 17. Anwendung der Differenzial- und Integralrechnung auf Planimetrie. In Fig. 62 (a. f. S.) sind $AM = x$ und $MP = y$ die Coordinaten eines Punktes P einer ebenen Curve $AP = s$, ferner sind $MO = PR = \partial x$, $RQ = \partial y$ und $PQ = \partial s$, Elemente der Variablen x, y und s, und endlich ist $\angle MTP = \angle RPQ = \alpha$, der Tangentenwinkel oder der Winkel, um welchen die Richtung des Bogenelementes ∂s von der Abscissenaxe AX abweicht.

Dann gelten folgende Gleichungen:

I. $\sin.\alpha = \frac{\partial y}{\partial s}$, $\cos.\alpha = \frac{\partial x}{\partial s}$, $\tang.\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$.

Fig. 62.



II. $\partial s = \sqrt{(\partial x)^2 + (\partial y)^2}$

$= \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$

$= \frac{\partial x}{\cos.\alpha} = \frac{\partial y}{\sin.\alpha}$.

Ferner ist

III. die Subtangente

$TM = y \cot g.\alpha = y \frac{\partial x}{\partial y}$,

und

IV. die Subnormale

$MN = y \tang.\alpha = y \frac{\partial y}{\partial x}$.

V. Die Curve AP steigt in Hinsicht auf die Abscissenaxe an der Stelle P, wenn $\tang.\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$, positiv, sie fällt, wenn $\tang.\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$, negativ ist. Sie läuft ferner parallel mit der Abscissenaxe AX, wenn $\tang.\alpha = 0$, und ist parallel mit der Ordinatenaxe AY, wenn $\tang.\alpha = \infty$ ausfällt.

VI. Ferner ist die Curve in Hinsicht auf AX

convex, wenn $\partial(\tang.\alpha) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, positiv, und

concav, wenn $\partial(\tang.\alpha) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, negativ wird.

Für einen Inflexions- oder Wendepunkt ist $\partial(\tang.\alpha) = 0$, und für einen Rückkehrpunkt $\partial(\tang.\alpha) = \infty$.

VII. Die Ordinate y ist ein Maximum für $\tang.\alpha = 0$ und $\partial(\tang.\alpha) =$ negativ; sie ist ein Minimum für $\tang.\alpha = 0$ und $\partial(\tang\ \alpha) =$ positiv, und weder das eine noch das andere, wenn $\tang.\alpha$ und $\partial(\tang.\alpha)$ zugleich $= 0$ ausfallen. (Vergleiche Arithmetik §. 80, Formel V., Seite 95).

Ist $CP = r$, der Krümmungshalbmesser und $\angle PCQ = \partial\alpha$ der Contingenz- oder Krümmungswinkel, so hat man $PQ = \partial s = r\partial\alpha$, und daher

VIII. $r = \frac{\partial s}{\partial \alpha} = \frac{\partial s^3}{\partial x^2 \partial \tang.\alpha} = \frac{\partial s^3}{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x}$

also, wenn x urvariabel ist, einfacher $r = \frac{\partial s^3}{\partial x \partial^2 y}$.

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes C sind

$AK = u = x - r \sin.\alpha = x - \frac{\partial y}{\partial \alpha}$ und

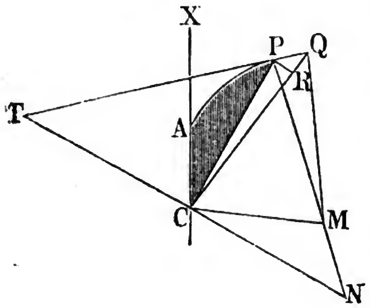
$KC = v = y + r \cos.\alpha = y + \frac{\partial x}{\partial \alpha}$.

Ist S der Inhalt der Fläche AMP, also ∂S der Inhalt des Flächenelementes $MPQO$, so gilt die Formel

X. $\partial S = y \partial x$ oder $S = \int_0^x y \partial x$.

In Fig. 63 ist $CP = z$ der Radiusvector einer Spirallinie $AP = s$ für den Drehungswinkel $ACP = \varphi$, sowie $RQ = \partial z$ das Element desselben, und $PCQ = \partial \varphi$ das Winkelelement, folglich $PR = z \partial \varphi$ das zugehörige Bogenelement, ferner der Winkel $TPC = PQR = \alpha$ der Tangentenwinkel, PT die Tangente und PN die Normale.

Fig. 63.



Dann ist

XI. $tang.\, \alpha = \frac{z \partial \varphi}{\partial z}$,

ferner die Subtangente $CT = z\, tang.\, \alpha = \frac{z^2 \partial \varphi}{\partial z}$, und die Subnormale $CN = z\, cotang.\, \alpha = \frac{\partial z}{\partial \varphi}$, endlich das Curvenelement

XII. $PQ = \partial s = \frac{z \partial \varphi}{sin.\, \alpha} = \frac{\partial z}{cos.\, \alpha} = \sqrt{z^2 \partial \varphi^2 + \partial z^2}$.

Der Curvenwinkel $PMQ = \partial \omega$ ist $= \partial \varphi + \partial \alpha$, folglich der Krümmungshalbmesser

XIII. $MP = MQ = r = \frac{\partial s}{\partial \omega} = \frac{\partial s}{\partial \varphi + \partial \alpha}$

$$= \frac{\partial s^3}{z^2 \partial \varphi^3 + 2 \partial \varphi \partial z^2 - z \partial \varphi \partial^2 z}.$$

Ist der Flächenraum $ACP = S$, welchen der Radius bei Drehung um den Winkel $ACP = \varphi$ durchläuft, daher $PCQ = \partial S$ das Flächenelement, so hat man

XIV. $\partial S = \frac{z^2 \partial \varphi}{2}$, folglich $S = \int_0^z \frac{z^2 \partial \varphi}{2}$.

Für die Lage des Krümmungsmittelpunktes M ist, wenn man den Winkel PCM durch λ und den Radius CM durch u bezeichnet,

XV. $u = \sqrt{z^2 + r^2 - 2 z r\, sin.\, \alpha}$ und

$sin.\, \lambda = \frac{r\, cos.\, \alpha}{u}$.

Beispiel 1. Aus der Gleichung $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ der in Fig. 64 (a. f. S.), abgebildeten Astroide APB folgt durch Differenziiren $x^{-1/3} \partial x + y^{-1/3} \partial y = 0$, daher ist für die

Tangentenlage derselben, $tang.\ \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$, z. B. für $x = y = a\sqrt{1/_8}$, $tang.\ \alpha = -1$, d. i. $\alpha = 135^0$, und für ein Bogenelement dieser Curve

$$\partial s = \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^{2/3}} = \partial x \left(\frac{a}{x}\right)^{1/3},$$

daher für die Länge des Bogens AP:

$$s = \int_0^x \left(\frac{a}{x}\right)^{1/3} \partial x = a^{1/3} \int_0^x x^{-1/3}\, \partial x = {}^3/_2\, a^{1/3}\, x^{2/3}$$
$$= {}^3/_2 \sqrt[3]{a x^2}.$$

Setzt man $x = a$, so folgt die Länge des Quadranten:

$$AB = {}^3/_2\, a.$$

Fig. 64.

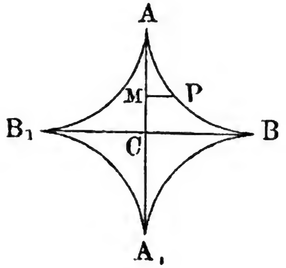
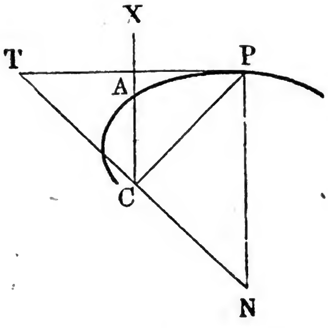


Fig. 65.



Beispiel 2. Aus der Gleichung $z = a^\varphi$ der in Fig. 65 abgebildeten logarithmischen Spirallinie AP folgt

$$\partial z = a^\varphi\, Ln.\, a\, \partial \varphi = z\, Ln.\, a\, \partial \varphi,$$

daher für den Tangentenwinkel dieser Curve

$$tang.\ \alpha = \frac{z\, \partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{Ln.\ a}, \text{ oder } cotg.\ \alpha = Ln.\ a,$$

ferner das Bogenelement:

$$\partial s = \sqrt{\partial z^2 + z^2 \partial \varphi^2} = z\, \partial \varphi \sqrt{1 + (Ln.\ a)^2}$$
$$= z\, \partial \varphi \sqrt{1 + (cotang.\ \alpha)^2} = \frac{z\, \partial \varphi}{sin.\ \alpha},$$

und die Bogenlänge selbst:

$$s = \int \frac{a^\varphi\, \partial \varphi}{sin.\ \alpha} = \frac{a^\varphi}{sin.\ \alpha\ Ln.\ a} + Con. = \frac{a^\varphi}{cos.\ \alpha} + Con$$

Wäre für $\varphi = 0$, $s = 0$, so hätte man

$$Con. = -\frac{a^0}{cos.\ \alpha} = -\frac{1}{cos.\ \alpha}, \text{ und daher}$$

$$s = \frac{a^\varphi - 1}{cos.\ \alpha}.$$

Für den Krümmungshalbmesser dieser Curve ist

$$r = \frac{\partial s}{\partial \varphi + \partial \alpha},$$

oder, da α constant, also $\partial \alpha = 0$ ist,

$$r = \frac{\partial s}{\partial \varphi} = \frac{z}{sin.\, \alpha}.$$

Endlich ist für die Quadratur oder Fläche CAP dieser Spiralen

$$S = \int \frac{z^2 \partial \varphi}{2} = \int \frac{z \partial z}{2\, Ln.a} = \frac{z^2}{4\, Ln.a} + Const. = \frac{z^2 - 1}{4\, Ln.a}.$$

Für $z = e^{\varphi}$ ist $a = e$, $Ln.\, a = 1$, $tang.\, \alpha = 1$, folglich $\alpha = 45^0$, $r = z\sqrt{2}$ und $S = \frac{z^2 - 1}{4}$

Zweites Capitel.

Stereometrie.

---

§. 18. Sphärische Dreiecke. Die Summe aller drei Seiten eines sphärischen Dreieckes ist größer als Null und kleiner als 2π (vier Rechtwinkel). Die Summe aller drei Winkel eines sphärischen Dreieckes ist größer als zwei und kleiner als sechs Rechtwinkel. In jedem Dreiecke steht der größeren Seite der größere Winkel, sowie dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber.

Ein sphärisches Dreieck ist durch drei Stücke gegeben, so daß sich aus ihnen die übrigen drei Stücke construirend und rechnend finden lassen. Sind drei Seiten gegeben, so fordert die Möglichkeit eines Dreieckes, daß zwei zusammen die dritte an Größe übertreffen; sind drei Winkel gegeben, so muß die Summe zweier kleiner sein, als die Summe aus zwei Rechtwinkeln und dem dritten Winkel.

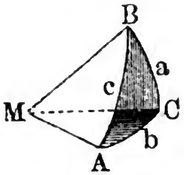
Ein sphärisches Dreieck heißt ein rechtwinkeliges, wenn es einen Rechtwinkel enthält. Doch kann es deren auch zwei enthalten, und es können selbst alle drei Winkel Rechtwinkel sein.

Im gleichseitigen Dreiecke sind alle drei Seiten, und ebenso die Winkel unter sich gleich.

Ein gleichschenkeliges Dreieck hat zwei gleiche Seiten, sowie auch zwei gleiche Winkel (an der Grundlinie).

§. 19. Auflösung rechtwinkelig sphärischer Dreiecke. Wenn in einem rechtwinkelig sphärischen Dreiecke ABC, Fig. 66, die dem Rechtwinkel C gegenüber liegende Seite oder Hypotenuse AB durch c, die beiden anderen Seiten oder Katheten BC und AC aber durch a und b bezeichnet werden, so giebt die folgende Tafel an, wie aus je zwei Stücken desselben die übrigen durch Rechnung zu finden sind.

Fig. 66.



Gegeben.	Gesucht.	Formel.
a, b	c	$\cos. c = \cos. a \cos. b.$
	A	$\tang. A = \frac{\tang. a}{\sin. b}.$
	B	$\tang. B = \frac{\tang. b}{\sin. a}.$
a, c	b	$\cos. b = \frac{\cos. c}{\cos. a}.$
	A	$\sin. A = \frac{\sin. a}{\sin. c}.$
	B	$\cos. B = \tang. a \cotang. c.$
a, A	b	$\sin. b = \tang. a \cotang. A.$
	c	$\sin. c = \frac{\sin. a}{\sin. A}.$
	B	$\sin. B = \frac{\cos. A}{\cos. a}.$
b, A	a	$\tang. a = \sin. b \tang. A.$
	c	$\tang. c = \frac{\tang. b}{\cos. A}.$
	B	$\cos. B = \cos. b \sin. A.$
c, A	a	$\sin. a = \sin. c \sin. A.$
	b	$\tang. b = \tang. c \cos. A.$
	B	$\cotang. B = \cos. c \tang. A.$
A, B	a	$\cos. a = \frac{\cos. A}{\sin. B}.$
	b	$\cos. b = \frac{\cos. B}{\sin. A}.$
	c	$\cos. c = \cotang. A \cotang. B.$

Beispiel 1. Unter welchem Winkel stoßen zwei Ebenen MAC und MAB, Fig. 66, zusammen, wenn eine Linie MB in der zweiten Ebene mit der ersten Ebene den Winkel $BMC = 57^0, 16'$ und mit der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie MA den Winkel $BMA = 76^0, 35'$ einschließt? Hier ist $a = 57^0, 16'$ und $c = 76^0, 35'$ gegeben und A gesucht, daher zu setzen: $sin. A = \frac{sin. a}{sin. c}$.

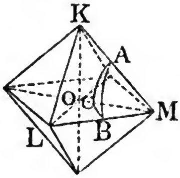
$$log. sin. 57^0, 16' = 0{,}92490 - 1$$
$$log. sin. 76^0, 35' = 0{,}98798 - 1$$
$$log. sin. A = 9{,}93692, \quad A = 59^0, 51', 40''.$$

Beispiel 2. Eine Linie MB hat das Ansteigen $BMC = a = 16^0, 27'$, und befindet sich in einer Ebene AMB, deren Neigung $BAC = A$ gegen den Horizont $= 58^0, 36'$ beträgt; welchen Winkel $AMC = b$ schließt die Horizontalprojection MC dieser Linie mit der Streichlinie MA der Ebene ein?

Es ist $sin. b = tang. a \; cotang. A$
$= tang. 16^0, 27' \; cotang. 58^0, 36'$,
und hiernach $b = 10^0, 37', 40''$.

Beispiel 3. Man hat gefunden, daß bei dem in Fig. 67 abgebildeten Schwefelkrystall die Flächen in der Polkante MK unter dem Winkel von $84^0, 24'$ und an der Mittelkante ML unter dem Winkel von $143^0, 8'$ zusammenstoßen und sucht nun die Axenverhältnisse dieses Krystalles. Es läßt sich aus M ein rechtwinkelig sphärisches Dreieck ABC beschreiben, in welchem

Fig. 67.



$$A = \frac{84^0, 24'}{2} = 42^0, 12' \text{ und } B = \frac{143^0, 8'}{2} = 71^0, 34' \text{ ist,}$$

und die Katheten $BC = a$ und $AC = b$ durch die Formeln:

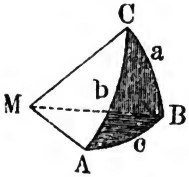
$$cos. a = \frac{cos. 42^0, 12'}{sin. 71^0, 34'} \text{ und } cos. b = \frac{cos. 71^0, 34'}{sin. 42^0, 12'}$$

bestimmt werden.

Es ergiebt sich so $a = 38^0, 39\frac{1}{2}'$ und $b = 61^0, 55'$. Setzt man nun die Halbaxe $OK = 1$, so folgt die Halbaxe $OM = cotang. b = cotang. 61^0, 55' = 0{,}5336$ und die Halbaxe $OL = OM \, tang. a = 0{,}5336 \,.\, 0{,}8 = 0{,}4268$.

§. 20. Auflösung schiefwinkelig sphärischer Dreiecke.

Fig. 68.



In dem schiefwinkelig sphärischen Dreiecke ABC, Fig. 68, bezeichnen a, b, c die den Winkeln A, B, C gegenüberstehenden Seiten BC, AC und AB. Aus drei dieser sechs Stücke ergeben sich die übrigen drei mit Hülfe folgender Formeln:

Gegeben.	Gesucht.	Formel.
a, b, c	A	$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\sin. b \sin. c}$ oder, $a + b + c = s$ gesetzt, $\cos. \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin. \frac{s}{2} \sin. \left(\frac{s}{2} - a\right)}{\sin. b \sin. c}}$, auch $\sin. \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin. \left(\frac{s}{2} - b\right) \sin. \left(\frac{s}{2} - c\right)}{\sin. b \sin. c}}$ u. s. w.
a, b, A	B	$\sin. B = \frac{\sin. b \sin. A}{\sin. a}$.
	c	$c = m + n$, wo $tg. m = tg. b \cos. A$ und $tg. n = tg. a \cos. B$ ist, oder $tang. \frac{c}{2} = \frac{tang. \left(\frac{a-b}{2}\right) \sin. \left(\frac{A+B}{2}\right)}{\sin. \left(\frac{A-B}{2}\right)}$.
	C	$C = M + N$, wo $cotg. M = \cos. b\, tg. A$ und $cotg. N = \cos. a\, tg. B$ ist, oder $tang. \frac{C}{2} = \frac{\sin. \left(\frac{a-b}{2}\right)}{tang. \left(\frac{A-B}{2}\right) \sin. \left(\frac{a+b}{2}\right)}$.
a, b, C	A	$tang. \left(\frac{A-B}{2}\right) = cotg. \frac{C}{2} \cdot \frac{\sin. \left(\frac{a-b}{2}\right)}{\sin. \left(\frac{a+b}{2}\right)}$,
	B	$tang. \left(\frac{A+B}{2}\right) = cotg. \frac{C}{2} \cdot \frac{\cos. \left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos. \left(\frac{a+b}{2}\right)}$, hieraus $A = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}$, $B = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}$.
	c	$\sin. c = \frac{\sin. a \sin. C}{\sin. A}$, oder unmittelbar $\cos. c = \cos. a \cos. b + \sin. a \sin. b \cos. C$.

Gegeben.	Gesucht.	Formel.
A, B, C	a	$\cos. a = \frac{\cos. A + \cos. B \cos. C}{\sin. B \sin. C}$ oder $A + B + C = S$ gesetzt, $\cos. \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos.\left(\frac{S}{2} - B\right)\cos.\left(\frac{S}{2} - C\right)}{\sin. B \sin. C}}$, oder $\sin. \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos. \frac{S}{2} \cos.\left(\frac{S}{2} - A\right)}{\sin. B \sin. C}}$.
A, B, a	b	$\sin. b = \frac{\sin. B \sin. a}{\sin. A}$. Die übrigen Stücke wie oben.
A, B, c	a	$\tan g.\left(\frac{a-b}{2}\right) = \tan g. \frac{c}{2} \cdot \frac{\sin.\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin.\left(\frac{A+B}{2}\right)}$,
	b	$\tan g.\left(\frac{a+b}{2}\right) = \tan g. \frac{c}{2} \cdot \frac{\cos.\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos.\left(\frac{A+B}{2}\right)}$, hieraus $a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$ und $b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$.
	C	$\sin. C = \frac{\sin. c \sin. A}{\sin. a}$, oder unmittelbar $\cos. C = -\cos. A \cos. B + \sin. A \sin. B \cos. c$.

Beispiel. Man soll die Horizontalprojection $A_1 MB_1$ des Winkels AMB, Fig. 69 (a. f. S.), mit Hülfe der Elevationswinkel AMA_1 und BMB_1, der Schenkel MA und MB berechnen. Es sei $AMB = 57^0, 40'$, $AMA_1 = 19^0, 15'$ und $BMB_1 = 34^0, 35'$. Durch Ergänzung der Elevationswinkel zu 90^0 gelangt man zu einem sphärischen Dreiecke ABC, in welchem die Seite $AB = c$ der gegebene Winkel $57^0, 40'$ ist, die Seiten $AC = b$ und $BC = a$ aber die Ergänzungen der Elevationswinkel zu 90^0 sind und der Winkel C der gesuchten Projection $A_1 MB_1$ gleich ist. Man hat hiernach:

$$\left.\begin{array}{l} c = 57^0, 40' \\ b = 70^0, 45' \\ a = 55^0, 25' \end{array}\right\} s = 183^0, 50' \left\{\begin{array}{l} \frac{s}{2} = 91^0, 55' \\ \frac{s}{2} - c = 34^0, 15' \end{array}\right\} \text{und}$$

daher $cos. \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{sin. 91^0, 55' . sin. 34^0, 15'}{sin. 55^0, 25' . sin. 70^0, 45'}}$.

$log. sin. 91^0,55' = 0{,}99976-1$	$log. sin. 55^0,25' = 0{,}91556-1$
$log. sin. 34^0,15' = 0{,}75036-1$	$log. sin. 70^0,45' = 0{,}97501-1$
$0{,}75012-1$	$0{,}89057-1$
$0{,}89057-1$	
$1{,}85955-2 : 2$	

$log. cos. \frac{C}{2} = 9{,}92977$, $\frac{C}{2} = 31^0, 43'$, daher

$\angle A_1 M B_1 = 62^0, 46'$.

Fig. 69.

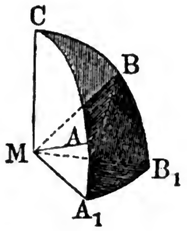
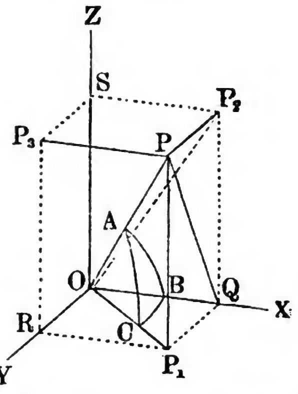


Fig. 70.



§. 21. Coordinaten im Raume. Ein Punkt P im Raume, Fig. 70, ist durch zwei seiner Projectionen P_1, P_2, P_3 in den drei Coordinatebenen XY, XZ und YZ, oder durch die drei Coordinaten $OQ = PP_3 = x$, $OR = PP_2 = y$ und $OS = PP_1 = z$ bestimmt. Aus denselben bestimmt sich seine Centraldistanz oder Entfernung $OP = r$ vom Anfangspunkte O:

I. $OP = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

woraus wieder die Winkel φ, ψ, χ, welche die Richtung dieser Linie mit den Axen OX, OY und OZ einschließt, mittels der Formeln

II. $cos. \varphi = \frac{x}{r}$, $cos. \psi = \frac{y}{r}$, $cos. \chi = \frac{z}{r}$

sich bestimmen lassen.

Der Fallwinkel oder die Neigung der Linie OP gegen die Horizontalebene XY ist

$$\angle P_1 OP = \alpha = 90^0 - \chi,$$

die Horizontalprojection von OP ist

III. $OP_1 = s = r\ sin.\ \chi = r\ cos.\ \alpha = \sqrt{x^2 + y^2}$,

und der Streichwinkel, oder der Winkel $XOP_1 = \beta$, welchen OP_1 mit der Mittagslinie oder einer anderen Horizontalare einschließt, wird bestimmt durch eine der Formeln

IV. $tang.\ \beta = \frac{y}{x},\ sin.\ \beta = \frac{y}{s} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$

$$cos.\ \beta = \frac{x}{s} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Durch Messungen werden gewöhnlich α, β und r oder r_1 bestimmt, und es sind x, y und z mittels der Formeln

V. $z = r\ sin.\ \alpha = s\ tang.\ \alpha$,

VI. $s = r\ cos.\ \alpha$,

VII. $x = s\ cos.\ \beta = r\ cos.\ \alpha\ cos.\ \beta$ und

VIII. $y = s\ sin.\ \beta = r\ cos.\ \alpha\ sin.\ \beta$ zu bestimmen.

Auch hat man, da $x = r\ cos.\ \varphi$ und $y = r\ cos.\ \psi$ ist,

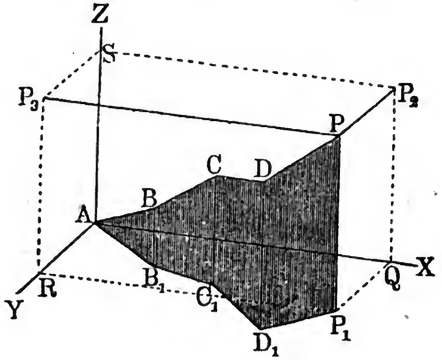
IX. $cos.\ \varphi = cos.\ \alpha\ cos.\ \beta$ und $cos.\ \psi = cos.\ \alpha\ sin.\ \beta$

(S. Tabellen §. 19).

In sämmtlichen vorstehenden Formeln ist statt x, $x - x_1$, statt y, $y - y_1$ und statt z, $z - z_1$ zu setzen, wenn O nicht der Coordinatenanfangspunkt, sondern ein durch die Coordinaten x_1, y_1, z_1 bestimmter Punkt ist.

Ist ein Punkt P durch die Linien $r_1, r_2, \ldots$ an einen anderen Punkt A, Fig. 71, angeschlossen, und bezeichnen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$

Fig. 71.



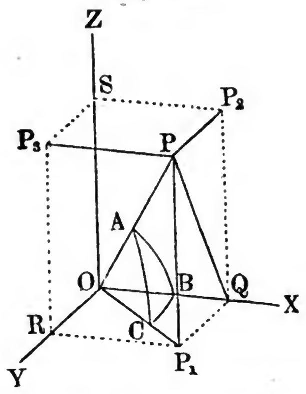
die Fall-, sowie $\beta_1, \beta_2, \ldots$ die Streichwinkel und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, sowie $\psi_1, \psi_2, \ldots$ die Winkel, welche die Richtungen dieser Linien mit den Axen AX und AY (der Mittagslinie und der Ostwestlinie) einschließen, so sind die Coordinaten dieses Punktes in Hinsicht auf A:

$$\text{X.}\ \begin{cases} AQ = x = r_1\ cos.\ \varphi_1 + r_2\ cos\ \varphi_2 + \cdots \\ \quad = r_1\ cos.\ \alpha_1\ cos.\ \beta_1 + r_2\ cos.\ \alpha_2\ cos\ \beta_2 + \\ AR = y = r_1\ cos.\ \psi_1 + r_2\ cos.\ \psi_2 + \cdots \\ \quad = r_1\ cos.\alpha_1\ sin.\beta_1 + r_2\ cos.\alpha_2\ sin.\beta_2 + \cdots, \text{ und} \\ AS = z = r_1\ sin.\ \alpha_1 + r_2\ sin.\ \alpha_2 + \cdots \end{cases}$$

Aus x, y und z bestimmt sich mittels der Formeln unter I. und II., d. i. Lage und Größe der Verbindungslinie AP.

Ist eine **unbegrenzte gerade Linie** OP, Fig. 72, durch die

Fig. 72.



Winkel φ, ψ und χ, welche sie mit den Axen OX, OY und OZ einschließt, bestimmt, so gelten für dieselbe folgende Gleichungen:

$$\text{XI.} \quad \frac{y}{x} = \frac{\cos.\psi}{\cos.\varphi}, \quad \frac{z}{x} = \frac{\cos.\chi}{\cos.\varphi}, \quad \frac{z}{y} = \frac{\cos.\chi}{\cos.\psi},$$

ist folglich eine der Coordinaten, z. B. x gegeben, so lassen sich hiernach die beiden anderen Coordinaten, z. B. y und z, berechnen.

Auch ist

$$\text{XII.} \quad \begin{cases} y = x\, tang.\beta \text{ und} \\ z = s\, tang.\alpha = \dfrac{x\, tang.\alpha}{\cos.\beta} = x\, tang.\gamma, \end{cases}$$

wenn α den Fall- und β den Streichwinkel der Linie, sowie γ den Winkel P_2OX bezeichnet, welchen die Projection OP_2 der Linie in der Ebene XZ mit der Axe OX einschließt.

Geht die Linie nicht durch den Nullpunkt, sondern durch einen Punkt, dessen Coordinaten x_1, y_1 und z_1 gegeben sind, so hat man

$$\text{XIII.} \quad \begin{cases} y - y_1 = (x - x_1)\, tang.\beta \text{ und} \\ z - z_1 = (x - x_1)\, \dfrac{tang.\alpha}{\cos.\beta} = (x - x_1)\, tang.\gamma. \end{cases}$$

Auch hat man

$$\text{XIV.} \quad \begin{cases} y \cos\beta - x \sin.\beta = m \text{ und} \\ z \cos.\gamma - x \cos.\gamma = n, \end{cases}$$

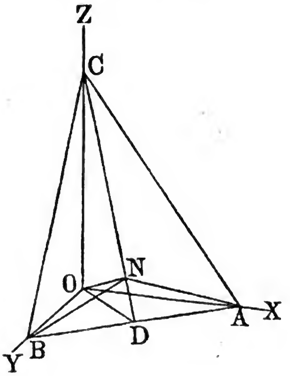
wenn m den Abstand der Horizontalprojection, sowie n den der Verticalprojection der Linie von der Axe OX bezeichnet (s. §. 7). Sind a und b die Parameter der ersten, sowie c und d die der letzteren Projection, so hat man auch

$$\text{XV.} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \text{ sowie } \frac{x}{c} + \frac{z}{d} = 1. \text{ (S. §. 7)}$$

Die Winkel φ, ψ und χ, unter welchen eine Ebene ABC,

Fig. 73, die Grundebenen YZ, XZ und XY schneidet, sind zugleich die Winkel AON, BON und CON, welche eine Normale ON auf diese Ebene mit den Axen OZ, OY und OX einschließt. Sind die Parameter $OA = a$, $OB = b$ und $OC = c$ der Ebene gegeben, so läßt sich ihr Normalabstand $ON = n$ vom Nullpunkte O durch die Formel XVI.

Fig. 73.



$$n = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}$$

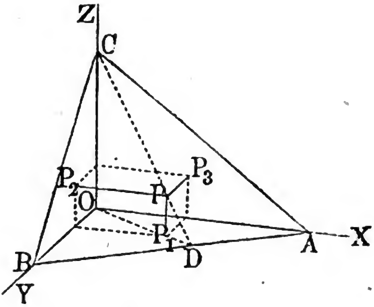
berechnen.

Auch ist

XVII. $\cos.\varphi = \frac{n}{a}$, $\cos.\psi = \frac{n}{b}$ und $\cos.\chi = \frac{n}{c}$.

Der Zusammenhang zwischen den Coordinaten x, y und z der Coordinaten eines Punktes P der Ebene ABC, Fig. 74, wird durch folgende Gleichung ausgedrückt.

Fig. 74.



XVIII. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, oder

XIX. $x\cos.\varphi + y\cos.\psi + z\cos.\chi = n$.

Für eine durch den Nullpunkt gehende Ebene ist $n = 0$. Ist nur der Streichwinkel $BAX = \beta$ und der Fallwinkel $ODC = \alpha = \chi$ gegeben, so hat man

XX. $\cos.\varphi = \sin.\alpha \sin.\beta$, $\cos.\psi = -\sin.\alpha \cos.\beta$ und $\cos.\chi = \cos.\alpha$, folglich

XXI. $x \sin.\alpha \sin.\beta - y \sin.\alpha \cos.\beta + z \cos.\alpha = n$, oder

$$z = \frac{n + (y\cos.\beta - x\sin.\beta)\sin.\alpha}{\cos.\alpha}$$

Für eine Ebene durch den Nullpunkt ist

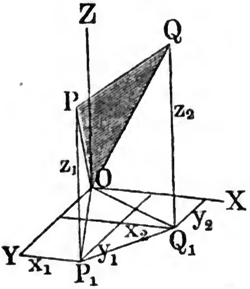
XXII. $z = (y \cos. \beta - x \sin. \beta) \operatorname{tang}. \alpha,$

und für eine Ebene durch den Punkt (x_1, y_1, z_1)

XXIII. $z - z_1 = [(y - y_1) \cos. \beta - (x - x_1) \sin. \beta] \operatorname{tg}. \alpha$ und

XXIV. $n = x_1 \cos. \varphi + y_1 \cos. \psi + z_1 \cos. \chi$
$= x_1 \sin. \alpha \sin. \beta - y_1 \sin. \alpha \cos. \beta + z_1 \cos. \alpha.$

Fig. 75.



Der Winkel $POQ = \varkappa$ zwischen zwei von dem Anfangspunkt O ausgehenden Linien OP und OQ, Fig. 75, ist mittels der Coordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 zweier Punkte P und Q in diesen Linien durch die Formel

XXV. $\cos. \varkappa$
$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

oder mittels der Winkel

$POX = \varphi_1$, $POY = \psi_1$, $POZ = \chi_1$ und
$QOX = \varphi_2$, $QOY = \psi_2$ und $QOZ = \chi_2$,

durch den Ausdruck

XXVI. $\cos. \varkappa = \cos. \varphi_1 \cos. \varphi_2 + \cos. \psi_1 \cos. \psi_2$
$+ \cos. \chi_1 \cos. \chi_2$ bestimmt.

Auch hat man

XXVII. $\left\{\begin{array}{l} \cos. \varphi_1^2 + \cos. \psi_1^2 + \cos. \chi_1^2 = 1. \\ \cos. \varphi_2^2 + \cos. \psi_2^2 + \cos. \chi_2^2 = 1. \end{array}\right\}$ sowie

Zwei gerade Linien

$\left\{\begin{array}{l} y \cos. \beta_1 - x \sin. \beta_1 = m_1 \\ z \cos. \gamma_1 - x \sin. \gamma_1 = n_1 \end{array}\right\}$, $\left\{\begin{array}{l} y \cos. \beta_2 - x \sin. \beta_2 = m \\ z \cos. \gamma_2 - x \sin. \gamma_2 = n_2 \end{array}\right\}$

kommen zum Durchschnitt, wenn

XXVIII. $\dfrac{m_1 \cos. \beta_2 - m_2 \cos. \beta_1}{\sin. (\beta_1 - \beta_2)} = \dfrac{n_1 \cos. \gamma_2 - n_2 \cos. \gamma_1}{\sin. (\gamma_1 - \gamma_2)}$ ist.

Der Winkel λ, unter welchem sich die Ebenen

$\left\{\begin{array}{l} x \cos. \varphi_1 + y \cos. \psi_1 + z \cos. \chi_1 = n_1 \\ x \cos. \varphi_2 + y \cos. \psi_2 + z \cos. \chi_2 = n_2 \end{array}\right\}$

schneiden, ist zu bestimmen durch die Formel

XXIX. $\cos. \lambda = -(\cos. \varphi_1 \cos. \varphi_2 + \cos. \psi_1 \cos. \psi_2$
$+ \cos. \chi_1 \cos. \chi_2),$

und der Winkel μ, unter welchem die Ebene

$x \cos. \varphi_1 + y \cos. \psi_1 + z \cos. \chi_1 = n_1$

von einer Geraden geschnitten wird, welche mit den Axen OX, OY und OZ die Winkel $\varphi_2, \psi_2, \chi_2$ einschließt, ist gegeben durch den Ausdruck:

XXX. $\sin. \mu = \cos. \varphi_1 \cos. \varphi_2 + \cos. \psi_1 \cos. \psi_2$
$+ \cos. \chi_1 \cos. \chi_2.$

Sind zwei Ebenen durch ihre Parameter oder Gleichungen $\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} + \frac{z}{c_1} = 1$, $\frac{x}{a_2} + \frac{y}{b_2} + \frac{z}{c_2} = 1$ gegeben, so hat man für ihren Durchschnittswinkel

$$\text{XXXI.}\quad \cos.\lambda = -\frac{\frac{1}{a_1 a_2}+\frac{1}{b_1 b_2}+\frac{1}{c_1 c_2}}{\sqrt{\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{b_1^2}+\frac{1}{c_1^2}}\sqrt{\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{b_2^2}+\frac{1}{c_2^2}}}$$

$$= -\frac{a_1 a_2 b_1 b_2 + a_1 a_2 c_1 c_2 + b_1 b_2 c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 b_1^2 + a_1^2 c_1^2 + b_1^2 c_1^2}\sqrt{a_2^2 b_2^2 + a_2^2 c_2^2 + b_2^2 c_2^2}}.$$

Drei Ebenen durchschneiden sich in parallelen Kanten oder bilden eine Zone der Krystallographie, wenn

$$\text{XXXII.}\quad \frac{1}{a_1 b_2 c_3}+\frac{1}{a_2 b_3 c_1}+\frac{1}{a_3 b_1 c_2} = \frac{1}{a_1 b_3 c_2}+\frac{1}{a_2 b_1 c_3}+\frac{1}{a_3 b_2 c_1} \text{ oder}$$

$$\text{XXXIII.}\quad \cos.\varphi_1 \cos.\psi_2 \cos.\chi_3 + \cos.\varphi_2 \cos.\psi_3 \cos.\chi_1 + \cos.\varphi_3 \cos.\psi_1 \cos.\chi_2$$
$$= \cos.\varphi_1 \cos.\psi_3 \cos.\chi_2 + \cos.\varphi_2 \cos.\psi_1 \cos.\chi_3 + \cos.\varphi_3 \cos.\psi_2 \cos.\chi_1$$

ist.

Beispiel. Zwei Punkte P_1 und P_2 sind durch folgende in der Mittagslinie, in der Ostwestlinie und in der Schwerrichtung eines Punktes O gemessene Coordinaten $x_1 = 31{,}5$ Ruthen, $y_1 = 16{,}4$ Ruthen, $z_1 = 1{,}5$ Ruthen; $x_2 = 103{,}1$ Ruthen, $y_2 = -19{,}8$ Ruthen, $z_2 = 7{,}4$ Ruthen bestimmt, man sucht die Größe und Lage der Verbindungslinie. Die Größe ist:

$$\overline{P_1 P_2} = \sqrt{(103{,}1 - 31{,}5)^2 + (19{,}8 + 16{,}4)^2 + (7{,}4 - 1{,}5)^2}$$
$$= \sqrt{71{,}6^2 + 36{,}2^2 + 5{,}9^2} = \sqrt{6471{,}8} = 80{,}45 \text{ Ruthen};$$

ferner für den Winkel, welchen die Horizontalprojection der Linie mit der Mittagslinie einschließt, $tang.\,\psi = \frac{36{,}2}{71{,}6}$, oder $log.\,tang.\,\psi = 9{,}70380$, $\psi = 26^0, 49'$, und für den Winkel φ oder das Ansteigen der Linie:

$sin.\,\varphi = \frac{5{,}9}{80{,}45}$, $log.\,sin.\,\varphi = 8{,}86534$, $\varphi = 4^0, 12\tfrac{1}{3}'$.

§. 22. Inhalte ebenflächiger Körper. Der Inhalt eines Würfels BCD, Fig. 76, ergiebt sich aus einer Seite $AB = AC = AD = a$ durch die Formel:

$V = a^3$; auch ist umgekehrt:

$a = \sqrt[3]{V}$.

Der Inhalt eines geraden Parallelepipedes BCD, Fig. 77,

Fig. 76.

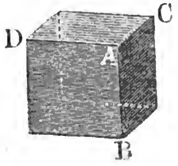
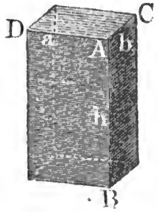


Fig. 77.



ergiebt aus seinen drei rechtwinkelig aufeinander stehenden Seiten a, b, h; $V = abh$.

Der Inhalt eines schiefwinkeligen Parallelepipedes ABD, Fig. 78, sowie der eines Prismas überhaupt, z. B. ABD, Fig. 79,

Fig. 78.

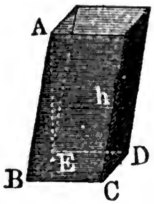
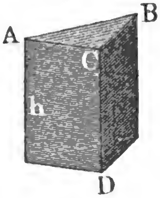


Fig. 79.



ist, wenn F die Grundfläche und h die senkrechte Höhe bezeichnet:

$$V = Fh.$$

Der Inhalt eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas ABD, Fig. 80, bestimmt sich aus der Grundfläche $ABC = F$ und den drei Höhen h_1, h_2, h_3 durch die Formel

$$V = \frac{F(h_1 + h_2 + h_3)}{3}.$$

Der Inhalt einer Pyramide $ABCD$, Fig. 81, ergiebt sich

Fig. 80.

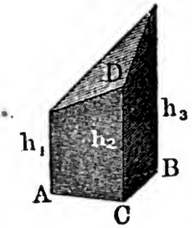
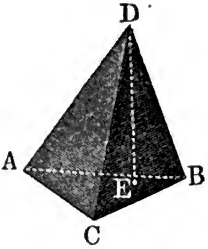


Fig. 81.



aus der Grundfläche $ABC = F$ und Höhe $DE = h$:

$$V = \frac{Fh}{3}.$$

Für die abgekürzte Pyramide ACH, Fig. 82, mit den Grundflächen $AC = F_1$ und $DE = F_2$, und der Höhe $GH = h$, ist:

$$V = (F_1 + \sqrt{F_1 F_2} + F_2)\frac{h}{3}.$$

Für den Obelisken ACF, Fig. 83, und für den Damm

Fig. 82.

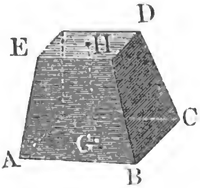
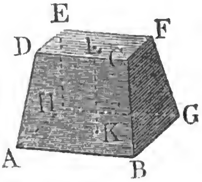


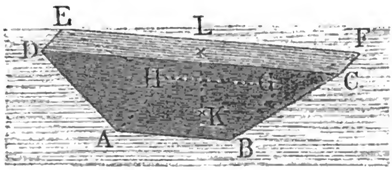
Fig. 83.



ACE, Fig 84, ist, wenn die rectangulären Grundflächen von den Seiten $AB = a_1$, $BG = b_1$, $CD = a_2$ und $DE = b_2$ begrenzt werden und um die Höhe $KL = h$ von einander abstehen:

$$V = [2(a_1 b_1 + a_2 b_2) + a_1 b_2 + a_2 b_1] \frac{h}{6}$$
$$= \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{b_1 + b_2}{2} \cdot h + \frac{a_1 - a_2}{2} \cdot \frac{b_1 - b_2}{2} \cdot \frac{h}{3}.$$

Fig. 84.



Für den Keil ACG, Fig. 85, ist, wenn die rectanguläre Grundfläche AC von den Seiten $AB = a_1$ und $BC = b_1$ begrenzt wird und ihr die Kante $DE = a_2$ im Abstande $GH = h$ gegenübersteht: $V = (2a_1 + a_2) \frac{b_1 h}{6}$.

Sind die Coordinaten oder Abstände der Eckpunkte A, B, C der Basis ABC einer dreiseitigen Pyramide, Fig. 86, von

Fig. 85.

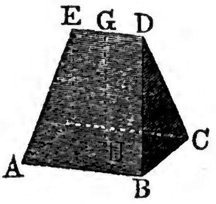
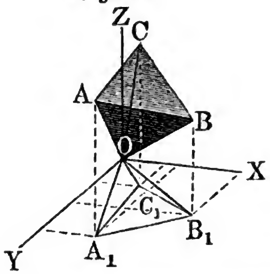


Fig. 86.



drei durch die Spitze O gelegten orthogonalen Coordinatebenen YZ, XZ und XY: x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3 und z_1, z_2, z_3, so hat man für das Volumen dieser Pyramide:

$$V = \tfrac{1}{6}(x_1 y_2 z_3 - x_1 y_3 z_2 + x_2 y_3 z_1 - x_2 y_1 z_3 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1).$$

Beispiel 1. Ein Teichdamm ist oben 25 Fuß, unten 80 Fuß breit, ferner oben 190 Fuß und unten 115 Fuß lang und im Mittel 30 Fuß hoch, wie groß ist sein Inhalt? Es ist

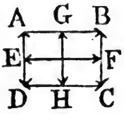
$$V = [2(25 \cdot 190 + 80 \cdot 115) + 25 \cdot 115 + 80 \cdot 190] \cdot \frac{30}{6}$$
$$= 45975 \cdot 5 = 229875 \text{ Cubik-Fuß}.$$

Beispiel 2. Ein nicht genau gearbeiteter parallelepipedischer Kasten hat bei 5 Fuß Höhe folgende Längen- und Breitendimensionen:

Im untern Querschnitt AC, Fig. 87 (a. f. S.), ist die Länge AB an der einen Seite = 81,40 Zoll, die Länge EF in der Mitte = 81,95 Zoll, die Länge CD an der zweiten Seite = 80,8 Zoll; die Breite AD an der einen Seite = 35,25 Zoll,

die Breite GH in der Mitte $= 36{,}05$, die Breite BC an der zweiten Seite $= 35{,}45$ Zoll; ferner im obern Querschnitte sind die Längen $= 82{,}35$; $83{,}10$; $82{,}55$, die Breiten $36{,}10$; $37{,}00$; $36{,}35$ Zoll, und endlich in einem Querschnitte auf der halben Höhe, die Längen $81{,}45$; $83{,}40$; $82{,}00$, und die Breiten $35{,}85$; $37{,}15$; $36{,}25$ Zoll. Hieraus erhält man mittels der Simpson'schen Regel die mittlere Länge des unteren Querschnittes

Fig. 87.



$$= \frac{81{,}40 + 4 \cdot 81{,}95 + 80{,}80}{6} = 81{,}67 \text{ Zoll},$$

und die mittlere Breite desselben

$$= \frac{35{,}25 + 4 \cdot 36{,}05 + 35{,}45}{6} = 35{,}817 \text{ Zoll},$$

daher den Inhalt desselben

$$= 81{,}67 \cdot 35{,}817 = 2925{,}17 \text{ Quadrat-Zoll}.$$

Auf gleiche Weise ergiebt sich der Inhalt des oberen Querschnittes $= 82{,}883 \cdot 36{,}742 = 3045{,}29$, und der des mittleren $= 82{,}842 \cdot 36{,}783 = 3047{,}18$ Quadrat-Zoll. Hiernach läßt sich der mittlere Querschnitt

$$= \frac{2925{,}17 + 4 \cdot 3047{,}18 + 3045{,}29}{6} = 3026{,}53 \text{ Quadrat-Zoll}$$

$= 21{,}017$ Quadrat-Fuß und der Inhalt des Kastens $= 5 \cdot 21{,}017 = 105{,}085$ Cubik-Fuß setzen.

§. 23. Oberflächen krummflächiger Körper. Der abgewickelte Mantel eines geraden Cylinders ist ein Rechteck, dessen Länge dem Umfange $2\pi r$ der Basis des Cylinders und dessen Breite der Höhe h desselben, dessen Inhalt folglich

$$O = 2\pi r h \text{ ist.}$$

Der abgewickelte Mantel eines geraden Kegels ist ein Kreisausschnitt, dessen Halbmesser die Seitenlänge $\sqrt{r^2 + h^2}$ des Kegels, und dessen Bogenlänge dem Umfange $2\pi r$ der Basis des Kegels, dessen Inhalt also gleich ist:

$$O = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}.$$

Die Oberfläche einer Kugel vom Halbmesser r ist

$$O = 4\pi r^2,$$

d. i. gleich dem vierfachen Inhalte ihres größten Kreises. Der Halbmesser, welcher der gegebenen Oberfläche O entspricht:

$$r = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{O}{\pi}} = 0{,}2821\sqrt{O}.$$

Der Inhalt einer Kugelzone AD, Fig. 88, sowie der einer Calotte ist gleich dem Inhalte

$$O = 2\pi r h$$

des Mantels eines Cylinders FH, welcher mit der Zone gleiche Höhe $MN = h$ und mit der Kugel gleichen Halbmesser $NK = CO = r$ hat.

Sind a und b die Halbmesser MA und NE der Grundflächen AB und DE der Kugelzone, so hat man auch

$$O = \pi \sqrt{[(a+b)^2 + h^2]\,[(a-b)^2 + h^2]}.$$

Fig. 88.

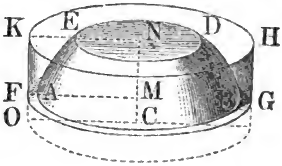
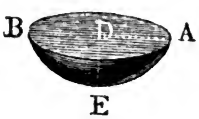


Fig. 89.



Für die Calotte oder Kugelhaube ABE, Fig. 89, ist $b = O$, folglich

$$O = \pi(a^2 + h^2) = \pi a^2 \left[1 + \left(\frac{h}{a}\right)^2\right], \text{ auch}$$

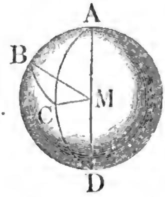
$$= F\left[1 + \left(\frac{h}{a}\right)^2\right],$$

wenn F den Inhalt der Grundfläche der Calotte bezeichnet.

Diese Formel läßt sich annähernd für niedrige Calotten überhaupt gebrauchen, wenn man für a den mittleren Halbmesser der Basis einsetzt.

Der Inhalt eines sphärischen Zweieckes ADA, Fig. 90, verhält sich zur ganzen Kugeloberfläche wie der Winkel A desselben zu 4 Rechtwinkeln, es ist also:

Fig. 90.



$$O = \frac{A^0}{360^0} \cdot 4\pi r^2 = \frac{A^0}{90^0} \cdot \pi r^2.$$

Der Inhalt eines sphärischen Dreieckes ABC, Fig. 90, ist, wenn A, B, C seine drei Winkel sind, und r den Kugelhalbmesser MA bezeichnet:

$$O = \left(\frac{A + B + C}{180^0} - 1\right)\pi r^2.$$

Beispiel 1. Eine Calotte von 3 Fuß Höhe und 5. Fuß Halbmesser an der Basis hat den Inhalt

$$O = 3{,}1416\,(5^2 + 3^2) = 3{,}1416\,.\,34 = 106{,}81 \text{ Quadr.-Fuß.}$$

Beispiel 2. Ein sphärisches Dreieck, dessen drei Winkel zusammen 250 Grad betragen, hat bei dem Kugelhalbmesser $r = 5$ Zoll, den Inhalt

$$O = \left(\frac{250}{180} - 1\right).\,25\,\pi = \frac{7\,.\,25\,.\,\pi}{18} = 30{,}54 \text{ Quadr.-Zoll.}$$

§. 24. Inhalte krummflächiger Körper. Der Inhalt eines Cylinders, Fig. 91 (a. f. S.), ist, wenn r den Halbmesser AM und h die Höhe MN bezeichnet:

$$V = \pi r^2 h.$$

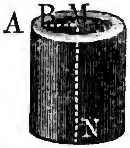
Der Inhalt eines hohlen Cylinders oder der einer Röhre.

Fig. 92, ist, wenn r_1 den äußeren Halbmesser AM und r_2 den lichten oder inneren Halbmesser BM, h aber die Höhe MN bezeichnet:

Fig. 91.



Fig. 92.



$V = \pi\,(r_1^2 - r_2^2)\,h = 2\,\pi\,r\,b\,h$, wenn $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$ und $b = r_1 - r_2$ gesetzt wird.

Der Inhalt eines Gewölbes, Fig. 93, ist:

$$V = \frac{\beta^0}{360^0} \cdot \pi\,(r_1^2 - r_2^2)\,h,$$

wenn β^0 den Centriwinkel $ACA = 2\,ACD$ und h die Länge des Gewölbes bezeichnet (s. §. 16).

Für den Kegel ABC, Fig. 94, mit dem Halbmesser

Fig. 93.

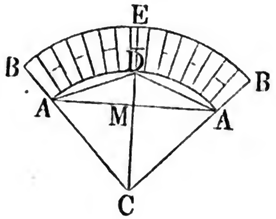
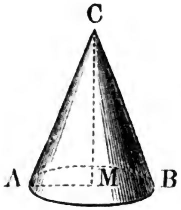


Fig. 94.



$MA = r$ und der Höhe $CM = h$ hat man:

$$V = \frac{\pi\,r^2\,h}{3},$$

und für den abgekürzten Kegel, Fig. 95, mit den Halbmessern $AN = r_1$ und $BM = r_2$ und der Höhe $MN = h$ ist:

$$V = \pi\,(r_1^2 + r_1\,r_2 + r_2^2)\,\frac{h}{3}.$$

Der Inhalt der Kugel, Fig. 96, ergiebt sich aus dem

Fig. 95.

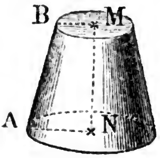
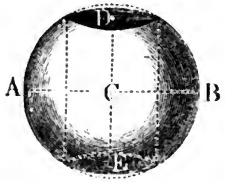


Fig. 96.



Halbmesser $CA = r$ oder Durchmesser $AB = d$ durch die Formeln.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 4{,}1888\, r^3 \text{ oder } V = \frac{\pi}{6} d^3 = 0{,}5236\, d^3.$$

Umgekehrt ist

$$r = \sqrt[3]{\frac{3\,V}{4\,\pi}} = 0{,}62035 \sqrt[3]{V}.$$

Für den Inhalt einer Kugel mit cylindrischem Loche von der Länge $DE = l$, Fig. 96 ist

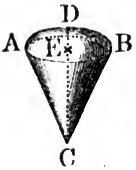
$$V = \frac{\pi\, l^3}{6} = 0{,}5236\, l^3.$$

Der Inhalt einer Hohlkugel mit dem äußeren Halbmesser r_1 und dem inneren Halbmesser r_2 ist

$$V = \frac{4}{3}\pi\,(r_1^3 - r_2^3).$$

Für den Kugelausschnitt oder den durch Umdrehung eines Kreisausschnittes erzeugten Körper ABC, Fig. 97, hat man, wenn r den Kugelhalbmesser CA und h die Höhe DE der entsprechenden Calotte bezeichnet:

Fig. 97.



$$V = \frac{2}{3}\pi\, r^2 h.$$

Für den Kugelabschnitt AB ist:

$$V = \pi\, h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right),$$

oder, wenn a den Halbmesser $EA = EB$ der Basis bezeichnet:

$$V = \frac{\pi}{6} h\,(3\,a^2 + h^2).$$

Für ein niedriges Segment überhaupt ist zu setzen, annähernd:

$$V = \frac{\pi\, a^2 h}{2} = \frac{F h}{2},$$

wenn F den Inhalt seiner Grundfläche bezeichnet.

Der Inhalt einer körperlichen Kugelzone AD, Fig. 98, ist

$$V = \frac{\pi h}{2}\left(a^2 + b^2 + \frac{h^2}{3}\right),$$

wobei a und b die Halbmesser der Grundflächen und h den Abstand derselben von einander bezeichnet.

Der Inhalt einer Kugelpfanne ABD, Fig. 99, ergiebt sich durch Subtraction zweier Kugelsegmente von einander.

Fig. 98.

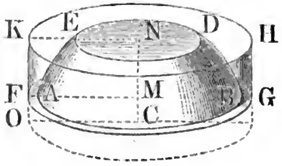
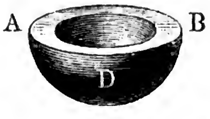


Fig. 99.



Der Inhalt eines körperlichen Dreieckes $ABCM$, Fig. 90, ist, wenn r den Halbmesser $MA = MB = MC$ bezeichnet:

$$V = \left(\frac{A^0 + B^0 + C^0}{180^0} - 1\right)\frac{\pi r^3}{3}.$$

Der Inhalt eines Ellipsoides ABD, Fig. 100, mit den Halbaxen $CA = a$, $CB = b$ und $CD = c$ ist

$$V = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Fig. 100.

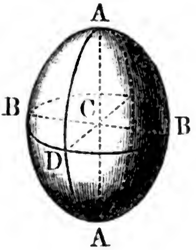
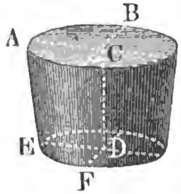


Fig. 101.



Für einen Kübel, Fig. 101, mit unähnlichen elliptischen Grundflächen, deren Halbaxen $CA = a$, $CB = b$, $DE = a_1$ und $DF = b_1$ sind, und deren Höhe $CD = h$ mißt, hat man:

$$V = \frac{\pi h}{6}[2(ab + a_1 b_1) + ab_1 + a_1 b].$$

Der Inhalt eines Fasses DE, Fig. 102, mit der halben Spundweite $CA = r_1$ und der halben Bodenweite $MD = NG = r_2$ ist bei der Länge $MN = l$:

$$V = \frac{\pi l}{3}(2 r_1^2 + r_2^2),$$

wenn die Dauben kreisförmig gekrümmt sind, und

$$V = \pi l \left(\frac{2 r_1 + r_2}{3}\right)^2,$$

wenn sie die parabolische Form haben. Nach einer anderen Bestimmung ist

$$V = \frac{\pi l}{15}(8 r_1^2 + 4 r_1 r_2 + 3 r_2^2).$$

Der Inhalt ungesetzmäßiger Körper wird wie der Inhalt ungesetzmäßiger Flächen durch die Simpson'sche Regel bestimmt. So ist z. B. der Inhalt eines Kessels ABD, Fig. 103, durch die Formel:

Fig. 102.

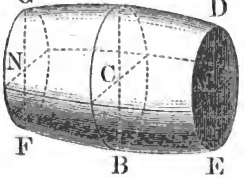
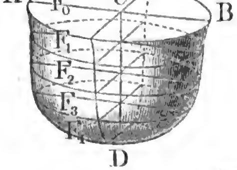


Fig. 103.



$$V = [F_0 + 4(F_1 + F_3) + 2F_2 + F_4]\frac{h}{12}$$

bestimmt, wenn h die Höhe CD und F_0, F_1, F_2 u. s. w. die in gleichen Abständen gemessenen Querschnitte des Kessels bezeichnen.

Beispiel 1. Der Inhalt eines Kugelsegmentes, welches bei einer Höhe von 3 Zoll an der Basis 5 Zoll im Halbmesser mißt, ist

$$V = \frac{\pi}{6} \cdot 3(3 \,.\, 5^2 + 3^2) = \frac{\pi}{2} \cdot 84 = 42\pi = 131{,}95 \text{ Cub.-Zoll.}$$

Beispiel 2. Der Inhalt eines Kübels, welcher 16 Zoll tief ist, in der Mündung 20 Zoll lang und 12 Zoll weit, am Boden aber 16 Zoll lang und 10 Zoll weit ist, beträgt:

$$V = \frac{\pi \,.\, 16}{24}[2(12 \,.\, 20 + 16 \,.\, 10) + 20 \,.\, 10 + 12 \,.\, 16]$$

$$= \frac{2\pi}{3} \cdot 1192 = 2496 \text{ Cubik-Zoll.}$$

Beispiel 3. Ein Faß, welches am Boden 4 Fuß, und am Spund $4\frac{1}{2}$ Fuß weit sowie 5 Fuß lang ist, hat nach der ersten Formel den Inhalt

$$V = \frac{\pi \,.\, 5}{3}[2 \,.\, (2{,}25)^2 + 2^2] = \frac{5 \,.\, 113 \,.\, \pi}{24} = 73{,}97 \text{ Cub.-Fuß,}$$

nach der zweiten aber

$$V = 5 \,.\, \pi\left(\frac{9+4}{6}\right)^2 = \frac{5 \,.\, 169 \,.\, \pi}{36} = 73{,}74 \text{ Cubik-Fuß.}$$

Beispiel 4. Ein Kessel mit kreisförmigen Querschnitten hat bei $2\frac{1}{2}$ Fuß Tiefe folgende Weiten. In der Mündung: 40 Zoll, um den vierten Theil der Tiefe tiefer: 34 Zoll, in der halben Tiefe: 32 Zoll, bei drei Viertel Tiefe: 28 Zoll, am Boden: 0 Zoll; welches ist sein Fassungsraum? Er ist:

$$V = \frac{\pi h}{12}[r_0^2 + 4(r_1^2 + r_3^2) + 2r_2^2 + r_4^2]$$

$$= \frac{30 \,.\, \pi}{12}[20^2 + 4(17^2 + 14^2) + 2 \,.\, 16^2 + 0]$$

$$= \frac{5\pi}{2}(400 + 1940 + 512) = 5 \,.\, 1426 \,.\, \pi$$

$$= 7130 \,.\, \pi = 22400 \text{ Cubik-Zoll.}$$

Anmerkung. Mehreres über die Inhaltsbestimmung körperlicher Räume unter den Artikeln Cubatur der Auf- und Abträge, Bestimmung der Schwerpunkte und Guldinische Regel.

§. 25. Das axonometrische Zeichnen. Bezeichnen x, y und z die Coordinaten eines Punktes, sowie x_1, y_1 und z_1 die Projectionen derselben, so sind $\frac{x_1}{x}$, $\frac{y_1}{y}$ und $\frac{z_1}{z}$ die Reductionscoefficienten und es stehen dieselben in gegebenen Verhältnissen zu einander; es ist

$$\frac{x_1}{x} : \frac{y_1}{y} : \frac{z_1}{z} = m : n : p.$$

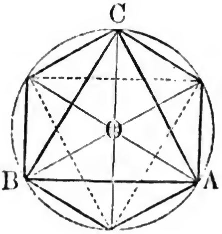
Bei der isometrischen Projectionsmethode ist

$$m : n : p = 1 : 1 : 1, \text{ und zwar}$$

$$m = n = p = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}8165,$$

und es schließen die Projectionen der drei Raumaxen OA, OB und OC, Fig. 104, die Winkel $AOB = BOC = COA$ von je 120 Grad zwischen sich ein.

Fig. 104.



Bei der monodimetrischen Projectionsmethode ist

$$m : n : p = 2 : 1 : 2, \text{ oder}$$
$$= 3 : 1 : 3, \text{ oder}$$
$$= 4 : 1 : 4 \text{ u. s. w.}$$

Für $m : n : p = 2 : 1 : 2$ oder $= 1 : \frac{1}{2} : 1$ ist

$$m = p = \tfrac{1}{3}\sqrt{8} = 0{,}9428 \text{ und}$$
$$n = \tfrac{1}{3}\sqrt{2} = 0{,}4714,$$

und es sind die Projectionen der Axenwinkel

$AOB = BOC = 131^\circ, 24', 35''$ und $COA = 97^\circ, 10', 51''$, (Fig. 105).

Bei den anisometrischen Projectionen sind m, n und p von einander verschieden. Für $m : n : p = 9 : 5 : 10$ ist $m = 0{,}8868$, $n = 0{,}4927$ und $p = 0{,}9853$, ferner $AOB = 157^\circ, 0', 22''$, $BOC = 107^\circ, 48', 53''$ und $COA = 95^\circ, 10', 45''$ (Fig. 106).

Fig. 105.

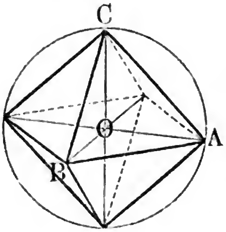
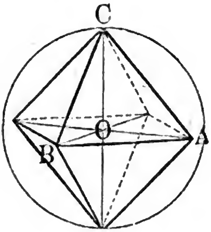


Fig. 106.



Dritter Abschnitt.

Formeln und Regeln der praktischen Geometrie.

Erstes Capitel.

Prüfen und Justiren der Instrumente.

§. 1. **Optische Linsen.** Der Halbmesser CA, Fig. 107, der Vorderfläche DAE einer einfachen Linse sei $= r$, der Halbmesser KB der Hinterfläche $DBE = r_1$, die Dicke AB der Linse $= d$, und das Brechungsverhältniß des Glases oder Linsenstoffes überhaupt, $= \varkappa$ (Kappa).

Dann sind die Entfernungen $MA = a$ und $MB = b$ ihres optischen Mittelpunktes M von den Mittelpunkten A und B der Linsenflächen bestimmt durch die Formeln:

1. $a = \dfrac{rd}{r + r_1}$ und $b = \dfrac{r_1 d}{r + r_1}$.

Ferner ist für die Brennweite oder die Entfernung $MF = f$, Fig. 108, des Brennpunktes F vom optischen Mittelpunkte:

Fig. 107.

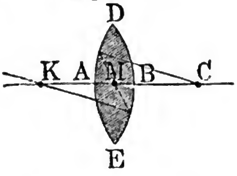
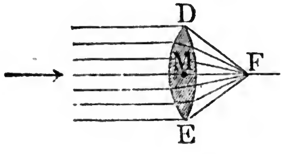


Fig. 108.



2. $\dfrac{1}{f} = (\varkappa - 1)\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r_1}\right)$, also $f = \dfrac{r r_1}{(\varkappa - 1)(r + r_1)}$.

Für die Vereinigungsweiten $ML = e$ und $MN = e_1$, Fig. 109 (a. f. S.), gilt die Regel:

3. $\frac{1}{e}+\frac{1}{e_1}=\frac{1}{f}$, also ist $\frac{1}{e_1}=\frac{1}{f}-\frac{1}{e}$, oder $e_1=\frac{fe}{e-f}$

Für die Höhen oder Abstände $LL_1=h$ und $NN_1=h_1$ von der optischen Axe, Fig. 110, ist:

Fig. 109.

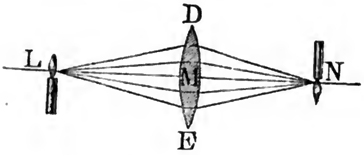
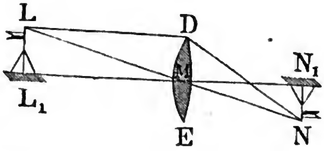


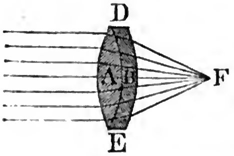
Fig. 110.



4. $\frac{h_1}{h}=\frac{e_1}{e}=\frac{f}{e-f}$ (das Vergrößerungsverhältniß).

Für die achromatische Doppellinse DE, Fig. 111, behalten die Regeln unter 3. und 4. ihre Richtigkeit, nur ist hier die Brennweite f der ganzen Linse aus den Brennweiten f_1 und f_2 ihrer Theile bestimmt durch die Formel:

Fig. 111.



5. $\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}-\frac{1}{f_2}$, oder $f=\frac{f_1 f_2}{f_2-f_1}$.

Ist x_1 das Brechungsverhältniß des Kronglases, aus dem die Sammellinse A, und x_2 das des Flintglases, aus dem die Zerstreuungslinse B besteht, sind ferner r und r_1 die Halbmesser der ersten und r_1 und r_2 die der zweiten Linse, so hat man:

6. $\frac{1}{f_1}=(x_1-1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right)$ und $\frac{1}{f_2}=(x_2-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$.

Für Kronglas ist $x_1 = 1{,}535$, für Flintglas $x_2 = 1{,}596$, für Wasser $= 1{,}336$, für Eis 1,307, Demant $= 2{,}487$.

Nach Dollond ist für eine achromatische Linse

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{1000}{1497} \text{ zu nehmen.}$$

Beispiel 1. Wenn die Kugelhalbmesser einer Linse aus Kronglas folgende sind: $r_1 = 12$ Zoll und $r_2 = 20$ Zoll, so ist die Brennweite dieser Linse:

$$f=\frac{12 \,.\, 20}{0{,}535\,(12+20)}=\frac{240}{0{,}535 \,.\, 32}=\frac{15}{1{,}07}=14{,}02 \text{ Zoll.}$$

Beispiel 2. Ein Object in 15 Fuß Entfernung giebt durch diese Linse ein Bild in der Entfernung

$$e_1=\frac{fe}{e-f}=\frac{12 \,.\, 15 \,.\, 14{,}02}{12 \,.\, 15-14{,}02}=\frac{2523{,}6}{165{,}98}=15{,}20 \text{ Zoll;}$$

hat das Object die Höhe $h = 2$ Fuß, so ist die Bildhöhe

$$h_1=\frac{15{,}20}{12 \,.\, 15}\cdot 2\cdot 12=\frac{15{,}20 \,.\, 2}{15}=2{,}03 \text{ Zoll.}$$

Beispiel 3. Welche Brennweiten müssen die Bestandtheile einer achromatischen Doppellinse haben, wenn diese im Ganzen eine Brennweite $f = 15$ Zoll erhalten soll? Es ist

$$f_2 = 1{,}497 f_1 \text{ und } \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{1{,}497 f_1} = \frac{0{,}497}{1{,}497 f_1},$$

folglich die Brennweite der Sammellinse aus Kronglas:

$$f_1 = \frac{0{,}497 \,.\, f}{1{,}497} = \frac{0{,}497 \,.\, 15}{1{,}497} = 4{,}98 \text{ Zoll},$$

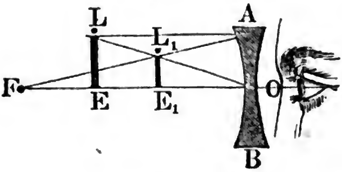
und die (natürlich negative) Brennweite der zerstreuenden Flintglaslinse:

$$f_2 = 1{,}497 \,.\, 4{,}98 = 7{,}455 \text{ Zoll}.$$

§. 2. Brillen und Loupen. Die deutliche Sehweite eines gesunden Auges ist 8 bis 10 Zoll. Der Kurzsichtige hat eine kleinere, der Weitsichtige eine größere deutliche Sehweite; jener gebraucht eine Brille mit concaven oder Zerstreuungsgläsern, dieser eine solche mit converen oder Sammelgläsern.

Ist $OE = e$, Fig. 112, die deutliche Sehweite eines gesunden Auges, $OE_1 = e_1$ aber die eines Kurzsichtigen, und $OF = f$ die Brennweite der Linse AB, so gilt die Regel

Fig. 112.

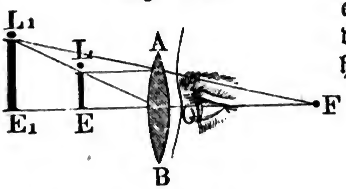


$$\frac{1}{f} = \frac{1}{e_1} - \frac{1}{e}, \text{ oder}$$

$$f = \frac{e e_1}{e - e_1}.$$

Ist ebenso $OE = e$, Fig. 113, die deutliche Sehweite eines gesunden Auges, $OE_1 = e_1$ die eines Weitsichtigen und $OF = f$, die Brennweite der Linse, so hat man

Fig. 113.



$$\frac{1}{f} = \frac{1}{e} - \frac{1}{e_1}, \text{ also}$$

$$f = \frac{e e_1}{e_1 - e}.$$

Setzen wir z. B. die deutliche Sehweite eines gesunden Auges = 9 Zoll, so erhalten wir für einen Kurzsichtigen mit der deutlichen Sehweite von 5 Zoll, die erforderliche Brennweite der Brillengläser desselben:

$$f = \frac{9 \,.\, 5}{9 - 5} = \frac{45}{4} = 11\tfrac{1}{4} \text{ Zoll},$$

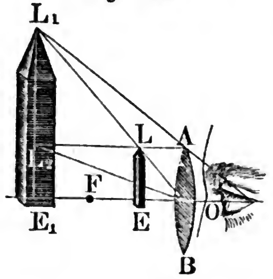
dagegen für einen Weitsichtigen mit der deutlichen Sehweite $e_1 = 13$ Zoll ist die nöthige Brennweite seiner Brillengläser:

$$f = \frac{9 \,.\, 13}{13 - 9} = \frac{117}{4} = 29{,}25 \text{ Zoll}.$$

Bringt man bei einer Loupe AB, Fig. 114, deren Brennweite $OF = f$ sein möge, das Object LE so nahe, daß seine

Entfernung $OE = e$ von der Linse kleiner als die Brennweite ist, so kommt sein Bild $L_1 E_1$ in die Entfernung $OE = e_1$, für welche ist

Fig. 114.



$$\frac{1}{e_1} = \frac{1}{e} - \frac{1}{f}, \text{ oder}$$

$$e_1 = \frac{fe}{f - e},$$

und umgekehrt,

$$e = \frac{fe_1}{f + e_1}.$$

Die lineäre Vergrößerung dieser Loupe ist

$$\varphi = \frac{E_1 L_1}{EL} = \frac{OE_1}{OE} = \frac{e_1}{e} = \frac{f + e_1}{f} = 1 + \frac{e_1}{f} = 1 + \frac{9}{f},$$

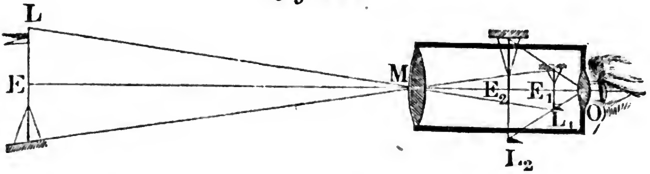
da für e_1 die deutliche Sehweite von 9 Zoll eingesetzt werden kann.

Beispiel. Damit eine Loupe 6fach vergrößere, muß sie eine Brennweite haben, welche bestimmt ist durch die Gleichung

$$\varphi = 1 + \frac{e_1}{f}, \text{ oder } f = \frac{e_1}{\varphi - 1} = \frac{9}{6 - 1} = \frac{9}{5} = 1 \text{ Zoll } 9{,}6 \text{ Linien.}$$

§. 3. **Fernrohr.** Bei einem Fernrohre MO, Fig. 115, ist die Entfernung ME des Objectes LE von der Objectiv-

Fig. 115.



linse so groß, daß man annehmen kann, das Bild $L_1 E_1$ steht um die Brennweite $ME_1 = f$ von der Linse M ab. Das Bild $L_1 E_1$ durch die Loupe oder durch das Ocularglas O betrachtet, rückt aus der Entfernung $OE_1 = e_1$ in die Entfernung $OE_2 =$ der deutlichen Sehweite. Die Vergrößerung ist

$$\varphi = \frac{tang.\, E_1 O L_1}{tang.\, E_1 M L_1} = \frac{ME_1}{OE_1} = \frac{f}{e_1},$$

oder, wenn f_1 die Brennweite des Oculars bezeichnet, und hiernach $e_1 = \frac{f_1 e_2}{f_1 + e_2}$ gesetzt wird, $\varphi = \frac{f(f_1 + e_2)}{f_1 e_2}$.

Ist aber f_1 gegen die deutliche Sehweite $e_2 = 9$ Zoll sehr klein, so läßt sich setzen: $\varphi = \frac{f}{f_1}$.

Die Vergrößerung des Fernrohres ist also der Quotient aus der Brennweite des Objectives und der des Oculares.

Die Länge des ganzen Fernrohres ist $l = f + f_1$. Die Vergrößerung eines Fernrohres bestimmt sich auch, wenn man dieses nach einem entfernten Gegenstande, z. B. nach einem Fenster oder nach einer Nivellirstange richtet und nun zu gleicher Zeit mit dem einen Auge durch das Fernrohr, sowie mit dem anderen nach einem ungefähr in der deutlichen Sehweite aufgestellten Maaßstab sieht, und beobachtet, wie viel Theile des Maaßstabes der im Fernrohr gesehene Gegenstand einnimmt. Ist dann h die Höhe und e die Entfernung des durch das Fernrohr gesehenen Objectes, sowie h_1 die scheinbare Größe von h, oder die Länge des Theiles vom Maaßstabe, welcher von h im Fernrohre gedeckt wird, und e_1 die Entfernung des Maaßstabes vom Auge, so hat man die Vergrößerung des Fernrohres:

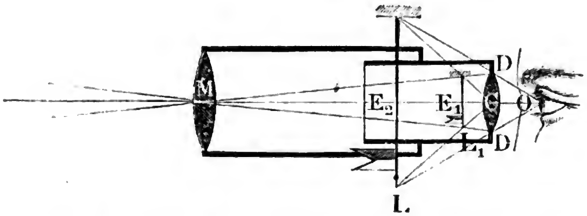
$$\varphi = \frac{h_1}{e_1} \cdot \frac{e}{h}.$$

Man findet die Vergrößerung eines Fernrohres auch dadurch, daß man die scheinbare Größe des Sonnenbildes auf einer vor der Ocularröhre aufgestellten Wand mit der scheinbaren Größe der Sonne selbst vergleicht. Bezeichnet h_1 den Durchmesser dieses Bildes und e_1 die Entfernung desselben von der Ocularlinse, so ist bei dem mittleren Durchmesser $\frac{h}{e} = 32', 10''$ der Sonne:

$$\varphi = \frac{3438}{32{,}10} \cdot \frac{h_1}{e_1} = 107\,\frac{h_1}{e_1}.$$

Das Seh- oder Gesichtsfeld ist der Winkel DMD

Fig. 116.



$= 6876' \cdot \frac{a_1}{l}$, wenn a_1 den Oeffnungshalbmesser CD des Oculars bezeichnet. Findet man, daß der Sonnen- oder Monddurchmesser $n$mal in dem Gesichtsfelde enthalten ist, so kann man auch die Größe dieses Feldes $= 30' . n$ setzen. Uebrigens findet man auch diesen Winkel durch die Formel $6876' \cdot \frac{h}{e}$, wenn h die Höhe des Gegenstandes bezeichnet, welche in der Entfernung e von der Objectivlinse eben noch vollständig sichtbar ist.

Durch eine Blendung, oder durch ein Diaphragma, wird das Gesichtsfeld noch mehr eingeschränkt.

Der Ort O des Auges wird bestimmt durch die Entfernung

$CO = s$ desselben von dem Mittelpunkte C der Ocularlinse, indem man setzt:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{f+f_1} = \frac{1}{f_1}, \text{ weshalb folgt:}$$

$$s = \frac{(f+f_1)f_1}{f} = \left(\frac{1+\varphi}{\varphi}\right)f_1.$$

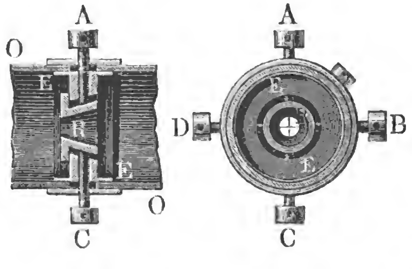
Die Helligkeit eines Fernrohres ist $= \left(\frac{a}{\varphi\alpha}\right)^2 = 100\left(\frac{a}{\varphi}\right)^2$, und es bezeichnet a den Oeffnungshalbmesser der Objectivlinse, $\alpha = \frac{1}{10}$ Zoll, den der Pupille, und φ die Vergrößerungszahl des Fernrohres.

Um das Fernrohr in Hinsicht auf Deutlichkeit zu prüfen, richte man dasselbe auf eine in größerer Entfernung (150 bis 200 Fuß) aufgestellte, gut beleuchtete weiße Tafel mit einfachen schwarzen Figuren (Kreise, Quadräte u. s. w.), von $\frac{1}{2}$ bis 1 Zoll Größe, und sehe zu, ob diese Figuren rein, scharf begrenzt und gleichmäßig schwarz erscheinen.

Die optische oder Sehaxe des Fernrohres geht durch den optischen Mittelpunkt der Objectivlinse und durch den Kreuzpunkt des Fadenkreuzes, und soll soviel wie möglich mit der geometrischen Axe desselben zusammenfallen. Besonders ist zu verlangen, daß der optische Mittelpunkt der Objectivlinse genau in diese Axe falle. Um dies zu prüfen, legt man das Fernrohr in ein festes Lager, dreht es in demselben allmälig im Kreise herum und sieht zu, ob hierbei das von der Objectivlinse erzeugte Bild eines entfernten Gegenstandes seinen Ort nicht ändert.

Um den Kreuzpunkt des Fadenkreuzes in die geometrische Axe des Fernrohres oder überhaupt in eine bestimmte Lage bringen zu können, wird das Fadenkreuz R, Fig. 117, auf einen zugleich zur Blendung dienenden Ring EE aufgeklebt, und dieser mittels vier Schrauben A, B, C, D mit einem weiteren Ringe verbunden, welcher sich an den inneren Umfang der Ocularröhre anlehnt. Der Abstand zwischen dem Oculare und dem Fadenkreuze hängt von dem Auge des Beobachters ab; für das kurzsichtige Auge ist er kleiner und für das weitsichtige größer zu machen als für das gesunde Auge. Deshalb muß sich entweder das Fadenkreuz oder das Ocular in der Axenrichtung des Fernrohres etwas verschieben lassen. Da ferner die Bilder von

Fig. 117.



nahen Objecten über den Brennpunkt des Objectivglases hinausfallen, so ist die das Fadenkreuz und das Ocular enthaltende Ocularröhre bei solchen weiter auszuschieben, um das Bild in die Ebene des Fadenkreuzes zu bringen. Man prüft und justirt in diesen Beziehungen auf folgende Weise:

Man richte erst das Fernrohr nach einem entfernten Objecte und stelle das Ocular so, daß dasselbe vollkommen deutlich erscheint, dann rücke man das Fadenkreuz allein so, daß auch dieses deutlich wird und seine Stelle auf dem Objecte nicht ändert, wenn man das Auge an der Ocular-Oeffnung hin- und herbewegt. Ist nicht das Fadenkreuz, sondern das Ocular in der Ocularröhre stellbar, so ist natürlich dieses zu stellen, um den letzten Zweck zu erreichen; jedoch nachher die ganze Ocularröhre so zu schieben, daß auch das Bild eines anvisirten Objectes deutlich wird.

Beispiel 1. Ein Fernrohr, welches ein Objectivglas von 13 Zoll Brennweite hat, vergrößert 20fach bei einer Ocularlinse von der Brennweite $f_1 = \frac{f}{20} = \frac{13}{20}$ Zoll $= 7{,}8$ Linie. Die Länge dieses Fernrohres ist hiernach $= 13$ Zoll $7{,}8$ Linie (163,8 Linien), und die Entfernung des Auges vom Ocular $= \frac{1+20}{20} \cdot 7{,}8$ Linie $= 8{,}19$ Linie. Ist ferner der Oeffnungshalbmesser des Objectives $6\frac{1}{2}$ Linie, so hat man die Helligkeit dieses Rohres $= 100 \left(\frac{6{,}5}{12 \,.\, 20}\right)^2 = 0{,}0733$; ist endlich der Oeffnungshalbmesser des Oculares $a_1 = 1$ Linie, so hat man die Größe des Gesichtsfeldes dieses Fernrohres

$$= 6876' \cdot \frac{a_1}{l} = 6876 \cdot \frac{1}{163{,}8} = 42 \text{ Minuten.}$$

Beispiel 2. Um die Vergrößerung eines Fernrohres zu finden, hat man einen Gegenstand von 6 Zoll Höhe in 45 Fuß Entfernung sowie neben demselben einen Maaßstab in 9 Zoll Entfernung von dem Ocular aufgestellt, und nun beim Durchsehen mit dem einen Auge und Ansehen mit dem anderen gefunden, daß das Bild von dem Gegenstande auf dem Maaßstabe eine Höhe von $2\frac{1}{2}$ Zoll einnimmt. Nach der Formel

$\varphi = \frac{h_1}{e_1} \cdot \frac{e}{h}$ ist die gesuchte Vergrößerungszahl

$\varphi = \frac{2{,}5}{9} \cdot \frac{45 \,.\, 12}{6} = 2{,}5 \,.\, 10 = 25$. Zu dem geodätischen Gebrauche wendet man nur Fernröhre von 10- bis höchstens 30facher Vergrößerung an.

§. 4. Das Visirlineal. Von jedem Visirlineale ist zu verlangen, daß die Visirebene, d. i. die Ebene, in welcher sich alle möglichen Visirlinien befinden, rechtwinkelig auf der Grundfläche des Lineales stehe und durch die Kante desselben gehe, damit beim Auflegen des Lineales auf eine Horizontalebene

und Visiren nach einem Objecte, die Horizontalprojection der Visirlinie mit der Kante des Lineales zusammenfalle.

Bei dem Diopter- oder Visirlineale mit Diopteren ist die Visirebene durch die Visirlöcher im Oculardiopter AB,

Fig. 118.

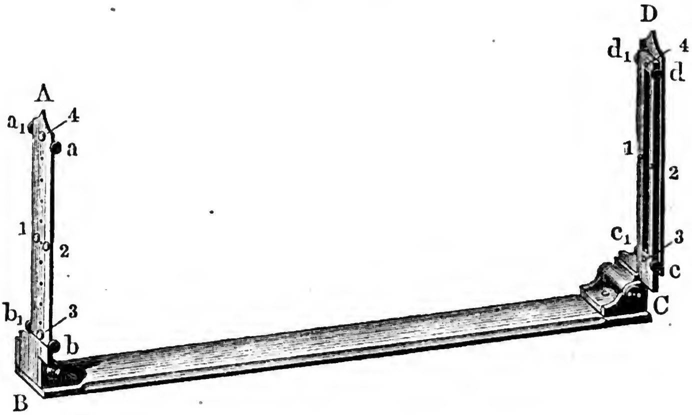
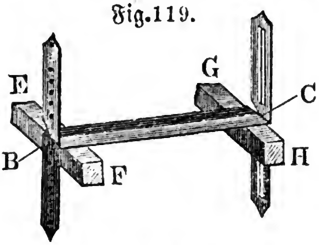


Fig. 118, und durch den Visirfaden im Objectivdiopter CD bestimmt. Die Rechtwinkeligkeit der Visirebene gegen die Grundfläche des Lineales prüft man durch Anvisiren eines ausgehängten Lothes. Um aber zu untersuchen, ob die Visirebene durch die Kante des Lineales gehe, stellt und hängt man dasselbe über zwei in eine Horizontalebene fallende Arme EF und GH, Fig. 119, so auf, daß seine Kante BC beide Mal dieselbe, durch Striche auf den Armen fixirte Lage einnimmt. Findet man dann beim Durchsehen, daß die Visirlinie in beiden Fällen nach einem und demselben Objecte gerichtet ist, so bleibt nichts zu wünschen übrig; außerdem aber müssen die Diopter justirt werden. Um dies

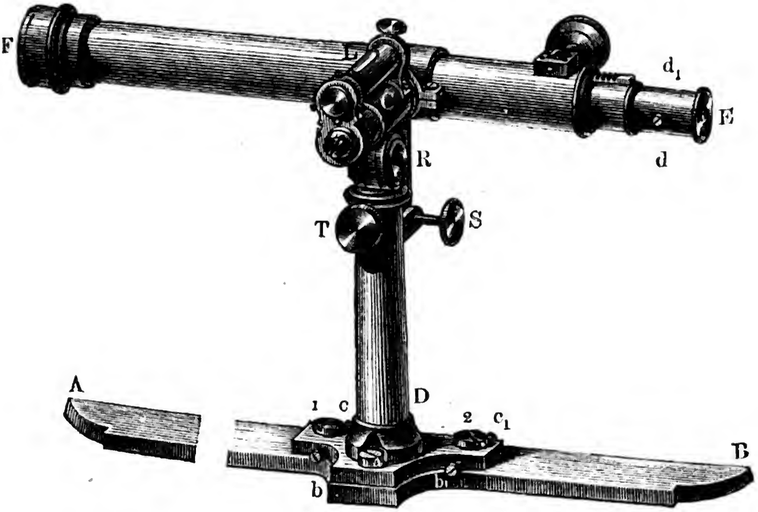
Fig. 119.



zu können, sind die Visirlöcher des einen und das Fenster des andern Diopters in besonderen Tafeln ausgeschnitten, die durch vier kleine Schrauben 1, 2, 3, 4, Fig. 118, auf die drehbaren Diopterflügel befestigt und durch andere Schrauben a, a_1, b, b_1, c, c_1 und d, d_1 darauf verstellt werden können. Jedenfalls hat man in der Mitte zwischen beiden Objecten, nach welchen das Lineal bei der einen und bei der andern Stellung weist, eine Stange aufzustellen oder ein Loth aufzuhängen, und nach gehörigem Lüften der Schrauben 1, 2, 3, 4, durch die Schrauben a, a_1, b, b_1 u. s. w. die Diopter so weit seitlich zu rücken, bis die Visirlinie nach diesem mittleren Objecte gerichtet ist. Zuletzt sind natürlich die Schrauben 1, 2, 3, 4 wieder anzuziehen.

Bei dem **Perspectivlineale** oder der sogenannten **Kippregel** ist die Visirebene diejenige, welche die optische Axe des Fernrohres beim Kippen desselben durchläuft. Es ist aber überhaupt die Fläche, in welcher sich die optische Axe des Fernrohres beim Kippen bewegt, eine **Ebene**, wenn die optische Axe EF des Fernrohres, Fig. 120, auf der Drehungsaxe C winkelrecht steht.

Fig. 120.

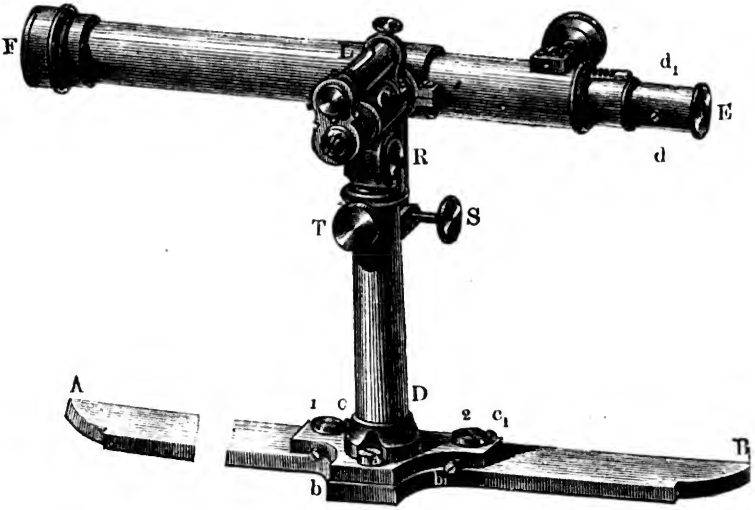


Um dies zu prüfen, stellt man die Kippregel auf einen horizontalen Tisch, richtet dieselbe nach einer etwa in 100 Schritt Entfernung aufgestellten Stange, und zieht eine Linie am Rande des Lineales hin. Hierauf hebt man das Instrument ab und stellt es so auf, daß dessen Kante die gezogene Linie von der andern Seite her berührt, endlich schlägt man das Fernrohr um und sieht hierbei zu, ob dasselbe wieder genau nach dem Objecte gerichtet ist. Ist dies nicht ganz der Fall, läßt sich also in dieser Visirlinie neben der ersten Stange eine zweite aufstellen, so nimmt man die Mitte zwischen beiden Stangen und verrückt mittels der Schrauben d und d_1 das Fadenkreuz so weit, bis der Kreuzpunkt desselben eine in dieser Mitte aufgestellte Stange deckt. Findet man bei Wiederholung dieser Operation, daß das Fadenkreuz dieses Signal vollkommen deckt, so leistet das Instrument dieser ersten Forderung Genüge.

Damit zweitens die Visirebene winkelrecht auf der Grundfläche des Lineales stehe, ist nöthig, daß die Drehungsaxe C des Fernrohres mit der Grundfläche des Lineales AB parallel laufe. Um dies zu prüfen, stellt man das Instrument auf einen genau horizontal gestellten Tisch und richtet es nach einem langen durch ein bedeutendes Gewicht (zwei Pfund) gespannten Lothe. Findet man nun, daß das Loth beim Kippen des Fernrohres den Kreuzpunkt des Fadenkreuzes überall deckt, so findet

der erforderliche Parallelismus Statt; ist es aber nicht der Fall, so muß man an dem Fußstücke *D* des Trägers *DR* eine Stellung vornehmen und dadurch die Säule *DR* nach der einen oder andern Seite hin etwas neigen. In dieser Absicht lüftet man die Schrauben 1 und 2, womit das Fußstück auf dem Lineal befestigt ist, ein wenig, und hebt oder senkt durch

Fig. 121.



die Schraube *a* das Fußstück auf der einen Seite so viel als nöthig ist, damit die Abweichung des Kreuzes vom Lothe ganz verschwinde.

Damit die optische Axe des Fernrohres auch unabhängig von der Ebene des Menselblattes in einer senkrechten Ebene kippe, versieht man noch den zu diesem Zwecke um ein Charnier *R* drehbaren Säulenkopf mit einer Röhrenlibelle *L* und Stellschraube *T*.

Um sich drittens zu überzeugen, ob die Visirebene durch die Kante *AB* des Lineales gehe, schlägt man denselben Weg ein, wie beim Diopterlineal (s. Fig. 119); man stellt erst dasselbe auf zwei horizontale Arme, rückt dessen Kante an die Endstücke einer auf diese Arme aufgerissenen Linie, und richtet bei dieser Stellung das Fernrohr nach einer in circa 100 Schritt Entfernung aufgestellten schwachen Stange ein. Nach diesem kippt man das Instrument um, hängt es umgekehrt an die Arme und zwar so, daß die Kante *AB* des Lineales wieder an die auf den Armen angegebenen Endstücke der ersten Linie zu liegen kommt. Zeigt nun das Fernrohr nicht genau nach derselben Stange, so ist ein Justiren des Instrumentes in dieser Beziehung nöthig. Dieses aber besteht in einer Drehung der Säule *DR* um eine verticale Axe, und wird mit Hülfe von vier Schrauben b, b_1, c und c_1 ermöglicht, die man aber nicht eher anziehen

darf, als bis man das Fußstück D durch Zurückziehen der Schrauben 1 und 3 gelüftet hat.

Endlich prüft man auch noch durch Anvisiren eines Lothes u. s. w., ob der eine Faden des Fadenkreuzes vertical und der andere horizontal sei. Bleibt hierbei noch etwas zu wünschen übrig, so stellt man an den Schrauben, welche sich gegen den auf der Ocularröhre festsitzenden Stahlrücken stemmen und dadurch diese Röhre mit dem eingeschlossenen Fadenkreuze ein wenig drehen.

§. 5. Libellen. 1. Die Dosenlibelle AB, Fig. 122, wird zum Einstellen einer Horizontalebene oder zum Aufstellen einer Verticallinie gebraucht. Man prüft dieselbe, indem man zusieht, ob die Luftblase ihren Ort nicht ändert, wenn man die auf einer Horizontalebene stehende Libelle um ihre verticale Axe, also so dreht, daß sie einen genau umschließenden Kreis nie verläßt. Wenn die Luftblase zu groß wird, so muß man den inneren Raum durch weiteres Drehen der Schraube C verengern oder C ganz herausdrehen und mehr Weingeist nachfüllen. Der Durchmesser der Blase soll aber auch nicht zu klein sein, sondern ungefähr $\frac{1}{2}$ Zoll betragen.

Fig. 122.



Man versieht die Dosenlibelle auch wohl mit drei als Füße dienenden Stellschrauben.

2. Die Röhrenlibelle dient unmittelbar nur zum Einstellen einer Horizontallinie. Man füllt sie mit Weingeist oder Schwefeläther und verschließt sie an ihren Enden mit Glasstöpseln. Die mittlere Länge ihrer Blase soll $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{4}$ der ganzen Röhrenlänge (4 bis 7 Zoll) betragen.

Die Empfindlichkeit einer Libelle wird durch den Weg gemessen, den die Luftblase bei einer gewissen Neigung der Libellenaxe zurücklegt. Zu diesem Zwecke verbindet man dieselbe mit einem Fernrohre oder Visirlineale so, daß ihre Axe mit der Visirlinie in einerlei Verticalebene fällt, richtet dies nach einer eingetheilten Stange, und bemerkt sich nicht allein den Stand der Luftblase, sondern auch die Stelle an der Stange, nach welcher die Visirlinie gerichtet ist. Nach diesem giebt man der ganzen Vorrichtung eine mäßige Neigung und bemerkt sich wieder den Stand der Luftblase und die anvisirte Stelle an der Stange. Ist nun s der Weg der Luftblase, oder der Abstand ihrer beiden Stände von einander, ferner h der an der Stange abgelesene Weg und e die Entfernung der Stange von dem Libellenmittel, so hat man den Weg, welchen die Luftblase bei jeder Secunde Axenneigung durchläuft:

$$x = \frac{se}{206265 \, . \, h},$$

so wie umgekehrt, den Neigungswinkel, welcher dem Wege 1 (Linie) der Luftblase entspricht:

$$\alpha'' = 206265'' \cdot \frac{h}{se}.$$

Z. B. Wenn die Luftblase einen Weg von 10 Linien zurücklegt, während der Visirpunkt an einer in 500 Fuß Entfernung aufgestellten Stange den Weg von 2 Zoll durchläuft, so ist der Neigungswinkel, welcher einer Linie Weg der Luftblase entspricht:

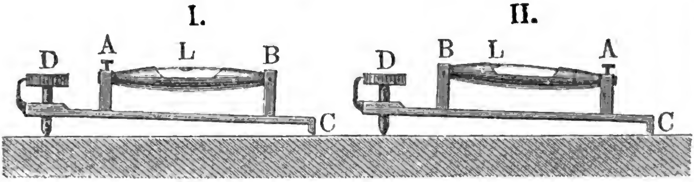
$$\alpha'' = 206265'' \cdot \frac{2.12}{500.12.12.10} = \frac{206265''}{30000} = 6'',87.$$

Der Halbmesser r, welcher der Krümmung des Röhrenrückens entspricht, ist bestimmt durch die Formel $r = \frac{se}{h}$ Für das letzte Beispiel ist er $= 30000$ Linien $= 2500$ Zoll $= 208\frac{1}{3}$ Fuß.

Die Röhrenlibelle ist von der Mitte aus nach beiden Enden zu in gleiche Theile, z. B. in Linien, getheilt, und zeigt die Horizontalität einer Linie, worauf dieselbe steht, oder an welcher dieselbe aufgehangen ist, dadurch an, daß die Enden ihrer Blase auf gleich benannte Theilpunkte der beiden Röhrenscalen stehen.

Die gewöhnlichen Libellen zum Abnehmen, wie die **Setzlibellen mit Füßen** oder **Hängelibellen mit Armen**, prüft man auf folgende Weise: Man hänge oder stelle dieselbe auf eine von einem sogenannten **Justirbretchen** gebildeten Linie CD, Fig. 123, auf, stelle die letztere durch eine Verticalschraube D

Fig. 123.



so, daß erstere zum Einspielen kommt, hebe hierauf die Libelle AB ab, bringe sie in umgekehrter Axenrichtung auf die Linie und sehe zu, ob sie wieder einspielt, oder ob die Blase wieder denselben Ort in der Röhre einnimmt. Ist dies nicht der Fall, so ist das Justiren nöthig, und hierbei dahin zu trachten, daß der Mittelpunkt der Luftblase nur halb so viel von dem Röhrenmittel abweiche, als nach dem Umsetzen oder Umhängen. Von der vollständigen Richtigkeit der Libelle kann man sich natürlich nur durch wiederholtes Umkehren überzeugen.

Um beim Justiren der Libelle gleich die Empfindlichkeit derselben mit prüfen zu können, versieht man den Kopf einer Fußschraube des Justirbretchens mit einer Kreistheilung und benutzt dieselbe als Mikrometerschraube.

Steht das eine Ende der Blase auf der einen Seite beim Theilstriche s, auf der andern aber beim Theilstriche s_1, so ist natürlich die Abweichung der Luftblase vom Röhrenmittel oder

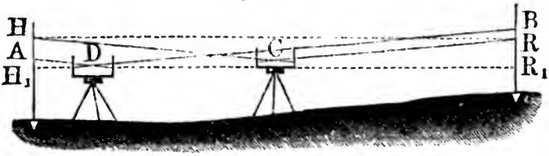
vom Normalstande, $= \frac{s - s_1}{2}$. Steht sie z. B. rechts auf 9,8, links aber auf 2,2 Linien, so ist ihre Abweichung $= \frac{9,8 - 2,2}{2} = \frac{7,6}{2}$ $= 3,8$ Linien; und wenn nun einer Linie Abstand eine Neigung von 6″,87 entspricht, so ist die Neigung in diesem Falle $= 3,8 \cdot 6'',87$ $= 26'',1$. Uebrigens wird in diesem Falle so zu justiren sein daß die Mitte der Luftblase auf $\frac{3,8}{2} = 1,9$ Linie, also das eine Ende auf $\frac{s + s_1}{2} + \frac{s - s_1}{4} = 6,0 + 1,9 = 7,9$ und das andere auf $\frac{s + s_1}{2} - \frac{s - s_1}{4} = 6,0 - 1,9 = 4,1$ Linie zu stehen kommt.

Das Justiren nimmt man in der Regel an Correctionsschrauben vor, wodurch die Glasröhre in ihrer messingenen Fassung etwas verstellt werden kann, oder man bedient sich nur einer Schraube, wodurch der eine Arm oder Fuß verlängert oder verkürzt werden kann, oder endlich, man verkürzt den einen Arm oder Fuß durch bloßes Abschaben.

Um endlich zu sehen, ob die Axe der Röhrenlibelle mit ihrer Aufsetz- oder Aufhängelinie in einer Ebene liege, dreht man die Libelle um diese Linie etwas rechts und links und sieht zu, ob hierbei die Luftblase nicht aus der Mitte komme. Außerdem ist es nöthig, durch seitliche Correctionsschrauben die Röhre in ihrem Gehäuse etwas zu verrücken.

§. 6. Luftblasenniveau. Das Haupterforderniß eines Niveaus ist, daß die Visirlinie mit der Libellenaxe parallel laufe, daß hiernach die Luftblase der Libelle nur dann einspiele oder eine gewisse Stelle einnehme, wenn die Visirlinie horizontal ist. Um dies zu prüfen, verschafft man sich erst eine horizontale Linie HR, Fig. 124, indem man mit dem uncorrigirten

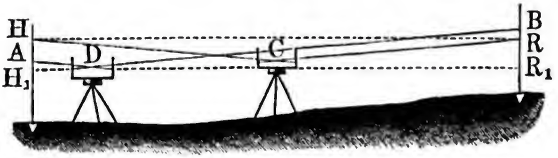
Fig. 124.



Instrumente C zwei in gleichen Entfernungen aufgestellte Nivellirstangen anvisirt. Welches auch der Winkel zwischen der Visirlinie und der Libellenaxe sei, so sind doch die anvisirten Punkte H und R in einerlei Niveau, weil die eine Visirlinie genau ebenso steigt oder fällt als die andere. Stellt man sich nun mit dem Instrumente dem einen dieser zwei Punkte sehr nahe und visirt wieder nach beiden, so müssen, wenn der genannte Parallelismus vorhanden ist, beide Visirlinien DH_1 und DR_1

in eine Horizontallinie fallen, und folglich die anvisirten Punkte H_1 und R_1 um gleichviel von der erst anvisirten in eine Horizontallinie fallenden Punkten H und R abstehen. Ist dies nicht der Fall, sind z. B. die anvisirten Punkte A und B, so ist es nöthig, die Stellung der Libelle gegen die Visirlinie zu ver-

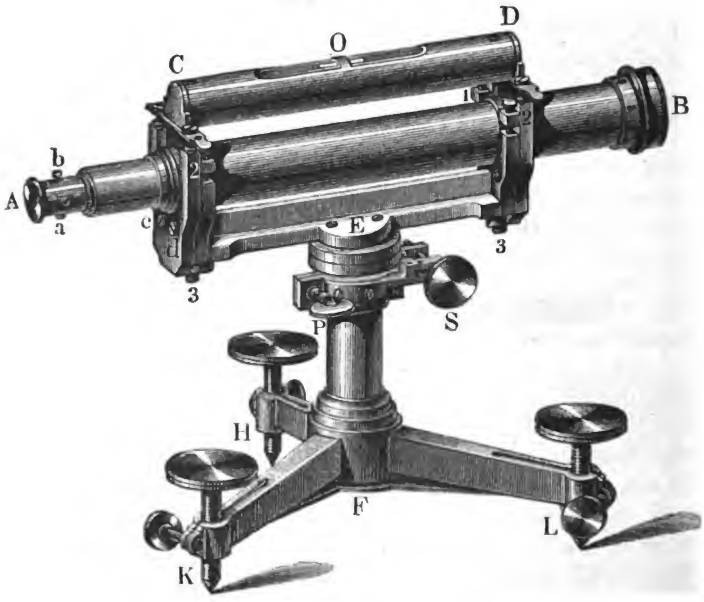
Fig. 125.



ändern. Da D sehr nahe an A steht, so wird A mit H_1 ziemlich zusammenfallen, und daher die Verbindung zwischen Visirlinie und Libelle so zu justiren sein, daß die Luftblase einspielt, wenn erstere nach einem Punkte R_1 gerichtet ist, der ebenso viel von R absteht, wie A (H_1) von H.

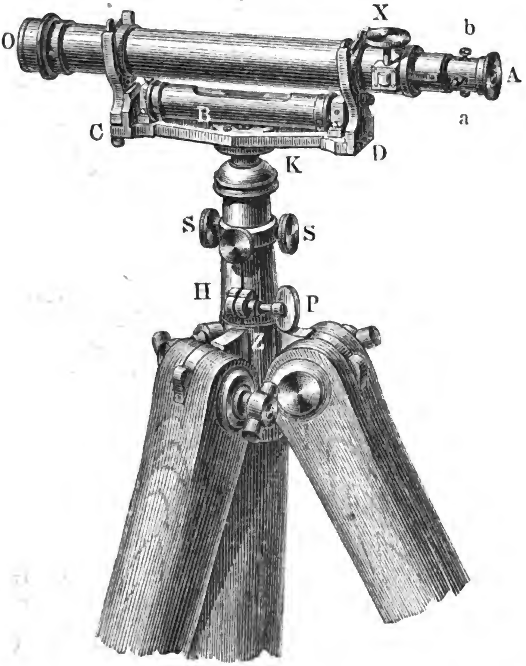
Bei den vorzüglicheren Nivellirinstrumenten ruht das Fernrohr lose in den Pfannen und läßt sich darin nicht allein um seine geometrische Axe drehen, sondern auch umlegen. Diese Axe ist die gerade Linie durch die Mittelpunkte zweier harten und genau abgedrehten Metallringe, welche das Fernrohr umgeben und in die Arme des Trägers zu liegen kommen. Die Libelle setzt man entweder lose auf diese Tragringe des Fernrohres, wie die Abbildung in Fig. 126 vor Augen führt, wo

Fig. 126.



AB das Fernrohr, *CE* und *DE* die Arme des Fernrohrträgers und *CD* die Libelle vorstellt, oder man befestigt sie auf den Fernrohrträger selbst, wie z. B. aus der Abbildung in Fig. 127 zu

Fig. 127.



ersehen ist, wo *A O* das Fernrohr, *B* die Libelle und *CD* den Fernrohrträger vor Augen führt.

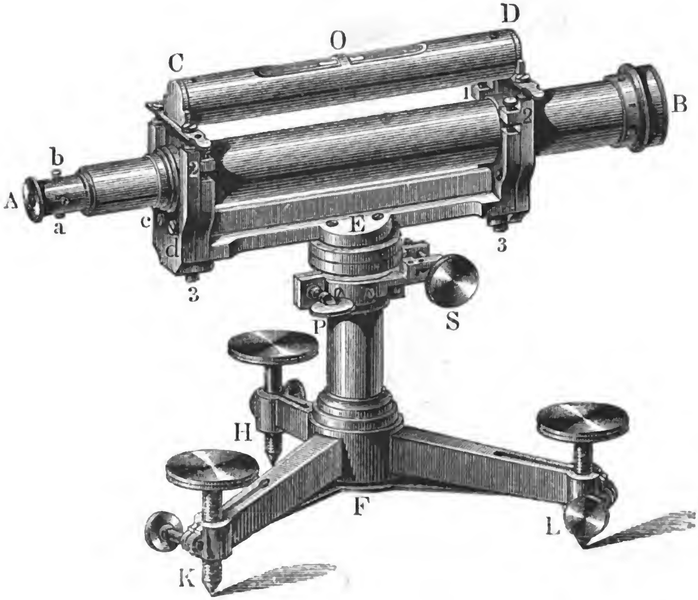
Vor Allem ist zu fordern, daß die beiden Tragringe des Fernrohres vollkommen kreisrund und gleich dick sind.

Wenn die Luftblase der aufsitzenden Libelle ihren Stand nicht ändert, während man das Fernrohr in seinen Trägern allmälig um seine geometrische Axe dreht, und wenn sie auch denselben Stand wieder einnimmt, nachdem man das Fernrohr umgelegt, also die Ringe desselben in den Lagern gewechselt hat, so entspricht das Fernrohr dieser ersten Forderung vollständig. Bei dem Instrumente in Fig. 127 lassen sich die Tragringe nur durch directe Messung prüfen.

Ferner ist zu fordern, daß der optische Mittelpunkt der Objectivlinse in die geometrische Axe des Fernrohres falle. In dieser Absicht nimmt man die Ocularröhre vom Fernrohre ab, fängt das von der Objectivlinse erzeugte Bild eines entfernten Gegenstandes auf einem weißen Blatte auf, und sieht nun zu, ob dieses Bild seinen Ort nicht ändert, wenn man das Fernrohr in seinen Lagern allmälig umdreht. Damit die optische Axe des Fernrohres mit der geometrischen Axe zusammenfalle, ist nöthig, daß auch der Kreuzpunkt des Fadenkreuzes

in der letzteren liege. Das Letztere prüft man dadurch, daß man das Fernrohr nach der Nivellirstange oder nach dem Nivellirzeichen richtet und allmälig in seinen Pfannen um seine geometrische Axe herumdreht. Bleibt dabei das Fadenkreuz immer über demselben Punkte des Nivellirzeichens stehen, so ist hierin nichts zu wünschen. Außerdem ist ein Einstellen des Fadenkreuzes mittels der Schrauben *a. b ...*, Fig. 128 und Fig. 129,

Fig. 128.



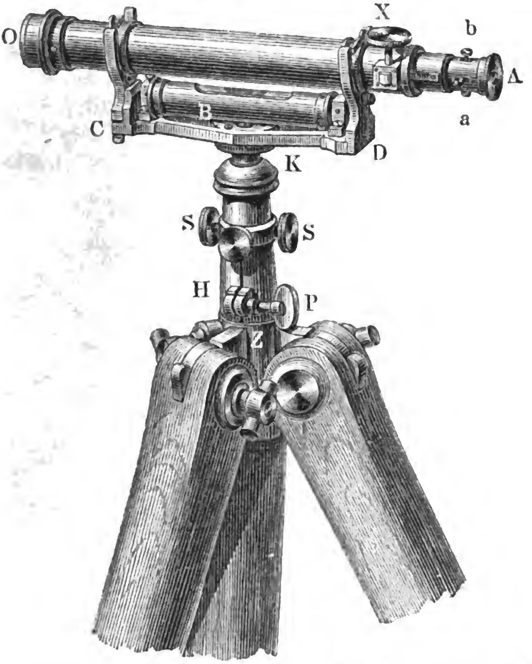
nöthig. Dies geschieht aber auf folgende Weise. Man stelle das Nivellirzeichen nach dem Fernrohre ein, drehe dann das letztere halb in seinem Lager herum und sehe nun zu, nach welchem Punkte des Zeichens es jetzt gerichtet ist; hierauf stelle man das Zeichen mitten zwischen die ersten Stellen und bringe durch die vertical stehenden Schrauben des Fadenkreuzes das letztere mit dem Zeichen bei dieser Stellung zum Decken. Dadurch wird wenigstens der eine (horizontale) Faden des Kreuzes centrirt; dreht man nun noch das Fernrohr in seinen Lagern um 90 Grad und wiederholt hier dasselbe Verfahren, indem man nun an den beiden anderen Schrauben des Fadenkreuzes stellt, so gelangt auch der zweite Faden und hiermit auch der Kreuzpunkt beider Fäden in die Axe des Fernrohres.

Entspricht das Fernrohr den im Vorstehenden angegebenen Forderungen, so ist nur noch die Richtigkeit der Libelle in Hinsicht auf die Visirlinie zu prüfen.

Bei dem Instrumente in Fig. 128 mit loser Libelle liegen

die Standpunkte der Libelle in einer mit der Visirare des Fernrohres parallelen Linie; es ist daher hier auch nur eine Prüfung der Libelle in Hinsicht auf diese Standlinie nöthig. In dieser Absicht bringt man die Luftblase der aufsitzenden Libelle durch Stellung der Fußschrauben zum Einspielen, hebt hierauf dieselbe ab und setzt sie in entgegengesetzter Richtung wieder auf. Spielt dann die Luftblase auf den ersten Punkt wieder ein, so bleibt

Fig. 129.



in der gedachten Hinsicht nichts zu wünschen übrig (s. §. 5), außerdem ist sie aber so zu justiren, daß sie sich um den halben Weg dem ersteren Standpunkte wieder nähert. Bringt man nun die Luftblase von Neuem zum Einspielen, und legt auch die Libelle wieder um, so muß die Luftblase ihren Ort nicht ändern, wenn das Justiren der Libelle als gelungen angesehen werden soll.

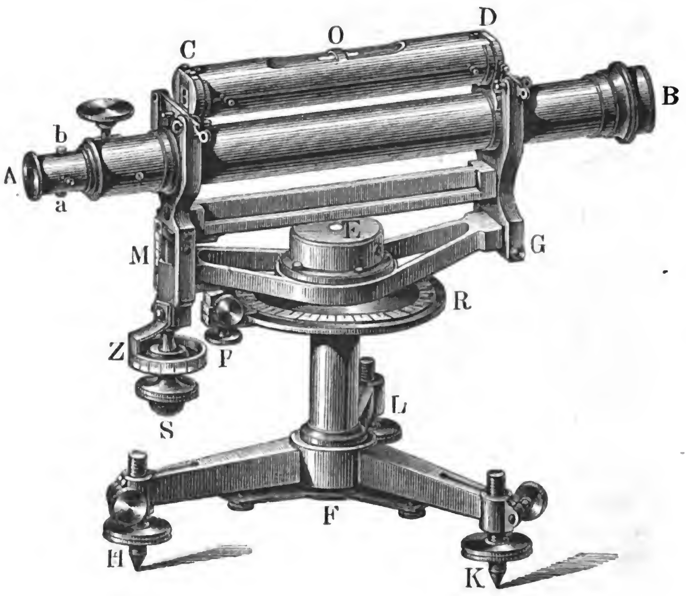
Entspricht das Instrument auch dieser Forderung, so ist die Libellenaxe mit der Visirlinie oder optischen Axe des Fernrohres parallel, und daher die letztere horizontal, wenn die Blase der Libelle einspielt. Hiervon kann man sich auch noch überzeugen, daß man das Instrument der am Anfange des Paragraphen beschriebenen und in Fig. 125 bildlich dargestellten Prüfung unterzieht.

Endlich ist noch zu verlangen, daß die Libellen- und Fernrohraxen winkelrecht zur Axe des Centralzapfens EF, Fig. 128, stehen, damit die einmal horizontal gestellte Visirlinie bei Umdrehung des Instrumentes um EF horizontal bleibe. Hiervon überzeugt

man sich, wenn man zusieht, ob die Luftblase ihren Stand behält, während man eine allmälige Drehung um EF vornimmt, oder ob das Fernrohr noch nach demselben Objecte weist, nachdem man dasselbe abgehoben und umgekehrt in die Lager gelegt, sowie das Instrument 180° um EF gedreht hat. Die eine Hälfte der bemerkten Abweichung wird durch die Fußschraube L, welche mit AB und CD in eine Verticalebene fällt, corrigirt, die andere aber durch die Schrauben 1, 2, 3, womit sich die Fernrohrträger verlängern oder verkürzen lassen. Bevor man 1, 2, 3 anzieht, sind jedoch die Schrauben c, d... zu lüften, damit sich die äußeren Theile dieser Träger an den inneren, mit EF fest verbundenen, verschieben lassen.

Bei dem Nivellirinstrumente in Fig. 129 mit fester Libelle

Fig. 130.



läßt sich die Prüfung des Parallelismus zwischen der Libellen- und der Fernrohraxe nur indirect bewirken. Wenn sowohl die Visiraxe als auch die Libellenaxe winkelrecht steht auf der Axe des Centralzapfens, so sind auch beide Linien mit einander parallel. Deshalb prüft man hier sowohl die Rechtwinkeligkeit der Libellenaxe gegen die Axe des Centralzapfens, als auch die der Visirlinie des Fernrohres gegen diese Axe, indem man zusieht, ob nach Drehung des Instrumentes um 180 Grad und Umlegen des Fernrohres, nicht allein die Luftblase in der Libelle ihren vorigen Stand wieder einnimmt, sondern auch das Fernrohr den erst anvisirten Punkt wieder pointirt; außerdem hat man die Luft-

blase mittels der Stellschraube der Libelle und ebenso, die Visirlinie mittels der Justirschrauben an den Armen des Fernrohrträgers um die Hälfte ihres Weges zurückzuführen.

Bei den neueren Instrumenten, zumal bei den Stampfer'schen, ist der eine Fernrohrträger mit einer besonderen Elevationsschraube S, Fig. 130, verbunden, und es wird hier durch dieselbe, für jede Visirlinie besonders, das feinere Einstellen der Libelle sammt Fernrohr bewerkstelligt, nachdem man schon vorher das Instrument durch die drei Fußschrauben annähernd horizontal gestellt hat. Ist der Schraubenkopf mit einer Eintheilung (Z) in hundert Theile versehen, so kann man diese Schraube auch noch zur Angabe kleiner Neigungswinkel und zur Bestimmung der Distanzen benutzen. Hat man einmal gefunden, daß u_1 Umdrehungen der Schraube S eine Neigung der Visirlinie von δ_1 Secunden entsprechen, so ist bei u Umdrehungen der entsprechenden Neigungswinkel $\delta = \frac{\delta_1}{u_1} u$ Secunden zu setzen. Ist ferner die Schraube S u_1 mal umzudrehen, um das Fadenkreuz an einer in der Entfernung e_1 aufgestellten Stange von einem Ende des Theiles h_1 dieser Stange bis zum anderen zu führen, und ist u die Umdrehungszahl beim Anvisiren eines Theiles h von einer in der Entfernung e vom Objectiv aufgestellten Stange, so hat man annähernd:

$$\frac{u}{u_1} = \frac{h}{e} \cdot \frac{e_1}{h_1}, \text{ daher } e = \frac{e_1 u_1}{h_1} \cdot \frac{h}{u}.$$

Z. B. Wenn die Schraube S, 6,36mal umzudrehen ist, damit das Fadenkreuz an einer in 500 Fuß Entfernung aufgestellten Stange einen Weg von 10 Fuß durchläuft, so hat man $\frac{e_1 u_1}{h_1} = \frac{500 \,.\, 6,36}{10} = 318$, und daher in anderen Fällen $e = 318 \cdot \frac{h}{u}$. Wäre z. B. für ein Zeichen $h = 5$ Fuß, $u = 4,25$ gefunden worden, so hätte man die entsprechende Entfernung desselben: $e = \frac{318 \,.\, 5}{4,25} = 374,1$ Fuß. Der Höhe $h = 10$ Fuß und Entfernung $e = 500$ Fuß entspricht übrigens ein Winkel von $206265'' \cdot \frac{h}{e} = 4125''$, daher ist auch für dieses Instrument: $\delta = \frac{4125'' \,.\, u}{6,36} = 648,6 \,.\, u$ Secunden, z. B. für 3,51 Umdrehungen der Elevationsschraube ist der Neigungswinkel

$$\delta = 648,6 \,.\, 3,51 = 2276,5 \text{ Sec.} = 0^0, 37', 56\tfrac{1}{2}''.$$

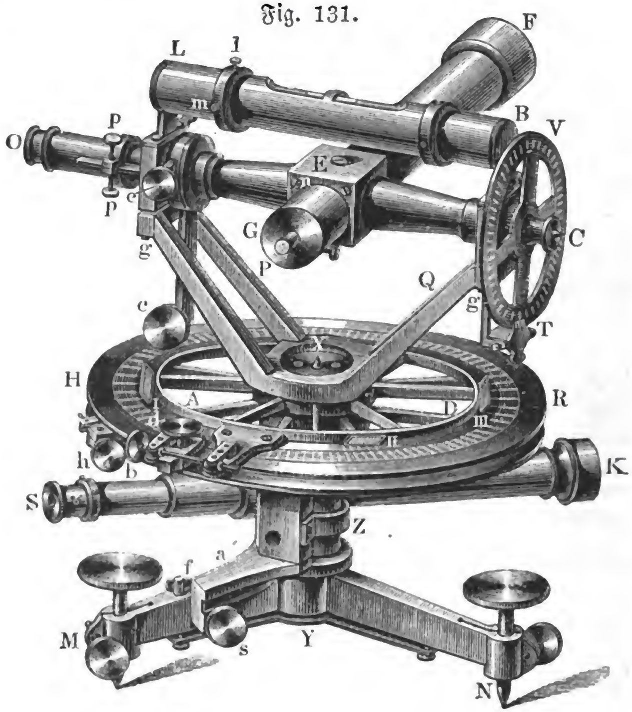
Um zu finden, ob der eine Faden des Fadenkreuzes horizontal und der andere vertical steht, dreht man bei richtig aufgestelltem Instrumente den Fernrohrträger etwas rechts und links, und sieht zu, ob dabei der anvisirte Punkt im horizontalen Faden bleibt.

Der senkrechte Stand der Nivellirstange wird am sichersten und bequemsten durch eine Dosenlibelle erkannt, die man zu diesem Zwecke auf ein an der Stange angebrachtes eisernes Postament stellt.

Das **Kathetometer** der Physiker ist ein an der Nivellirstange verschieb- und stellbares Nivellirinstrument.

§. 7. Der Theodolit. Ein größerer **Theodolit**, wie Fig. 131, besteht aus folgenden Haupttheilen. *HR* ist der mit

Fig. 131.



einer Gradeintheilung versehene Haupt- oder Horizontalkreis, *AD* der mit vier Vernieren I., II... versehene Alhidadenkreis; beide sind, jeder für sich, um eine verticale Axe *XY* drehbar, die zugleich Axe des Dreifußes *MNZ* ist. Mit der Alhidade fest verbunden ist der Fernrohrträger *PQ*, zwischen dessen gabelförmigen Enden die Drehungsaxe *OC* des Fernrohres *EF* ruht. An einem Ende *C* dieser Axe sitzt der Verticalkreis *VT* fest und auf den Stahlzapfen dieser Axe wird die Röhrenlibelle *LB* aufgesetzt. Am Körper *Z* des Dreifußes sitzt noch das Fiduz- oder Sicherheitsfernrohr *SK*, dessen genaue Einstellung auf irgend ein entferntes Object durch die Schraube *s* mittels eines Armes *a* und einer Feder *f* bewirkt wird. Um mit dem Instrumente auch Beobachtungen am Himmel anstellen, um namentlich wegen

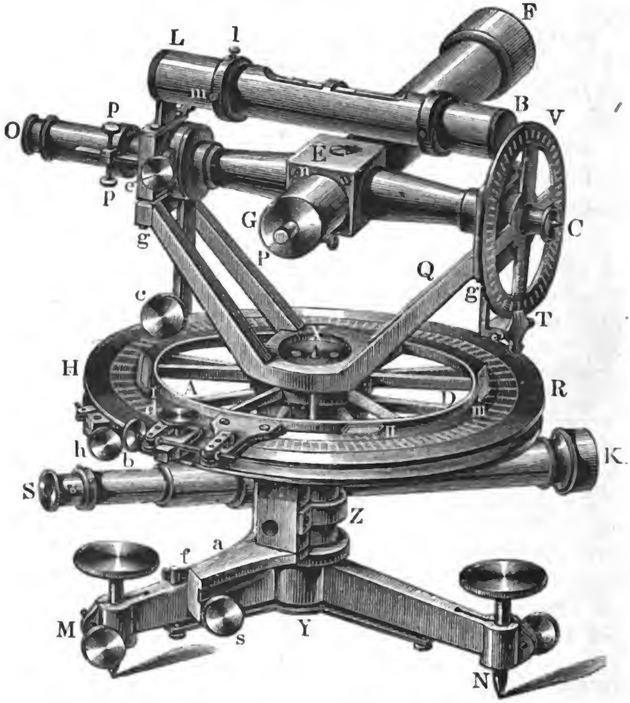
Zeit- und Meridianbestimmung, die Sonne, den Polarstern u. s. w. beobachten zu können, ist dasselbe mit einem gebrochenen Fernrohre versehen. Dasselbe enthält bei E ein Glasprisma, welches die einfallenden Lichtstrahlen so reflectirt, daß dieselben um einen Rechtwinkel abgelenkt und durch die hohle Umdrehungsaxe EO dem Auge vor O zugesendet werden. Das Gegengewicht G bezweckt das Balancieren des Fernrohres EF. Zum Feinstellen des Hauptkreises dient die Mikrometerschraube h, sowie zum Feinstellen der Alhidade die Mikrometerschraube b, und endlich zum genauen Einstellen des Höhenkreises, oder vielmehr des Horizontalfadens vom Fadenkreuze wird die Schraube c angewendet; vorher sind natürlich die Preßschrauben, wie z. B. d oder e, anzuziehen.

Es ist nöthig, daß die Libellen- und die Fernrohraxe auf den Umdrehungsaxen des Haupt- und Alhidadenkreises rechtwinkelig stehen, und deshalb Folgendes zu prüfen. Man bringe zunächst durch Drehung des Grund- oder Alhidadenkreises die Libellenaxe mit der Axe eines der drei Füße, z. B. ZN, in einerlei Verticalebene und stelle an der entsprechenden Fußschraube N so lange, bis die Blase einspielt. Nach diesem drehe man den Grund- oder den Alhidadenkreis um 90 Grad, so daß die Libellenaxe mit der Linie durch die beiden andern Fußschrauben parallel zu stehen kommt, und stelle an den beiden andern Schrauben so lange als nöthig, damit die Blase abermals einspiele. Nun führe man die Libelle auf den ersten Stand zurück, sehe zu, ob die Blase noch einspielt, und helfe, wenn noch etwas fehlt, an der darunter befindlichen Fußschraube N nach, bis das genaue Einspielen erlangt ist. Hebt man nun die Libelle ab, und setzt sie umgekehrt auf die Fernrohrzapfen, so muß ihre Blase den vorigen Stand wieder einnehmen. Außerdem ist an der Schraube l nachzuhelfen, durch welche die Glasröhre der Libelle auf der einen Seite niedergedrückt werden kann, während eine Stahlfeder unter dieser Röhre diese zu heben sucht. Sollte die Blase ihren Ort ändern, wenn man die Libelle um die Zapfenaxe rechts und links dreht, so ist die Glasröhre auch noch durch eine Schraube m etwas seitwärts zu stellen. Auf diese Weise ist der Parallelismus zwischen der Libellenaxe und den Zapfenumfängen von OC zu bewirken, und sind nun beide Zapfen von vollkommen gleicher Stärke, so hat man hierdurch auch den Parallelismus und die Horizontalität der Libellenaxe und der Drehungsaxe des Fernrohres hergestellt. Um sich aber von der Gleichheit der Zapfenstärken zu überzeugen, darf man nur das Fernrohr ausheben und mit verwechselten Zapfen in die Lager legen; stellt sich dann die Luftblase der von neuem aufgesetzten Libelle wieder in die Mitte, so bleibt hierbei nichts zu wünschen übrig.

Dreht man nun die Alhidade um zwei Rechtwinkel und findet hierbei, daß die Blase der Libelle ihren Stand behält, so ist dies ein Beweis, daß die Libellenaxe auf der Drehungsaxe

der Alhidade rechtwinkelig steht, außerdem aber muß man die Abweichung zur einen Hälfte durch die Schraube N und zur anderen Hälfte durch die Zug- und Druckschrauben g... aufheben. Dieselbe Prüfung hat man auch noch mit der Axe des Hauptkreises vorzunehmen, indem man zusieht, ob die Libellenblase ihren Stand nicht ändere, wenn man den Hauptkreis um 180 Grad dreht, so daß das entgegengesetzte Ende L der Libelle über die Fußschraube N zu stehen kommt. In der Regel giebt es hierzu an dem Theodoliten keine Correctionsschrauben; wenn jedoch der Künstler dafür sorgt, daß sowohl die Ebene der Alhidade

Fig. 132.



als auch die des Hauptkreises auf ihrer Umdrehungsaxe rechtwinkelig steht, so muß bei vollständiger Berührung beider Ebenen auch ein Zusammenfallen beider Umdrehungsaxen in XY stattfinden.

Die *optische Axe* des Fernrohres muß natürlich auf der *Drehungsaxe* desselben *rechtwinkelig* stehen. Um dies zu prüfen, kann man das Fernrohr ausheben und umgekehrt in die Lager legen, nämlich so, daß nun jeder Zapfen in ein anderes Lager kommt; ist dann das Fernrohr nach demselben Punkte gerichtet, so ist auch jene Rechtwinkeligkeit vorhanden. Oder man drehe die Alhidade genau um 180 Grad, kippe das Fernrohr und sehe zu, ob es wieder genau das erst anvisirte Object ein-

schneidet; in diesem Falle entspricht es ebenfalls der gemachten Forderung. Hält das Instrument diese Prüfung nicht aus, so muß man das im Würfel E eingeschlossene Glasprisma mittels der drei Druck- und Zugschrauben n ... in demselben so viel verrücken, daß das Fadenkreuz die Mitte der gefundenen und etwa an einer verticalen Wand angegebenen Abweichung deckt. Natürlich wird auch diese Prüfung so oft wiederholt, bis die Abweichung ganz verschwindet. Um sich endlich noch zu überzeugen, daß der verticale Faden des Fadenkreuzes auch wirklich vertical stehe, sehe man zu, ob beim Kippen des Fernrohres der anvisirte Punkt immer von diesem Faden gedeckt werde. Ist dies nicht der Fall, so corrigire man an den bekannten Schrauben p, p.

Noch hat man zu untersuchen, ob sich die Alhidade centrisch über dem Hauptkreise drehe. Hierzu ist nöthig, daß die Alhidade mindestens zwei diametral einander gegenüberliegende Verniers enthalte. Giebt der eine Vernier stets genau denselben Werth für einen und denselben Winkel wie der andere, so ist ein solcher Excentricitätsfehler nicht vorhanden. Außerdem aber muß man, um den richtigen Werth des anvisirten Winkels zu erhalten, aus den von beiden Vernieren angegebenen Winkeln das arithmetische Mittel nehmen.

Beim Ablesen der Winkel ist zu beachten, daß der Vernier einen Theil mehr enthält als ein gleich langer Bogen des Hauptkreises, und daß durch denselben mittelbar jeder Theil der Haupteintheilung in so viele feinere Theile getheilt wird, als er Theile enthält. Wenn z. B. der Vernier 14 Theile des Hauptkreises einnimmt, ein Theil des Hauptkreises aber $\frac{1}{4}$ Grad $= 15$ Minuten ist, so giebt der Vernier die Winkel bis auf $\frac{1}{15} . 15$ Minuten $= 1$ Minute genau an. Wenn er dagegen 59 Theile der Haupttheilung, jeder zu $\frac{1}{6}$ Grad $= 10$ Minuten, umfaßt und in 60 Theile getheilt ist, so lassen sich an ihm die Winkel bis auf $\frac{1}{60} . 10$ Minuten $= \frac{1}{6}$ Minute $= 10$ Secunden genau angeben.

Um beim Arbeiten am Theodoliten eine größere Genauigkeit zu erlangen, ist eine Repetition oder Multiplication der Beobachtungen nöthig. Hat man $n$mal repetirt, dabei also den Alhidadenkreis $n$mal um den zu messenden Winkel gedreht, hierbei aber u vollständige Umdrehungen gemacht und zuletzt den Winkel α abgelesen, so ist der gesuchte Winkel zu setzen:

$$\varphi = \frac{360^0 . u + \alpha^0}{n}.$$

Z. B. Man hat beobachtet, nach dreifacher Repetition und bei einmaliger Umdrehung:

am Vernier I. $\alpha = 141^0, 30', 40''$, und
am Vernier II. $\alpha = 321^0, 30', 50''$;

wenn aber dieser anfangs auf $180^0, 0', 20''$ stand, so folgt nach ihm $\alpha = 321^0, 30', 50'' - 180^0, 0', 20'' = 141^0, 30', 30''$, daher im Mittel $\alpha = 141^0, 30', 35''$, und endlich der gesuchte Winkel:

$$\varphi = \frac{360^0 . 1 + 141^0, 30', 35''}{3} = \frac{501^0, 30', 35''}{3} = 167^0, 10', 11^2/_3''$$

Um die Genauigkeit der Winkelmessung zu erhöhen, wiederholt man noch die Winkelmessung, nachdem man das Fernrohr zwischen seinen Trägern durchgeschlagen hat; macht z. B. 2 bis 3 Beobachtungen vor und ebenso viel nach dem Durchschlagen des Fernrohres.

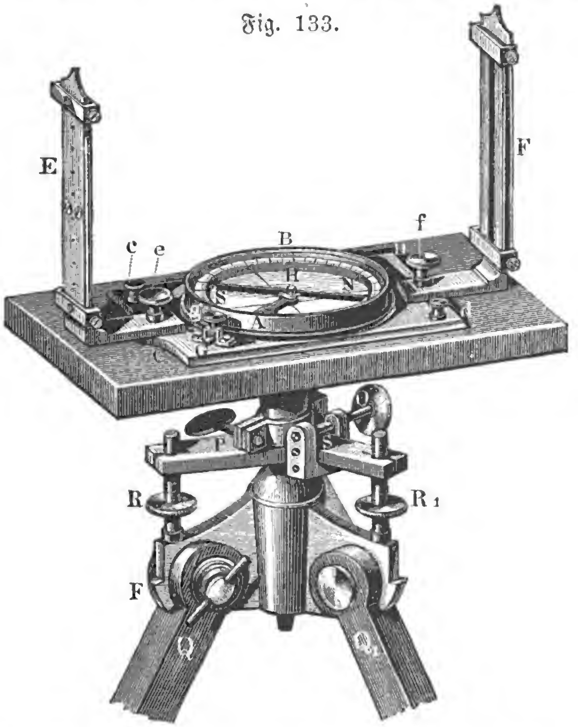
Was endlich den Vertical- oder Höhenkreis anlangt, so ist dieser in Hinsicht auf den Collimations- oder Inderfehler, nämlich darauf zu prüfen, ob der Vernier T desselben auf Null steht, wenn das Fernrohr horizontal gerichtet ist. In dieser Absicht stellt man das Fernrohr so, daß T Null anzeigt, und visirt hierbei ein Object an; dann dreht man die Alhidade AD um 180°, kippt das Fernrohr und stellt es so, daß der Vernier T am Höhenkreise 180° anzeigt. Deckt nun das Fadenkreuz wieder genau dasselbe Object, so ist ein Inderfehler nicht vorhanden; ist es aber nach einem anderen Objecte gerichtet, so halbirt man die Abweichung und dreht den Höhenkreis so viel, daß das Fernrohr nach der Mitte der Abweichung weist. Dieses Geschäft ist natürlich so oft zu wiederholen, bis sich keine Abweichung mehr zeigt.

§. 8. Boussolen. Man hat Feldmesser-, Markscheider-, Schiffer-, Orientir- und Handboussolen. Hier ist jedoch nur von der ersteren die Rede. Die Feldmesserboussole ist eine Verbindung aus einer Boussole und einem Visirlineale, und wird wie ein Menselblatt auf ein gewöhnliches Meßtischstativ aufgeschraubt. Fig. 133 auf nebenstehender Seite führt eine solche Boussole AB mit Dioptern vor Augen. Die Diopter E und F sind mittels der Schrauben e und f auf die Boussolenplatte und diese ist wieder mittels der Schrauben c und d auf das Holzblatt CD aufgeschraubt. Die Magnetnadel SN dreht sich mit ihrem Hütchen H auf einem Stahlstifte und läßt sich mittels eines Hebels GH durch eine Schraube g arretiren, d. i. abheben und gegen den Glasdeckel andrücken. Die Horizontalstellung erfolgt durch die drei Stellschrauben R, R_1, R_2, welche oben durch drei Arme hindurchgehen und unten in drei Pfannen ruhen. Letztere sitzen auf den drei Lappen oder Flügeln des Stativkörpers, an welchen auch die Stativbeine Q, Q_1, Q_2 angebolzt sind. Zum Richten der Boussole dient endlich die Schraube ohne Ende SO, welche jedoch nicht eher in Bewegung zu setzen ist, als nachdem man die Preßschraube P angezogen hat.

Die Magnetnadel giebt unmittelbar den Winkel an, um welchen der magnetische Meridian von der Visirebene abweicht; da man aber durch dieselbe das Entgegengesetzte, nämlich die Abweichung der Visirebene vom magnetischen Meridian angeben will, so versieht man die Boussole mit einer entgegengesetzt laufenden Eintheilung. Um den Winkel zwischen zwei Visirlinien zu erhalten, zieht man ihre von der Nadel angegebenen Ab-

weichungs=, Streich= oder Azimuthalwinkel von einander ab, und zwar ſtets den der links liegenden Linie von der mehr rechts gerichteten. Iſt der erſtere größer als der letztere, ſo vergrößere man ihn um 360°. Wenn z. B. der Azimuthalwinkel der mehr

Fig. 133.



links liegenden Viſirlinie 321°,3 und der der mehr rechts liegenden 35°,7 iſt, ſo hat man den Winkel zwiſchen beiden Linien = 360° + 35°,7 — 321°,3 = 395°,7 — 321°,3 = 74°,4.

Die Bouſſole hat vor den anderen Winkelmeßinſtrumenten den Vorzug, daß ſie nicht fordert, im Scheitel des zu meſſenden Winkels, ſondern auch geſtattet, irgendwo in den Schenkeln deſſelben aufgeſtellt zu werden. Iſt zu befürchten, daß nahe gelegene Eiſenmaſſen die Richtung der Magnetnadel abändern, ſo iſt allerdings das Aufſtellen der Bouſſole im Scheitel des zu meſſenden Winkels eine nothwendige Bedingung. Die Genauigkeit, und deshalb auch der Werth der Bouſſolenmeſſungen wird durch die täglichen Veränderungen der magnetiſchen Declination ſehr beeinträchtigt. In der Regel iſt dieſe Declination gegen 8 Uhr Morgens am kleinſten und gegen 1 Uhr Mittags am größten. Es bewegt ſich alſo die Nordſpitze der Magnetnadel innerhalb dieſer Zeit von Oſt nach Weſt, und ſpäter wieder denſelben Weg zurück, alſo von Weſt nach Oſt. Des Nachts iſt die Bewegung der gewöhnlichen Magnetnadel faſt Null, und daher die beſte

Zeit zum Messen mit der Boussole, dagegen die Zeit zwischen 8 und 1 Uhr des Tages hierzu die ungeeignetste. Nur bei aufgehangenen Magnetnadeln hat man beobachten können, daß auch zur Mitternachtszeit die Magnetnadelrichtung noch eine kleine Schwankung erleidet. Diese tägliche Variation der Magnetrichtung ist auch in verschiedenen Monaten sehr verschieden, meist im December am kleinsten und im April am größten; nach den Göttingischen Beobachtungen beträgt sie jetzt im April 10 bis 15 Minuten, im December nur 3 bis 4 Minuten, im Mittel des Jahres aber 9 bis 10 Minuten. Ausnahmsweise ist die Variation so unregelmäßig, daß die Declination Vormittags größer als Nachmittags ausfällt; nach den Göttinger Beobachtungen kommen solche Fälle vorzüglich im November, December und Januar, und im Mittel jährlich nur 4mal vor. Meteorologische Erscheinungen, wie z. B. Nordlichter, haben auf die Richtung des Magnetes besondere Einflüsse, und es ändert sich dieselbe hierbei oft um mehrere Grade. Uebrigens nimmt bei uns in Deutschland die mittlere Declination jährlich ab; in Göttingen war sie 1834: 18°, 41′; 1844 aber nur noch 17°,47′; nach Goldschmidt läßt sich für das Jahr 1834 + t die mittlere Magnetdeclination setzen:

$$\delta = 18^0, 41', 35'', 56 - 3', 7'', 77 . t - 0', 14'', 61\, t^2,$$

westlich, z. B. für 1860, und natürlich nur für Göttingen:

$$\delta = 18^0, 41', 35'', 56 - 3', 7'', 77 . 26 - 0', 14'', 61 . 676$$
$$= 18^0, 41', 35'', 56 - 1^0, 21', 20'', 2 - 2^0, 44', 36'', 36$$
$$= 14^0, 35', 39'', 0.$$

An der Boussole sind folgende Prüfungen zu machen nöthig. In der Regel ist zu erwarten, daß der Limbus derselben richtig in ganze oder halbe Grade eingetheilt sei. Uebrigens kann aber die Spitze des Stiftes zu dem Limbus nicht richtig centrirt sein. Dies zeigt sich, wenn die beiden Enden der Nadel nur bei zwei Stellungen der Boussole um 180°, bei den übrigen Stellungen aber bald mehr, bald weniger von einander abweichen. Nimmt man dann aus den Winkelangaben beider Spitzen das arithmetische Mittel, so bekommt man den richtigen, d. i. von dem Einflusse dieses Fehlers befreiten Winkel. Es können aber auch die beiden Endspitzen der Nadel mit dem Drehungspunkte derselben nicht in eine gerade Linie fallen. Dies erkennt man, wenn die Abweichung beider Spitzen von einander nicht 180° und stets dieselbe ist, man mag die Boussole drehen wie man will. Die Winkel zwischen je zwei Visirlinien giebt eine solche Nadel richtig an; nur die Abweichungen dieser Linien von dem magnetischen Meridiane werden von ihr unrichtig angezeigt. Es versteht sich übrigens von selbst, daß bei horizontaler Aufstellung der Boussole die Nadelspitzen in der Ebene des Limbus spielen müssen.

Man hat ferner die Nadel in Hinsicht ihrer Empfindlichkeit zu prüfen, und in dieser Absicht dieselbe bei verschiedenen Stellungen durch Annäherung von Eisen in Bewegung zu setzen.

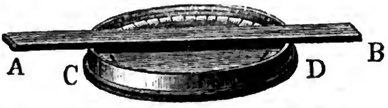
Geräth sie hierdurch in lebhafte Schwingungen, und werden dieselben nach Wegnahme des Eisens allmälig kleiner und kleiner; gelangt sie ferner erst nach längerer Zeit in Ruhe und nimmt hierbei genau den ersten Stand wieder an, so bleibt hierin nichts zu wünschen übrig. Außerdem aber hat sich entweder die Spitze des Stiftes abgestumpft, oder es ist die magnetische Kraft der Nadel zu schwach. Meist tritt das Erstere ein, und es ist dann der Stift wieder spitzer zu schleifen; im anderen Falle hat man die Nadel frisch zu magnetisiren.

Man hat ferner zu untersuchen, ob in dem Boussolengehäuse keine Eisentheile enthalten sind; denn diese geben der sich ihnen sehr nähernden Nadel eine andere Richtung. In der Absicht dies zu prüfen, nähert man die Boussole der auf einem Stifte außerhalb der Boussole aufgestellten Nadel von allen Seiten und sieht zu, ob dieselbe dabei ihre Richtung behält. Noch sicherer prüft man auch, wenn man die Boussole wiederholt um denselben Winkel und so nach und nach im Kreise herumdreht, und dabei zusieht, ob ihre Nadel stets dieselbe Winkelgröße anzeigt.

Es ist auch wie bei jedem Visirlineale zu untersuchen, ob die Visirebene auf der Ebene des Limbus winkelrecht steht. Man stellt deshalb die Dosenlibelle auf den Limbus und bringt diesen durch die Stativschrauben R, R_1 und R_2 in eine horizontale Lage; hierauf visirt man ein ausgehängtes Loth an, und sieht zu, ob dies von dem Faden im Objectivdiopter gedeckt wird. Ist dies nicht der Fall, so sind die Diopterblätter durch die Seitenschrauben zu verrücken. Da man beim Arbeiten mit der Boussole die Libelle auf den Glasdeckel stellt, so muß man natürlich auch untersuchen, ob dessen äußere Fläche mit dem Limbus parallel läuft. Uebrigens wird natürlich durch die Magnetnadel selbst der horizontale Stand der Boussole ungefähr mit angezeigt.

Damit die Boussole die richtigen Azimuthalwinkel der Visirlinien in Hinsicht auf den magnetischen Meridian angebe, ist nöthig, daß die Visirebene durch 0° und 180° der Eintheilung gehe. Diese Prüfung vollzieht man ähnlich wie die eines Diopterlineales in Hinsicht auf das Zusammenfallen der Visirebene mit der Kante des Lineals. In dieser Absicht verbinde man ein Lineal wie AB, Fig. 134, mit der Boussole CD so, daß der Stand desselben genau durch 0° und 180° geht, und prüfe nun das Zusammenfallen von

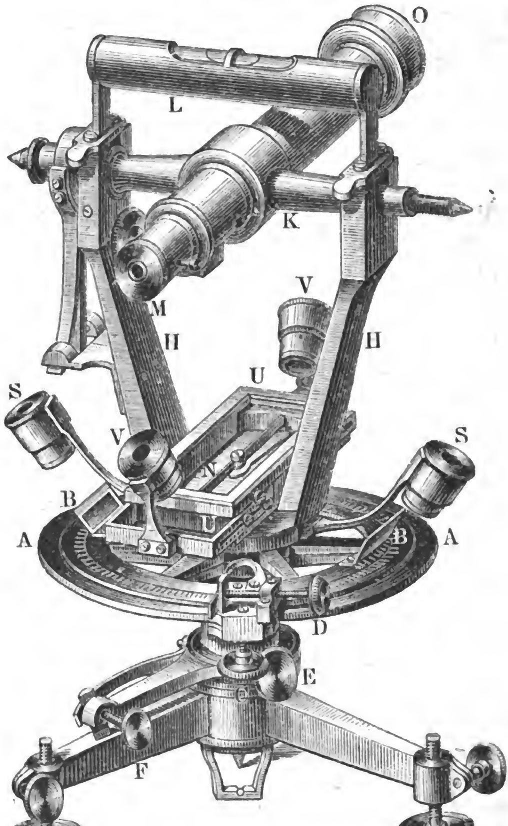
Fig. 134.



AB und der Visirebene durch Aufstellen und Umhängen an zwei Armen, genau wie beim Diopterlineal (s. §. 4). Endlich soll noch die Ebene des Limbus oder die des Glasdeckels winkelrecht stehen auf der verticalen Axe des Stativhalses; was man durch Beobachtung der auf dem Glasdeckel aufgestellten Libelle während einer Umdrehung um diese Axe leicht prüft.

§. 9. Bei den gewöhnlichen terrestrischen Messungen leistet ein kleiner Theodolit mit Magnetnadel, ein sogenannter **Magnettheodolit**, vortreffliche Dienste. Ein solcher Theodolit hat ein gerades Fernrohr und enthält zwischen seinen Trägern ein Gehäuse, worin eine Magnetnadel eingeschlossen ist, durch welche das Streichen oder die Abweichung jeder Visirlinie vom magnetischen Meridian angegeben wird. Die Einrichtung eines solchen Instrumentes ist aus der monodimetrischen Abbildung in Fig. 135

Fig. 135.



zu ersehen. Es ist *AA* der in Drittelgrade eingetheilte Hauptkreis, *BB* die in demselben drehbare Alhidade mit zwei Nonien, woran die Winkel bis auf Minuten genau abgelesen werden können; ferner *C* die Preß- und *D* die Feinstellschraube für die Alhidade, sowie *E* die Preß- und *F* die Feinstellschraube für den Hauptkreis. Die Libelle *L* steht auch hier auf der Drehungsaxe *K* des Fernrohres *MO*. Das parallelepipedische Gehäuse *UU* sitzt zwischen den Trägern *HH* fest, enthält die Magnetnadel *N* und umschließt zwei Bänkchen, auf welchen zwei

als Inderlinie dienende und einander diametral gegenüberliegende Striche eingeritzt sind. Die Loupen *SS* dienen zum genauen Ablesen der Winkel auf dem Hauptkreise, sowie die Loupen *VV* zur Beobachtung der Spitzen der Magnetnadel, beim Einstellen derselben auf die gedachten Marken.

Das Messen der Winkel mit Hülfe des Hauptkreises *AA* erfolgt auf die bekannte Weise. Man stellt die Alhidade auf Null, richtet das Fernrohr durch Drehung des Hauptkreises auf das eine und nachher durch Drehung der Alhidade auf das zweite Object. Die letztere durchläuft hierbei auf dem Hauptkreise den nun abzulesenden Horizontalwinkel zwischen beiden Objecten. Beim Messen eines **Streich-** oder **Azimuthalwinkels** mit Hülfe der **Magnetnadel** vertritt die Einstellung der Magnetnadel das Visiren nach dem ersten Objecte. Hier stellt man zwar ebenfalls die Alhidade erst auf Null, dreht aber nachher den Hauptkreis so, daß die Magnetnadel auf der Inderlinie im Gehäuse einspielt. Richtet man dann das Fernrohr durch Drehung der Alhidade nach dem Objecte, dessen Lage gegen die Magnetrichtung angegeben werden soll, so giebt der Nonius den gesuchten Streichwinkel auf dem Hauptkreise an. Um eine größere Genauigkeit zu erlangen, wird diese Winkelmessung nochmals wiederholt, indem man durch Drehung des Hauptkreises die Magnetnadel wieder zum Einspielen bringt, das Fernrohr durch Drehung der Alhidade wieder nach dem Objecte richtet u. s. w. Dividirt man den zuletzt abgelesenen Winkel durch die Anzahl der Beobachtungen u. s. w. (s. §. 7), so erhält man im Quotienten den gesuchten Streichwinkel, den man endlich noch um die bekannte Declination der Magnetnadel zu vermindern hat, um das wahre Streichen oder Azimuth, d. i. die Abweichung der Horizontalprojection der Visirlinie von der Mittagslinie zu bestimmen.

Damit der Magnettheodolit den richtigen Winkel angebe, welchen eine Visirlinie mit dem magnetischen Meridian einschließt, ist nöthig, daß die optische Are des Fernrohres mit der Inderlinie im Gehäuse der Magnetnadel in einer und derselben Verticalebene liege, oder daß wenigstens der Inderfehler, d. i. die Abweichung der Inderlinie von der Visirebene des Fernrohres bekannt sei. Um dies zu prüfen oder diesen Fehler kennen zu lernen, untersucht man, ob sowohl die Verticalebene durch die Visirlinie als auch die durch die Inderlinie auf der Drehungsare des Fernrohres rechtwinkelig steht. In ersterer Hinsicht prüft man das Instrument durch Umlegung des Fernrohres in seinen Trägern; weist das Fernrohr nach diesem Umlegen wieder auf das erst anvisirte Object, so ist der ersteren Forderung Genüge geschehen; außerdem muß man das Fadenkreuz so viel verstellen, daß es einen Punkt mitten zwischen beiden anvisirten Objecten deckt. In der zweiten Rücksicht prüft man auf ähnliche Weise; man legt eine genau in die Fernrohrträger passende Umdrehungsare in diese Träger ein, befestigt in der Mitte derselben einen in eine Spitze auslaufenden Zeiger, stellt diese Spitze genau über

den einen Strich der Inderlinie und sieht nun zu, ob nach gehöriger Drehung dieser Axe diese Spitze auch auf den zweiten Strich der Inderlinie fällt. Findet ein solches Zusammenfallen nicht statt, so hat das Instrument einen Inderfehler, welcher durch die Hälfte der zuletzt gefundenen Abweichung gemessen wird.

Zu der richtigen Angabe der Streichwinkel durch den Magnettheodoliten gehört natürlich auch noch, daß die magnetische Axe der Magnetnadel durch die Enden und durch die Spitze des Stiftes der Nadel gehe. Um sich hiervon zu überzeugen, ist es nöthig, daß man die Nadel von dem Hütchen abheben und nach vollbrachter Umkehrung wieder auf dasselbe aufschieben könne. Zeigt nach dieser Umkehrung die Nadel wieder auf den ersten Punkt, so entspricht dieselbe auch der letzten Forderung. Natürlich muß bei einem Magnettheodoliten alles Eisen vermieden, müssen also die gewöhnlichen Stahlaxen und Stahlfedern durch Axen und Federn aus Argentan u. s. w. ersetzt sein.

Um mittels eines solchen Theodoliten auch Höhenwinkel messen zu können, ist es noch nöthig, einen Verticalkreis auf die Umdrehungsaxe des Fernrohres zu schieben.

Man kann auch dieses Instrument zu Beobachtungen am Himmel, zu Zeit- und Meridianbestimmungen, sowie zu unterirdischen Messungen gebrauchen, wenn man es noch mit einem excentrischen Fernrohr versieht, und sich bei dergleichen Messungen eines prismatischen Oculars bedient. Dieses Fernrohr befindet sich außerhalb seiner Träger und gestattet deshalb, in Vereinigung mit dem gedachten als Spiegel dienenden Ocular, Beobachtungen bei jeder beliebigen Elevation und Depression. Um die beobachteten Winkel auf das Centrum zu reduciren, schlägt man noch das Fernrohr um, bringt es auf die entgegengesetzte Seite des Hauptkreises und wiederholt die ersten Beobachtungen bei dieser zweiten Fernrohrstellung: das arithmetische Mittel aus den Angaben beider Messungen ist dann der gesuchte, auf das Centrum des Hauptkreises reducirte Winkel.

§. 10. Conservation der Instrumente. Es versteht sich von selbst, daß man alle Stöße und gewaltsamen Bewegungen an den Meßinstrumenten vermeiden, daß man zumal die eingetheilten Kreise, Fernröhre, Libellen u. s. w. möglichst schonen muß, z. B. das Instrument nicht an ersteren heben darf. Uebrigens sind Staub und Sand den Instrumenten besonders schädlich. Da aber während des Arbeitens das Ansetzen desselben, namentlich bei Wind, unvermeidlich ist, so muß man denselben oft durch Pinsel, feine Bürsten oder einen leinenen Lappen zu entfernen suchen. Um den Regen, zumal aber um den Sonnenschein abzuhalten, soll man, namentlich bei Arbeiten mit dem Theodoliten oder mit dem Libellenniveau, unter einem Schirme oder Zelte arbeiten.

Ferner sind zur Verhinderung des starken Abführens Schmiermittel jedoch nur mit großer Sorgfalt in Anwendung zu

bringen. Die Stahlzapfen von Theodoliten, die Ringe von Nivellirfernröhren u. s. w. sind mit ganz reinem Uhrmacher- oder Ochsenklauen-Oel, welches keine Oxydation verursacht, zu befeuchten. Uebrigens hat man noch die sogenannte harte und weiche Schmiere in Anwendung zu bringen. Jene besteht aus 3 Theilen Rindstalg und 1 Theil gelbem Wachse, und wird vorzüglich da gebraucht, wo sich kleine Flächen mit starkem Drucke über einander bewegen. Die andere hingegen wird aus Talg und wenig, aber ganz reinem Baumöl zusammengesetzt, so daß sie kalt, etwas fester als Schweinefett ausfällt, und dient besonders zum Einschmieren größerer Flächen. Die Schrauben ohne Ende bei Meßtischen z. B. sind mit harter Schmiere zu behandeln; bei Preßringen, Kippregelaxen u. s. w. hingegen ist die weiche Schmiere in Anwendung zu bringen. Es versteht sich von selbst, daß das Reinigen dem Einschmieren vorausgehen muß.

Die Gläser an den Fernröhren sind ebenfalls von Zeit zu Zeit mit ganz reinen feinen Lappen abzuwischen. Es ist aber rathsam, das Instrument nach Einsetzen der Gläser von Neuem zu prüfen.

Zweites Capitel.

Formeln und Regeln.

---

§. 11. **Messmethoden.** Die erste und Hauptaufgabe der Meßkunst besteht in der Angabe der Lage und Entfernung eines oder mehrerer Punkte in Hinsicht auf einen anderen als gegeben anzusehenden Fixpunkt. Die Auflösung dieser Angabe zerfällt wieder in zwei Theile, in die Bestimmung der Projectionen der Punkte in einer und derselben Horizontalebene, und in die Ausmittelung der Höhen oder Abstände der Punkte von dieser Ebene. Bei den ersten Angaben kommt der Horizontalkreis des Theodoliten, die Boussole und der Meßtisch mit Visirlineal, bei der zweiten das Luftblasenniveau und der Höhenkreis des Theodoliten zur Anwendung.

Bei kleineren Aufnahmen kann man annehmen, daß der natürliche oder wahre Horizont mit der Horizontalebene eines Punktes des Terrains der Aufnahme zusammenfalle, und deshalb ohne Weiteres die im Folgenden angegebenen Regeln und Formeln zur Anwendung bringen. Inwiefern bei Aufnahmen von größerer Ausdehnung auf die Krümmung der Erdoberfläche, Depres-

sion des wahren Horizontes u. s. w. Rücksicht zu nehmen ist, wird später (§. 19) angegeben.

Bei den Horizontalmessungen kommt vor Allem die Methode des Basirens oder Triangulirens in Anwendung; die zweite Methode, das Peripherisiren oder Umfangsmessen, nur beim Mangel an freier Aussicht. Das Wesen des Triangulirens besteht darin, daß man die Punkte, deren relative Lage ermittelt werden soll, durch Dreiecke verbindet, eine Seite von einem dieser Dreiecke, die Basis, sowie die sämmtlichen Winkel der letzteren genau ausmißt und nun die übrigen Seiten, gewöhnlich durch Rechnung mit Hülfe des bekannten Sinussatzes (s. theoretische Geometrie, §. 6), bestimmt; um dagegen die relative Lage von Punkten durch Peripherisiren zu ermitteln, verbindet man dieselben nur durch gerade Linien, ermittelt die Richtungen und mißt die Längen derselben unmittelbar aus.

Was die Richtungsangabe der Seiten der Umfangsmessung betrifft, so geschieht dies entweder dadurch, daß man die Winkel zwischen den zusammenstoßenden Seiten, oder daß man Streichwinkel der einzelnen Seiten, d. i. ihre Abweichungen von der Magnetrichtung, ausmißt.

Zu allen diesen Messungen gehört noch, daß man sie mittels Coordinaten auf einen festen Punkt und auf die Mittagslinie desselben beziehe. Es ist daher auch nach einer der in §. 15 angegebenen Methoden vorerst diese Mittagslinie zu bestimmen und nach Befinden auf dem Terrain zu fixiren (s. neue Markscheidekunst Abthl. I., §. 33). Nun kann man das Azimuth oder wahre Streichen der durch den Anfangspunkt der Mittagslinie gehenden Seite der Messung direct messen, und hieraus wieder mittels einfacher Addition und Subtraction der gemessenen Dreiecks- oder Umfangswinkel die Streichwinkel der übrigen Seiten berechnen. Bei den Umfangsmessungen, wobei die Magnetnadel zur Anwendung kommt, hat man die wegen Veränderlichkeit der Magnetrichtung allerdings nicht scharf anzugebenden magnetischen Streichwinkel durch Subtraction der Declination der Magnetnadel in wahre Streich- oder Azimuthalwinkel zu verwandeln.

Sind die Seiten einer nach der einen oder anderen Methode vollzogenen Aufnahme AB, BC, $CD\ldots$, Fig. 136, s_1, s_2, $s_3\ldots$ und ihre Streichwinkel, oder die Winkel, welche dieselben mit der Mittagslinie AN einschließt, β_1, β_2, $\beta_3\ldots$, so hat man die Lage des Endpunktes F in Hinsicht auf den Anfangspunkt und in Hinsicht auf die Mittagslinie AN und Westostlinie AO bestimmt durch die Coordinaten

$$AF_1 = F_2F = x = s_1 \cos.\beta_1 + s_2 \cos.\beta_2 + s_3 \cos.\beta_3 + \cdots,$$

und

$$AF_2 = F_1F = y = s_1 \sin.\beta_1 + s_2 \sin.\beta_2 + s_3 \sin.\beta_3 + \cdots,$$

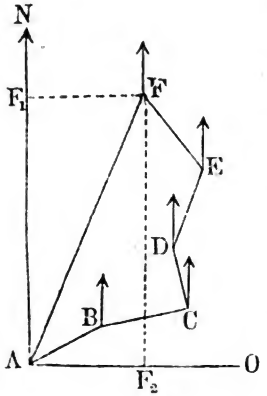
sowie die Größe und Richtung der Verbindungslinie mittels der Formel

$$AF = s = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\cos.\beta} = \frac{y}{\sin.\beta}$$ und

$tang. NAF = tang. \beta = \frac{y}{x}$, (s. theoretische Geometrie §. 7).

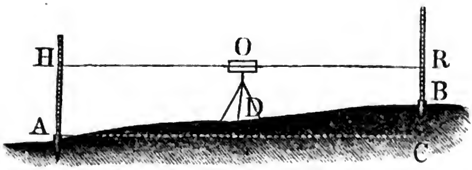
Dieselben Formeln hat man auch anzuwenden, wenn es sich darum handelt, die Lage anderer Punkte, wie z. B. C und F, gegen einander anzugeben. Es sind dann bei Bestimmung von x und y nur diejenigen Seiten in Rechnung zu bringen, welche zwischen den in Rede stehenden Punkten liegen.

Fig. 136.



Was die Höhenangaben betrifft, so werden dieselben am sichersten durch directes Nivelliren mit Hülfe des Luftblasenniveaus erlangt. Um auf diesem Wege die Höhe eines Punktes A über oder unter einem Punkte B, Fig. 137, zu finden, stellt man das Nivellirinstrument

Fig. 137.



OD zwischen beide Punkte, und zwar am besten in gleichen Entfernungen von denselben, und richtet das horizontale Fernrohr O desselben sowohl nach einer in A als auch nach einer in B senkrecht aufgestellten Nivellirstange. Die Differenz zwischen den abgelesenen Höhen, $AH = z_1$ und $BR = z_2$, ist dann die gesuchte Höhe des Punktes B über A, d. i.

$$h = z_1 - z_2$$

Sind die Punkte A und B entfernt von einander, so muß man Zwischenpunkte annehmen und ein zusammengesetztes Nivellement anwenden.

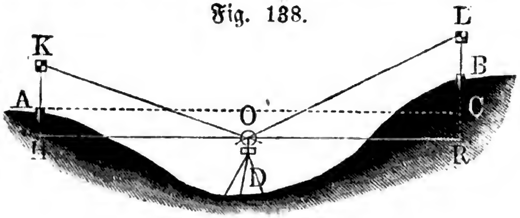
Bezeichnen $h_1, h_2, h_3 \ldots$ die Höhen, welche bei den einfachen, durch je einen Zwischenpunkt verbundenen Nivellements gefunden worden sind, so hat man den ganzen Höhenunterschied zwischen dem Anfangs- und Endpunkt des ganzen Nivellements

$$h = h_1 + h_2 + h_3 + \cdots$$

Natürlich ist bei allen diesen Rechnungen auf Plus und Minus gehörig Rücksicht zu nehmen, namentlich die Höhe eines Punktes, welcher tiefer als der nächst vorhergehende liegt, negativ in Rechnung zu bringen.

Bei großen Höhenunterschieden ist das unmittelbare Nivellement nicht immer anwendbar, und deshalb die Beobachtung der Höhenwinkel $HOK = \alpha_1$ und $ROL = \alpha_2$, Fig. 138, sowie die Ausmessung der horizontalen Entfernungen $OH = s_1$

Fig. 138.

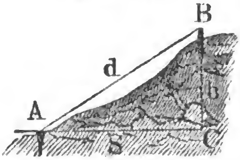


und $OR = s_2$ erforderlich. Stehen in diesem Falle noch die anvisirten Punkte K und L um a_1 und a_2 über den festen Punkten A und B, deren Höhenunterschied $BC = h$ ermittelt werden soll, so hat man

$$h = d_2 \, tang.\, \alpha_2 - a_2 - (d_1 \, tang.\, \alpha_1 - a_1)$$
$$= d_2 \, tang.\, \alpha_2 - d_1 \, tang.\, \alpha_1 - (a_2 - a_1).$$

Bei Anwendung des Setzniveaus und des Hänge- oder Gradbogens mißt man die directe Linie $AB = d$ zwischen zwei Punkten A und B, Fig. 139, und den Neigungswinkel $BAC = \alpha$ derselben gegen den Horizont AC, und berechnet dann die Vertical- und Horizontalprojection dieser Linie durch die bekannten Formeln

Fig. 139.



$$BC = h = d \sin.\, \alpha \text{ und}$$
$$AC = s = d \cos.\, \alpha.$$

Sehr oft ist α sehr klein, und deshalb einfacher, die Horizontalprojection mittels der Formel

$$d - s = 2d\left(\sin.\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2 d}{2} = 0{,}000000042308\,(\alpha^1)^2\, d,$$

oder durch Gebrauch einer hiernach berechneten Tabelle (s. Seite 121) zu bestimmen. Ist z. B. $d = 10$ Fuß und $\alpha = 1^0{,}24' = 84'$, so hat man

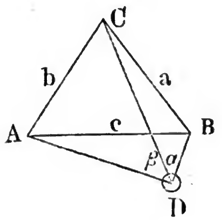
$$d - s = 0{,}00000042308 \,.\, 84^2 = 0{,}00000042308 \,.\, 7056$$
$$= 0{,}002985 \text{ Fuß und daher}$$
$$s = 9{,}997015 \text{ Fuß}.$$

Außer den gewöhnlichen trigonometrischen und Coordinatenformeln in den §§. 5, 6 und 7 der theoretischen Geometrie kommen vorzüglich noch folgende zwei Aufgaben (§. 12 und §. 13) in der praktischen Meßkunst zur Anwendung.

§. 12. Problem der drei Punkte. Es sind die Seiten a, b, c und also auch die Winkel A, B, C des Dreieckes ABC, Fig. 140, bekannt; man soll die Lage eines vierten Punktes D mittels der durch Aufstellen in D erhaltenen Visirwinkel $CDB = \alpha$ und $CDA = \beta$ berechnen.

Setzt man $\angle CBD = \varphi$, $\angle CAD = \psi$ und $\varphi + \psi = \delta$, so hat man:

Fig. 140.



I. $\delta = \varphi + \psi = 360^0 - (C + \alpha + \beta)$, ferner

II. $cotg.\varphi = cotg.\delta + \frac{a sin.\beta}{b sin.\alpha sin.\delta}$

hieraus $\psi = \delta - \varphi$, und

III. $CD = x = \frac{a\ sin.\ \varphi}{sin.\ \alpha}$.

Oder, setzt man:

I. $\frac{a\ sin.\ \beta}{b\ sin.\ \alpha} = tang.\ \mu$,

so hat man außer

II. $\frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{\delta}{2} = 180^0 - \frac{C + \alpha + \beta}{2}$, noch

III. $tang. \left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right) = tang. \frac{\delta}{2} \cdot cotang. (45^0 + \mu)$

und daher

IV. $\varphi = \frac{\varphi + \psi}{2} + \frac{\varphi - \psi}{2}$, sowie

V. $\psi = \frac{\varphi + \psi}{2} - \frac{\varphi - \psi}{2}$, u. s. w.

Beispiel. Aus den drei Seiten $a = 3492,7$ Fuß, $b = 3652,4$ und $c = 4015,2$ Fuß des Dreieckes ABC und aus den Visirwinkeln $\alpha = 35^0, 41', 10''$ und $\beta = 54^0, 23', 30''$ ist die Entfernung CD zu berechnen. Nach einer Formel auf Seite 161 berechnet sich zunächst der Winkel $C = 68^0, 20', 22''$; und hiernach folgt nun:

I. $\delta = \varphi + \psi = 360^0 - (68^0, 20', 22'' + 90^0, 4', 40'')$
$= 201^0, 34', 58''$; ferner

II. $cotang.\ \varphi$

$$= cotg. 201^0,34',58'' + \frac{3492,7\ sin.\ 54^0,23',30''}{3652,4 sin. 35^0,41',10'' sin. 201^0,34',58''}$$

$$= cotg.\ 21^0,34',58'' - \frac{3492,7\ sin. 54^0, 23', 30''}{3652,4 sin. 35^0,41',10'' sin. 21^0,34',58''}$$

$= 2,527932 - 3,623199 = -1,095267.$

Hiernach ist $\varphi = 180^0 - 42^0,23',48'' = 137^0,36',12''$ und

III. $CD = x = \frac{3492,7\ sin.\ 137^0, 36', 12''}{sin.\ 35^0, 41', 10''} = 4037,04$ Fuß.

Nach der zweiten Methode ist:

I. $tang.\ \mu = \frac{3492,7\ sin.\ 54^0, 23', 30''}{3652,4\ sin.\ 35^0, 41', 10''}$, hiernach

$log.\ tang.\ \mu = 0,1247571$ und $\mu = 53^0, 7', 7''$; ferner ist

II. $\frac{\varphi + \psi}{2} = 100^0, 47', 29''$;

III. $tang. \left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right) = tang.\ 100^0, 47', 29''\ .\ cotg.\ 98^0, 7', 7''$,

hiernach $log. tang. \left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right) = 9{,}8741464$ und

$$\frac{\varphi - \psi}{2} = 36^0, 48', 43''$$

Folglich ist $\varphi = 100^0, 47', 29'' + 36^0, 48', 43'' = 137^0, 36', 12''$
und $\psi = 100^0, 47', 29'' - 36^0, 48', 43'' = 63^0, 58', 46''$;
genau wie vorher, weshalb auch CD nicht anders ausfallen kann.

§. 13. **Unzugängliche Distanz und Problem der zwei Punkte.** Es ist aus der Standlinie $AB = a$, Fig. 141, und aus den Visirwinkeln $CAB = A$, $DBA = B$, $DAB = \alpha$ und $CBA = \beta$, die unzugängliche Distanz $CD = b$ zu finden.

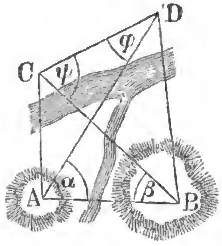
Man hat

$$CD = b = a\sqrt{\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{sin.\,\alpha}{sin.\,(B+\alpha)}\right)^2 + \left(\frac{sin.\,A}{sin.\,(A+\beta)}\right)^2 \\ -2\left(\frac{sin.\,\alpha}{sin.(B+\alpha)}\right)\left(\frac{sin.\,A}{sin.(A+\beta)}\right) cos.(B-\beta)\end{array}\right\}}.$$

oder, wenn man den Winkel $ADC = \varphi$, und den Winkel $BCD = \psi$ und

$$\text{I.}\quad \frac{sin.\,\alpha}{sin.\,\beta}\cdot\frac{sin.\,(A+\beta)}{sin.\,(B+\alpha)}\cdot\frac{sin.\,(B-\beta)}{sin.\,(A-\alpha)} = tang.\,\mu$$ setzt,

Fig. 141.



$$\text{II.}\quad \frac{\varphi+\psi}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\text{III.}\quad tang.\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right) = tg.\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) cotg.\,(45^0+\mu),$$

woraus nun folgt

$$\text{IV.}\quad \varphi = \frac{\varphi+\psi}{2} + \frac{\varphi-\psi}{2},$$

$$\text{V.}\quad \psi = \frac{\varphi+\psi}{2} - \frac{\varphi-\psi}{2},$$

$$\text{VI.}\quad CD = b = \frac{a\,sin.\,\alpha\,sin.\,(B-\beta)}{sin.\,\psi\,sin.\,(B+\alpha)} = \frac{a\,sin.\,\beta\,sin.\,(A-\alpha)}{sin.\,\varphi\,sin.\,(A+\beta)}.$$

Ist umgekehrt, $CD = b$ die gemessene Standlinie, und wird $AB = a$ gesucht, so hat man nach der ersten Methode

$$a = b:\sqrt{\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{sin.\,\alpha}{sin.\,(B+\alpha)}\right)^2 + \left(\frac{sin.\,A}{sin.\,(A+\beta)}\right)^2 \\ -2\left(\frac{sin.\,\alpha}{sin.(B+\alpha)}\right)\left(\frac{sin.\,A}{sin.\,(A+\beta)}\right) cos.\,(B-\beta)\end{array}\right\}}$$

nach der zweiten:

$$a = \frac{b\,sin.\,(B+\alpha)\,sin.\,\psi}{sin.\,(B-\beta)\,sin.\,\alpha} = \frac{b\,sin.\,(A+\beta)\,sin.\,\varphi}{sin.\,(A-\alpha)\,sin.\,\beta}.$$

Mittels dieser Formeln läßt sich auch das Problem der zwei Punkte lösen, wo es darauf ankommt, die Lage eines Punktes A

gegen eine gegebene Linie CD durch zwei Aufstellungen und Messung der Winkel A, α, B und β zu bestimmen.

Beispiel. Man hat die Hülfsstandlinie CD durch unmittelbares Ausmessen = 6598,32 Fuß und mittels eines Theodoliten, die Winkel $A = 95^0, 17', 20''$, $B = 78^0, 35', 10''$, $\alpha = 61^0, 41', 50''$ und $\beta = 39^0, 38', 40''$ gefunden und sucht nun die Hauptstandlinie $AB = a$. Nach der ersten Regel ist:

$$a = 6598{,}32 : \sqrt{\left\{\left(\frac{sin.\ 61^0,41',50''}{sin.\ 39^0,43',0''}\right)^2 + \left(\frac{sin.\ 84^0,42',40''}{sin.\ 45^0,4',0''}\right)^2 - 2\left(\frac{sin.61^0,41',50''}{sin.\ 39^0,43',0''}\right)\left(\frac{sin.84^0,42',40''}{sin.\ 45^0,4',0''}\right) cos.38^0,56',30''\right\}}$$

$$= \frac{6598{,}32}{\sqrt{1{,}898555 + 1{,}978403 - 3{,}014805}} = \frac{6598{,}32}{\sqrt{0{,}862153}}$$

$= 7106{,}26$ Fuß.

Nach der zweiten Methode hat man:

I. $tg\ \mu = \dfrac{sin.61^0,41',50''.sin.45^0,41',10''.sin.38^0,56',30''}{sin.39^0,38',40''.\ sin.39^0,43',0''.sin.33^0,35',30''}$,

hiernach $log.\ tang.\ \mu = 10{,}2397521$ und $\mu = 60^0, 4', 5''$; ferner

II. $\dfrac{\varphi + \psi}{2} = \dfrac{101^0, 20', 30''}{2} = 50^0, 40', 15''$,

III. $tang.\left(\dfrac{\varphi - \psi}{2}\right) = tang.\ 50^0, 40', 15''\ cotg.105^0, 4', 5''$,

hiernach $log.\ tang.\left(\dfrac{\varphi - \psi}{2}\right) = 9{,}5166469$, und

$\dfrac{\varphi - \psi}{2} = -\ 18^0, 11', 23''$; daher

IV. $\varphi = 50^0, 40', 15'' - 18^0, 11', 23'' = 32^0, 28', 52''$,

V. $\psi = 50^0,40',15'' + 18^0,11',23'' = 68^0,51',38''$, und

$$AB = a = \frac{6598{,}32\ sin.\ 39^0, 43', 0''\ .\ sin.\ 68^0, 51', 38''}{sin.\ 38^0, 56', 30''\ sin.\ 61^0, 41', 50''}$$

$= 7106{,}25$ Fuß.

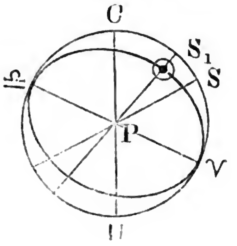
§. 14. Zeitbestimmung.

Es ist 1 Stunde Zeit	=	15 Grad Bogen,	
1 Minute »	=	15 Min.	»
1 Secunde »	=	15 Sec.	»
1 Grad Bogen	=	4 Min. Zeit,	
1 Min. »	=	4 Sec.	»
1 Sec. »	=	$^1/_{15}$ Sec.	»
1 Sterntag	=	23 St. 56 Min. 4 Sec.	

Um den Gang einer Uhr zu prüfen, richtet man ein Fernrohr nach einem Fixsterne und sieht zu, ob nach dieser Uhr 23 St. 56 Min. 4 Sec. verflossen sind, wenn derselbe Stern den folgenden Tag durch das Fadenkreuz des unverrückt gebliebenen Fernrohres geht. Anfang des Sterntages ist, wenn der Früh-

lingspunkt (♈) culminirt oder durch den Meridian geht; Anfang des **wahren Mittags**, wenn der Mittelpunkt der wahren Sonne culminirt, und der **mittlere Mittag** tritt ein, wenn die (eingebildete) mittlere Sonne durch den Meridian geht. Uebrigens hat man, wenn C♈U♎, Fig. 142, den Aequator, CU den Meridian und P die Weltaxe bezeichnet, C♈ = Sternzeit, $CS_1 = CP\odot$ wahre Zeit und CS = mittlere Zeit; sowie ♈S_1 = ♈$P\odot$ = Rectascension der wahren Sonne $\odot$, sowie ♈S = Rectascension der mittleren Sonne S.

Fig. 142.



Es ist ferner die wahre Zeit CS_1 = Sternzeit C♈ — Rectascension ♈S_1 von $\odot$, sowie die mittlere Zeit CS = Sternzeit C♈ — Rectascension ♈S von S.

Die **Zeitgleichung** $S_1 S$ ist = Rectascension ♈S_1 der wahren Sonne minus Rectascension ♈S der mittleren Sonne; und hiernach

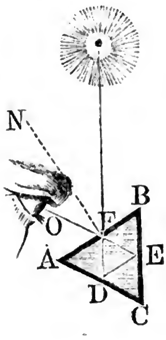
Mittlere Zeit CS = wahre Zeit CS_1 + Zeitgleichung $S_1 S$.
Wahre Zeit CS_1 = mittlere Zeit CS — Zeitgleichung $S_1 S$.

Die **Zeitgleichung**, sowie andere Zahlenelemente der Astronomie und mathematischen Geographie werden für jeden Tag im Jahre in den astronomischen Ephemeriden, z. B. im Berliner astronomischen Jahrbuche, mitgetheilt; hier folgen nur die in Minuten ausgedrückten Zeitgleichungen eines Jahres. Wie man sieht, ist dieselbe vier Mal des Jahres Null. (S. Tab. a. f. S.)

Der **wahre Mittag** oder der Durchgang des wahren Sonnenmittels durch den Meridian läßt sich durch Anvisiren der Sonne mittels eines in der Meridianebene drehbaren Fernrohres (Passageinstrumentes) bestimmen.

In neueren Zeiten verwendet man hierzu auch das **Dipleidoscop**, Fig. 143, welches durch Zusammenfallen zweier Sonnenbilder die wahre Mittagszeit anzeigt. Es sind hier AC und BC zwei um 60 Grad gegen einander gestellte Spiegel, es ist ferner AB eine unbelegte Glastafel, und es wird das Instrument so aufgestellt, daß die Spiegelebene BC in den Meridian fällt. Steht die Sonne $\odot$ im Meridian, so wird der in der Meridianebene einfallende Strahl $\odot D$ von den beiden Spiegeln AC und BC in die Richtungen DE und EFO so gebrochen, daß die Abweichung des in's Auge O gelangten Strahles FO mit der Normale FN auf AB denselben Winkel einschließt, wie der einfallende Strahl $\odot F$, und deshalb auch

Fig. 143.



Die mittlere Zeit geht:

vor

um	1	Min.	den	27.	Decbr.
	2	»	»	29.	»
	3	»	»	31.	»
	4	»	»	2.	Januar
	5	»	»	4.	»
	6	»	»	7.	»
	7	»	»	9.	»
	8	»	»	11.	»
	9	»	»	14.	»
	10	»	»	17.	»
	11	»	»	20.	»
	12	»	»	23.	»
	13	»	»	27.	»
	14	»	»	3.	Febr.
	14½	»	»	11.	»
	14	»	»	20.	»
	13	»	»	27.	»
	12	»	»	3.	März
	11	»	»	8.	»
	10	»	»	11.	»
	9	»	»	15.	»
	8	»	»	18.	»
	7	»	»	22.	»
	6	»	»	25.	»
	5	»	»	28.	»
	4	»	»	31.	»
	3	»	»	4.	April
	2	»	»	7.	»
	1	»	»	11.	»
	0	»	»	15.	»

nach

um	1	Min.	den	19.	April
	2	»	»	24.	»
	3	»	»	30.	»
	4	»	»	14.	Mai
	3½	»	»	23.	»
	3	»	»	28.	»
	2	»	»	4.	Juni
	1	»	»	9.	»
	0	»	»	14.	»

vor

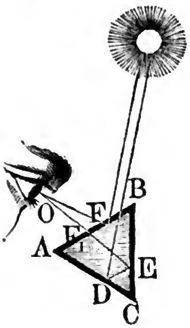
um	1	Min.	den	19.	Juni
	2	»	»	23.	»
	3	»	»	28.	»
	4	»	»	3.	Juli
	5	»	»	10.	»
	6	»	»	19.	»
	6¼	»	»	26.	»
	6	»	»	1.	August
	5	»	»	10.	»
	4	»	»	16.	»
	3	»	»	20.	»
	2	»	»	24.	»
	1	»	»	28.	»
	0	»	»	31.	»

nach

um	1	Min.	den	3.	Septb.
	2	»	»	6.	»
	3	»	»	9.	»
	4	»	»	12.	»
	5	»	»	15.	»
	6	»	»	18.	»
	7	»	»	21.	»
	8	»	»	24.	»
	9	»	»	27.	»
	10	»	»	30.	»
	11	»	»	3.	Octbr.
	12	»	»	6.	»
	13	»	»	10.	»
	14	»	»	14.	»
	15	»	»	19.	»
	16	»	»	27.	»
	16¼	»	»	2.	Novbr.
	16	»	»	9.	»
	15	»	»	16.	»
	14	»	»	20.	»
	13	»	»	24.	»
	12	»	»	27.	»
	11	»	»	30.	»
	10	»	»	2.	Decbr.
	9	»	»	5.	»
	8	»	»	7.	»
	7	»	»	10.	»
	6	»	»	12.	»
	5	»	»	14.	»
	4	»	»	16.	»
	3	»	»	18.	»
	2	»	»	20.	»
	1	»	»	22.	»
	0	»	»	24.	»

zusammenfällt mit dem von AB unmittelbar reflectirten Strahl; es wird also auch das Sonnenbild, welches AC und BC zurückwerfen, mit dem Sonnenbilde zusammenfallen, welches AB allein reflectirt. Bei der Beobachtung sieht man anfänglich diese Sonnenbilder, wie F und F_1, Fig. 144, immer näher und näher an einander rücken, sich später berühren, nachher decken und später noch einmal berühren. Nimmt man erst aus den Zeiten der Berührung das Mittel und dann aus diesem Mittel und aus der Zeit des Deckens das zweite Mittel, so erhält man sehr genau den wahren Mittag.

Fig. 144.



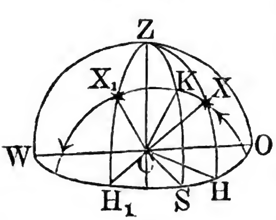
Beobachtet man den Durchgang eines Sternes durch den Meridian, so ist dessen, nach Befinden um 12 Stunden zu vergrößernde, Rectascension die Sternzeit der Beobachtung, und diese nach dem Obigen erst in die mittlere Sonnenzeit zu verwandeln.

Ein im gewöhnlichen bürgerlichen Leben angewendetes Verfahren zur Bestimmung der wahren Mittagszeit besteht darin, daß man zusieht, wenn der Schatten eines Lothes, welches über dem südlichen Endpunkt einer auf dem ebenen Fußboden eingegrabenen Mittagslinie aufgehangen ist, in diese Linie fällt.

Wenn der Meridian des Ortes nicht bekannt ist, so ermittelt man die Zeit durch Beobachtungen eines Sternes bei gleichen oder correspondirenden Höhen.

Sind t_1 und t_2 die Zeiten, welche die Uhr anzeigt, wenn der Stern X, Fig. 145, bei gleicher Höhe $HX = H_1X_1$, vor und nach seiner Culmination in K beobachtet wird, so hat man die Zeit, welche die Uhr beim Durchgange des Sternes durch den Meridian ZS anzeigt,

Fig. 145.



$$= \frac{t_1 + t_2}{2}$$ und diese muß also auch gleich sein der in mittlere Zeit zu verwandelnden Rectascension t des Sternes. Außerdem geht die Uhr um

$\frac{t_1 + t_2}{2} - t$ zu früh, oder um $t - \frac{t_1 + t_2}{2}$ zu spät, und ist hiernach zu stellen. Benutzt man hierzu die Sonne, so ist, wenn die Beobachtung nicht ganz nahe zur Zeit der Solstitien (den 21. Juni oder 21. December) erfolgt, noch eine besondere Correction wegen der Veränderlichkeit der Declination oder Abweichung der Sonne vom Aequator nöthig.

Man hat hier, wenn s_1 den vormittägigen und s_2 den nachmittägigen, gleichen Sonnenhöhen entsprechende Stundenwinkel,

sowie $2s$ die in Grade verwandelte Zwischenzeit beider Beobachtungen bezeichnet:

$$1)\quad \frac{s_1 + s_2}{2} = s,$$

und wenn ferner p die geographische Breite oder Polhöhe des Ortes, ferner $d_1 - d_2$ die Veränderung der Poldistanz der Sonne während der Beobachtung, sowie d die mittlere Poldistanz oder Ergänzung der Abweichung zu 90° während dieser Zeit bezeichnet:

$$2)\quad \frac{s_1 - s_2}{2} = \frac{d_1 - d_2}{2}\left(cotg.\, d\, cotg.\, s - \frac{tang.\, p}{sin.\, s}\right).$$

Hiernach

$$3)\quad s_1 = \frac{s_1 + s_2}{2} + \frac{s_1 - s_2}{2} \text{ und}$$

$$4)\quad s_2 = \frac{s_1 + s_2}{2} - \frac{s_1 - s_2}{2}.$$

Verwandelt man s_1 und s_2 in Zeit, so erhält man hiernach die Zeit des wahren Mittags nach der Uhr, wenn man s_1 zur Zeit der Vormittagsbeobachtung addirt, oder s_2 von der Zeit der Nachmittagsbeobachtung subtrahirt, oder $\frac{s_1 - s_2}{2}$ zum Mittel beider Beobachtungszeiten hinzunimmt.

Um die Genauigkeit zu erhöhen, beobachtet man hinter einander die Sonne bei mehreren Höhen, stellt also Nachmittags das Fernrohr nach und nach (natürlich in umgekehrter Reihenfolge) auf dieselben Höhenwinkel wie Vormittags, und dann führt man statt s das Mittel aller Zwischenzeiten ein.

Beispiel. Den 19. August 1847 hat der Verfasser folgende correspondirende Sonnenhöhen beobachtet:

34°,50′ um	8 Uhr	49 Min.	38½ Sec. und	3 Uhr	28 Min.	17 Sec.
36°,28′ »	9 »	1 »	20 » »	3 »	16 »	50 »
38°,34′ »	9 »	16 »	42½ » »	3 »	1 »	17 »
40°,15′ »	9 »	29 »	52 » »	2 »	48 »	54 »
42°, 3′ »	9 »	44 »	24 » »	2 »	34 »	40 »
43°,54′ »	10 »	0 »	24½ » »	2 »	18 »	56 »
45°,28′ »	10 »	15 »	4½ » »	2 »	4 »	52 »
46°,50′ »	10 »	29 »	1½ » »	1 »	51 »	25 »
48°,15′ »	10 »	45 »	20 » »	1 »	35 »	58 »
49°,24′ »	11 »	1 »	1 » »	1 »	21 »	22 »
Hiernach die Summe	98 »	52 »	48½ » »	24 »	22 »	51 »
u. d. Mittel	9 »	53 »	16″,85 » »	2 »	26 »	17″,1 »
			oder	14 »	26 »	17″,1 »

folglich das letzte Mittel = 12 St. 9 Min. 47″
und die Zwischenzeit = 4 » 33 » 0″,25,
deren Hälfte = 2 » 16 » 40″,125,

in Bogen, $s = \frac{s_1 + s_2}{2} = 34°, 7', 31'',87.$

Die Declination der Sonne ist, für Berlin:

den 19. August Mittags $= 12^0, 55', 40'',3$

den 20. » » $= 12^0, 36', \ 3'',4$

folglich die Abnahme derselben oder die Zunahme der Poldistanz in 24 Stunden . . . . $= \ 0^0, 19', 36'',9,$

also im Laufe der Zwischenzeit von 4 Stunden 33 Min.:

$$d_1 - d_2 = - 0^0, 3', 43'',2 \text{ und}$$

$$\frac{d_1 - d_2}{2} = - 0^0, 1', 51'',6 = - 111'',6.$$

Die Polhöhe des Standpunktes war $p = 51^0, 2', 20''$ und die geographische Länge desselben $= 31^0, 2', 50''$. Da aber Berlin die geographische Länge $= 31^0, 3', 20''$ hat, so tritt in dem Beobachtungsorte der Mittag um $^{30}/_{15} = 2$ Sec. später ein als in Berlin, und es ist daher die mittägliche Poldistanz d der Sonne an beiden Orten ziemlich dieselbe. Jetzt folgt

$$\frac{s_1 - s_2}{2}$$

$$= 111'',6 \left(\frac{tang. 51^0,2',20''}{sin. 34^0,7',32''} - tg. 12^0,55',40'' \, cotg. 34^0,7',32''\right)$$

$$= 111'',6 (2,2042 - 0,3387) = 208'',2 = 0^0,3',28'',2,$$

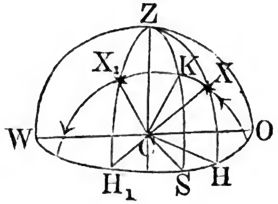
in Zeit, $=$ 14 Secunden. Hiernach ist nach der Uhr die Zeit des wahren Mittags $=$ 12 Uhr 9 Min. 47″ + 14″

$=$ 12 Uhr 10 Min. 1 Sec.

Da endlich die Zeitgleichung an diesem Tage 3 Minuten 32 Secunden beträgt, so ist der mittlere Mittag nach unserer Uhr $=$ 12 Uhr 6 Minuten 29 Secunden, und es geht folglich diese Uhr um 6 Minuten 29 Secunden zu zeitig.

§. 15. Meridianbestimmung. Die Mittagslinie oder der Meridian eines Ortes bestimmt sich wie die Zeit durch Beobachtung bei correspondirenden Sternhöhen HX und H_1X_1, Fig. 146. Halbirt man den Horizontalwinkel HCH_1 zwischen den Visirebenen HZ und H_1Z nach demselben Sterne bei derselben Höhe, so erhält man in der Halbirungslinie CS die Richtung des Meridians oder die Mittagslinie. Benutzt man die Sonne hierzu, so muß man die entgegengesetzten Sonnenränder anvisiren, und auch auf die Veränderlichkeit der Declination der Sonne Rücksicht nehmen.

Fig. 146.



Ist a_1 der Azimuthalwinkel Vormittags und a_2 derselbe Nachmittags, so hat man das Mittel beider: $\frac{a_1 + a_2}{2} = a$, und, wenn die Bezeichnungen die Bedeutung wie im vorigen Paragraph haben:

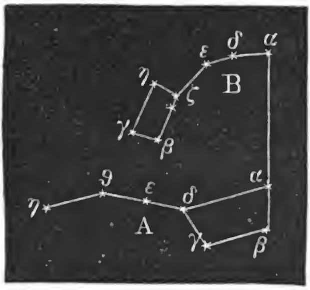
die halbe Differenz $\frac{a_1 - a_2}{2} = - \frac{\frac{1}{2}(d_1 - d_2)}{cos. p\ sin. s}$.

Hiernach ist derjenige Winkel, bei welchem das Fernrohr im Meridian steht:

$$a_1 = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2}.$$

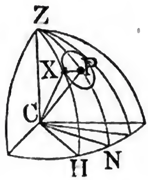
Das sicherste und einfachste Mittel zur Bestimmung der Mittagslinie bietet die Beobachtung von α (dem Polarstern) oder δ im kleinen Bären dar. Der erste dieser beiden Sterne steht ungefähr $1\frac{1}{2}$ Grad, der letztere aber $3\frac{1}{2}$ Grad vom Nordpole ab. Man findet mit Hülfe des großen Bären oder des Himmelswagens *A*, Fig. 147, den Polarstern sehr leicht; wenn man sich durch die Sterne α und β dieses Sternbildes einen Bogen denkt und diesen von α aus ungefähr 25 Grad verlängert, so gelangt man zu α in der Schwanzspitze des kleinen Bären *B*; δ aber ist der mittlere von den drei Sternen im Schwanze dieses Bären. Am einfachsten wird die Bestimmung, wenn man den Polarstern in seinem größten östlichen oder westlichen Azimuth beobachtet.

Fig. 147.



Ist *X*, Fig. 148, der Polarstern, *P* der Nordpol, *Z* das Zenith, *C* der Standpunkt u. s. w., so hat man in PX = Poldistanz $d = 90^0$ — Abweichung, ferner $PZ = 90^0$ — Polhöhe $= 90^0 - p$, und das gesuchte Azimuth $HN = HCN = \angle XZP = a$ bestimmt durch die Gleichung:

Fig. 148.



$$sin. a = \frac{sin. PX}{sin. PZ} = \frac{sin. d}{cos. p};$$

und den die Zeit des Eintrittes des größten Azimuthes bestimmenden Stundenwinkel $ZPX = s$ bestimmt durch

$$cos. s = tg. PX . cotg. PZ = tg. d\ tg. p.$$

Um nun die Mittagslinie zu erhalten, hat man das Visirlineal oder die Alhidade um den Horizontalwinkel a zu drehen; dadurch gelangt dasselbe aus der Visirebene des Sternes in die Ebene des Meridians.

Für andere Stellungen des Sternes hat man

$$cotg. a = \frac{cos. p\ cotg. d - sin. p\ cos. s}{sin. s},$$

wobei s aus der Beobachtungszeit bestimmt wird, jedoch berücksichtigt werden muß, daß t Stunden Sternzeit $= t$ Stunden mittlerer Zeit minus 9,83 t Secunden ist.

Um eine große Genauigkeit zu erlangen, macht man eine Reihe von Beobachtungen des Polarsternes, und bestimmt so mehrere Azimuthalwinkel; addirt man dann alle Winkel zu den Horizontalwinkeln, welche bei jedesmaliger Beobachtung des Polarsternes abgelesen wurden und nimmt man aus allen diesen Winkeln das Mittel, so erhält man sehr genau den Winkel, auf welchen man das Fernrohr zu stellen hat, um es in die Meridianebene zu bringen.

Am bequemsten rechnet man nach folgender Formel

$$a = -\frac{d\, sin.\, s}{cos.\, p} - \frac{d^2\, tg.\, p\, sin.\, 2s\, sin.\, 1''}{2\, cos.\, p}$$
$$+ \left(\frac{d\, sin.\, s}{cos.\, p} + \frac{2d^2\, tg.\, p\, sin.\, 2s\, sin.\, 1''}{cos.\, p}\right) \cdot 2 \left(sin. \frac{\alpha}{2}\right)^2,$$

worin d die Poldistanz des Polarsternes, ferner s den mittleren Stundenwinkel aller Beobachtungen, und $\left(sin. \frac{\alpha}{2}\right)^2$ das Mittel von den Quadraten der Sinus der halben Abweichungen der Uhrzeiten jeder Beobachtung von dem Mittel aller Zeiten bezeichnet.

Beispiel 1. Um die Mittagslinie eines Punktes unter 50°,55′ geographischer Breite anzugeben, wurden den 3. August 1840 Beobachtungen bei correspondirenden Sonnenhöhen angestellt und Folgendes gefunden:

Azimuthalwinkel bei gleicher Höhe

	Vormittags.		Nachmittags.
	173°, 6′, 10″		261°, 0′, 10″
	174° 48′. 50″		259°, 9′, 10″
	177°, 1′, 40″		257°, 1′, 50″
	179°, 11′, 40″		254°, 45′, 20″
	183°, 14′, 10″		250°, 52′, 20″
	184°, 37′, 50″		249°, 35′, 10″
	187°, 24′, 50″		246°, 53′, 40″
	189°, 21′, 50″		244°, 52′, 50″
Summe:	1448°, 47′, 0″		2024°, 10′, 30″
Mittel:	181°, 5′, 52½″	—	253°, 1′, 18¾″.

Letztes Mittel: $\frac{a_1 + a_2}{2} = 217°, 3′, 36″.$

Nach den astronomischen Ephemeriden war die Declination der Sonne den 3. August = 17°, 43′, 10″, 9
und » 4. » = 17°, 27′, 33″, 2,
folglich die Abnahme derselben in 24 Stunden = 0°, 15′, 37″, 7.

Die mittlere Zwischenzeit zwischen den Vormittags- und den Nachmittagsbeobachtungen war 2 Stunden 58 Minuten = 44½ Grad, folglich die Abnahme der Declination oder die Zunahme der Poldistanz in dieser Zeit

$$= \frac{178}{24\,.\,60} \cdot 0°, 15′, 37″, 7 = \frac{89}{720} \cdot 937″, 7 = 116 \text{ Secunden}$$

= 1 Minute 56″, der Stundenwinkel s = 22°, 15′, 0″ und

$$\frac{a_1 - a_2}{2} = -\frac{\frac{1}{2}(d_1 - d_2)}{cos. p\; sin. s} = \frac{\frac{1}{2} . 116''}{cos. 50^0, 55'\; sin. 22^0, 15''} = 4', 3''.$$

Hiernach ist also das Fernrohr auf 217°,3′,36″ + 0°,4′,3″ = 217°, 7′, 39″ zu stellen, um es in die Meridianebene zu bringen.

Beispiel 2. Um die Mittagslinie mittels des Polarsternes zu finden, wurde dieser in seinem größten östlichen Azimuth beobachtet, und es zeigte hierbei der Horizontalkreis 22°, 29′, 0″. Der Tag der Beobachtung war der 22. Juni 1841, wo die Declination des Polarsternes 88°, 27′, 37″, 23 Sec. betrug, die Polhöhe des Beobachtungsortes war 50°, 35′, 15″, folglich ist für das entsprechende größte Azimuth:

$$sin. a = \frac{sin. d}{cos. p} = \frac{cos. 88^0, 27', 37'', 23}{cos. 50^0, 35', 15''},$$

$$log. sin. \alpha = 8{,}6265436 \text{ und}$$

$$a = 2^0, 25', 32'';$$

also die Alhidade auf 22°, 29′, 0″ — 2°,25′,32″ = 20°,3′,28″ zu stellen, um das Fernrohr in den Meridian zu bringen.

Beispiel 3. Den 10. September 1847 wurden an einem Orte, dessen geographische Breite ungefähr 50°, 59′, 0″ und Länge ungefähr 31°, 2′, 15″ (von einer guten Landkarte abgenommen) betrug, an dem Polarstern folgende Beobachtungen angestellt.

	Zeit:	entsp. mittl. Horizontalwinkel:
	7 Uhr 50′, 57″	36°, 30′, 15″
	7 » 53′, 45″	36°, 30′, 30″
	7 » 56′, 17″	36°, 30′, 30″
	7 » 58′, 53″	36°, 30′, 25″
	8 » 2′, 38″	36°, 30′, 15″
	8 » 5′, 52″	36°, 29′, 55″
	8 » 8′, 42″	36°, 29′, 40″
	8 » 12′, 44″	36°, 29′, 25″
	8 » 16′, 21″	36°, 29′, 15″
	8 » 18′, 31″	36°, 29′, 0″
Mittel:	8 » 4′, 28″	36°, 29′, 55″.

Nach erfolgtem Umschlagen des Fernrohres und Umdrehen der Alhidade ergab sich Folgendes:

	Zeit:	entspr. mittl. Horizontalwinkel:
	8 Uhr 23′, 13″	36°, 30′, 0″
	8 » 26′, 28″	36°, 29′, 55″
	8 » 28′, 45″	36°, 29′, 45″
	8 » 30′, 40″	36°, 29′, 35″
	8 » 32′, 8″	36°, 29′, 20″
	8 » 34′, 20″	36°, 29′, 15″
	8 » 39′, 59″	36°, 28′, 40″
	8 » 41′, 55″	36°, 28′, 15″
	8 » 44′, 11″	36°, 27′, 35″
	8 » 46′, 6″	36°, 27′, 20″
Mittel:	8 » 34′, 46½″	36°, 28′, 59″
Letztes Mittel:	8 » 19′, 37″	36°, 29′, 27″.

Die Uhr ging, vorausgegangenen Sonnenbeobachtungen zu Folge, um 11 Min. 15 Sec. zu spät, folglich war das Mittel der Beobachtungszeit 8 Uhr 30′, 52″. Die Sternzeit am Berliner Mittag war den 10. Sept. = 11 Uhr 15′, 26″,7. Da aber Berlin um 31°, 3′, 30″ — 31°, 2′, 15″ = 75″ östlicher liegt, so hat es um $^{75}/_{15}$ = 5 Zeitsecunden eher Mittag, und das ist deshalb für das Beobachtungsmittel die mittlere Zeit in Berlin = 8 St. 30′, 57″ und die Sternzeit = 11 Uhr 15′, 26″,7 + 8 St. 30′, 57″ + 9,83″ . 8,516 = 19 St. 46′, 23″,7 + 83″,7 = 19 St. 47′, 47″,4.

Nun ist aber die Rectascension des Polarsternes an diesem Tage 1 St. 5′, 23″,9; daher folgt der Stundenwinkel des Polarsternes im Mittel der Beobachtungszeit

s = 18 St. 42′, 23″,5 = 280°, 35′, 52″,5 und seine Ergänzung zu 360°. = 79°, 24′, 7″,5.

Die Poldistanz des Polarsternes ist an dem Beobachtungstage, d = 1°, 30′, 19″,3 = 5419″,3. folglich

$$1)\quad -\frac{d\, sin.\, s}{cos.\, p} = \frac{5419'',3\ sin.\ 79^0, 24', 7'',5}{cos.\ 50^0, 59', 0''} = 8461'',5 = 2^0, 21', 1'',5,$$

$$2)\quad -\frac{d^2\, tang.\, p\, sin.\, 2\, s\, .\, sin.\, 1''}{2\, cos.\, p} = \frac{5419,3^2\ tang.\ 50^0, 59', 0''\ sin.\ 21^0.\ 11', 45''\ .\ sin.\ 1''}{2\ cos.\ 50^0, 59', 0''} = 50'',5;$$

$$3)\quad \frac{d\, sin.\, s}{cos.\, p} + \frac{2\, d^2\, tang.\, p\, sin.\, 2\, s\, sin.\, 1''}{cos.\, p} = -(8461,5 + 202,0)'' = -8663'',5.$$

Die Abweichungen der einzelnen Beobachtungszeiten von ihrem Mittel sind:

28′, 40″	3′, 36″	ihre Hälften in Graden ausgedrückt:	3°, 35′, 0″	0°, 27′, 0″
25′, 52″	6′, 51″		3°, 14′, 0″	0°, 51′, 20″
23′, 20″	9′, 8″		2°, 55′, 0″	1°, 8′, 30″
20′, 44″	11′, 3″		2°, 35′, 30″	1°, 22′, 50″
16′, 59″	12′, 31″		2°, 7′, 23″	1°, 33′, 50″
13′, 45″	14′, 43″		1°, 43′, 10″	1°, 50′, 20″
10′, 55″	20′, 22″		1°, 21′, 50″	2°, 32′, 40″
6′, 53″	22′, 18″		0°, 51′, 40″	2°, 47′, 20″
3′, 16″	24′, 34″		0°, 24′, 30″	3°, 4′, 20″
1′, 6″	26′, 29″		0°, 8′, 10″	3°, 18′, 33″

Die Summe von den Quadraten der Sinus dieser Winkel oder $\Sigma\, (sin.\ ^1/_2\ \alpha)^2$ ist = 0.028435, folglich ihr doppeltes Mittel = $^2/_{20}$. 0,028435 = 0,0028435, und endlich der in Frage stehende Azimuthalwinkel des Beobachtungsmittels.

$$a = -\frac{d\ sin.s}{cos.p} - \frac{d^2\ tang.p\ sin.\ 2s\ .\ sin.\ 1''}{2\ cos.p}$$
$$+ \left(\frac{d\ sin.s}{cos.p} + \frac{2\ d^2\ tang.p\ sin.\ 2s}{cos.p}\ sin.1''\right).\ 2\left(sin.\ \frac{\alpha}{2}\right)^2$$
$$= 2^0, 21', 1'',5 + 0^0, 0', 50'',5 - 8663'',5\ .\ 0,0028435$$
$$= 2^0, 21', 52'',0 - 0^0, 0', 25'' = 2^0, 21', 27''$$

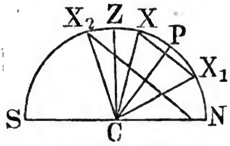
und hiernach die Alhidade auf

$$36^0, 29', 27'' - 2^0, 21', 27'' = 34^0, 8', 0''$$

zu stellen, um das Fernrohr in den Meridian zu bringen. Um die möglichst größte Genauigkeit zu erzielen, wurde das Fernrohr umgeschlagen und die Alhidade so weit umgedreht, daß der Winkel von $34^0, 8', 0''$ am entgegengesetzten Vernier abzulesen war, endlich aber das Mittel aus beiden Visirlinien als Mittagslinie abgesteckt.

§. 16. Geographische Breite. Die geographische Breite eines Ortes ist gleich der Polhöhe desselben. Um dieselbe zu finden, beobachtet man mit Hülfe eines Theodoliten die obere oder beide Culminationen eines Sternes, in welchem Falle er bekanntlich seinen höchsten oder tiefsten Stand eingenommen hat. Steht der Stern nördlich vom Zenith Z, wie X oder X_1, Fig. 149, so ist die Polhöhe

Fig. 149.



$$NP = p = h \mp d,$$

wo h die Sternhöhe und d die Poldistanz des Sternes bezeichnet, das Minuszeichen bei der oberen, das Pluszeichen aber bei der unteren Culmination zu nehmen ist. Steht der Stern in X_2, südlich vom Zenith, so hat man statt h, $180^0 - h$ zu setzen, weil hier für h der Bogen SX_2 einzusetzen ist.

Um durch den Höhenkreis eine vom Collimationsfehler befreite Angabe von h zu erhalten, ist es nöthig, die Beobachtung beim umgeschlagenen Fernrohre und umgedrehter Alhidade zu wiederholen.

Beobachtet man den Stern in beiden Culminationen, so bestimmt sich die Polhöhe unabhängig von d:

$$p = \frac{h + h_1}{2},$$ wo h und h_1 die beiden beobachteten Culminationshöhen des Sternes sind.

Die beobachteten Sternhöhen sind um den Refractionswinkel OCO_1, Fig. 150 (a. f. S.), zu vermindern, ehe sie als wahre Sternhöhen in die Formeln eingesetzt werden können.

Dieser Winkel läßt sich bei b Zoll Barometer- und t^0 Thermometerstand, sofern die Höhe mindestens 15^0 beträgt, setzen:

$$\varrho = 60''\ \frac{b}{28}\ .\ \frac{cotang.\ h}{1 + 0,00367\ t}\ .$$

Da er mit der Zenithdistanz abnimmt und eine sehr zuverlässige Bestimmung nicht zuläßt, so soll man überhaupt dahin

zu trachten suchen, die Sterne nur bei großen Höhen zu beobachten. Am besten sind aber diejenigen Beobachtungen, welche diese Correction nicht erfordern. Beobachtet man die Culminationen zweier Sterne X und X_2, Fig. 151, welche auf entge-

Fig. 150.

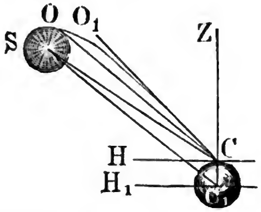
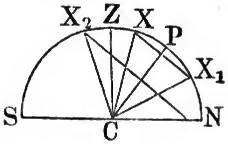


Fig. 151.



gengesetzten Seiten des Zeniths Z von diesem um gleich viel abstehen, deren Poldistanzmittel $\frac{d + d_1}{2}$ also der Aequatorhöhe gleich ist, so macht man sich durch das Mittel beider Beobachtungen von dem Refractions- und Collimationsfehler zugleich unabhängig. Es ist in diesem Falle

$$p = \frac{h - d + 180 - h_1 - d}{2} = \frac{180^0 + h - h_1 - 2d}{2}$$

zu setzen, und wenn nun h und h_1 wenig von einander verschieden sind, so fällt die Differenz der entsprechenden Refractionswinkel klein genug aus, um sie außer Acht lassen zu können, oder es ist wenigstens die Ungenauigkeit dieser Winkel ohne Einfluß auf das Resultat.

Da sich an der Sonne S, Fig. 150, nur der obere oder untere Rand anvisiren läßt, so muß man die beobachtete Höhe derselben um den scheinbaren Sonnenhalbmesser OCS corrigiren.

Dieser Sonnenhalbmesser ist

am	1. Januar	16′, 18″,2
»	1. April	16′, 1″,9
»	1. Juli	15′, 46″,0
»	1. October	16′, 1″,3.

Auch ist hier die beobachtete Höhe noch um die Parallaxe $CSC_1 = 8'',55 \cos. h$ zu vergrößern, um die Beobachtung auf den Mittelpunkt C_1 der Erde zurückzuführen.

Um ein von den Beobachtungs- und Instrumentfehlern möglichst befreites Resultat zu erhalten, bestimmt man die Polhöhe durch eine Reihe von Circummeridianhöhen.

Ist h die Höhe des Sternes nahe beim Meridian, p die Polhöhe, d die Poldistanz des Sternes und s der Stundenwinkel, α die diesem Winkel entsprechende Aenderung der Poldistanz (bei Fixsternen = Null), so hat man für die Culmination auf der Südseite:

1) annähernd $p = 180^0 - (h + d)$ und hiernach schärfer

2) $p = 180^0 - \left(h + d - \alpha - \frac{\cos.p \sin.d}{\cos.(p+d)} \cdot \frac{s^2}{2}\right)$.

Dagegen für die obere Culmination auf der Nordseite:

1) annähernd $p = h - d$, und schärfer

2) $p = h - d + \alpha + \frac{\cos.p \sin.d}{\cos.(p+d)} \cdot \frac{s^2}{2}$,

und für die untere Culmination:

1) annähernd $p = h + d$, und schärfer

2) $p = h + d - \alpha - \frac{\cos.p \sin.d}{\cos.(p-d)} \cdot \frac{s^2}{2}$.

Bei einer Reihe von Beobachtungen führt man natürlich für h, α und $\frac{s^2}{2}$ Mittelwerthe ein.

Beispiel. Den 11. März 1794 wurden in Göttingen folgende Circummeridianhöhen der Sonne beobachtet:

Uhrzeit der Beobachtung.	Zenithdistanz des obern Sonnenrandes.
23 Uhr 57′, 30″	54⁰, 45′, 45″
23 » 58′, 32″	54⁰, 45′, 32″
0 » 1′, 0″	54⁰, 45′, 20″
0 » 3′, 25″	54⁰, 45′, 27″
0 » 4′, 28″	54⁰, 45′, 35″
0 » 5′, 55″	54⁰, 45′, 50″
Mittelwerth:	54⁰, 45′, 34″,8,
also die mittlere Höhe:	35⁰, 14′, 25″,2.

Die mittägige Poldistanz der Sonne war den Ephemeriden zu Folge, $d = 93^0, 30', 38''$; und daher die vorläufige Polhöhe

$$= 180^0 - (93^0, 30', 38'' + 35^0, 14', 25'',2)$$
$$= 180^0 - 128^0, 45', 3'',2 = 51^0, 14', 56'',8,$$

wofür, wegen der circa $60''$ tang. $54^0, 45' = 85''$ betragenden Refraction und zumal wegen des scheinbaren Sonnenhalbmessers von $16', 8'',1$ zu setzen ist: $p = 51^0, 33'$. Hiernach folgt nun:

$$\frac{\cos.p \sin.d}{2\cos.(p+d)} = \frac{\cos. 51^0, 33' \sin. 93^0, 30', 38''}{2 \cos. 145^0, 3', 38''} = -0,3785.$$

Die Abweichungen der Beobachtungszeiten von der Zeit 0 Uhr 1 Min. 19 Sec., welche die Uhr zu Mittag anzeigt, sind:

— 3′, 49″	in Bogen =	0⁰, 57′, 15″	die Quadrate der Sinus der Winkel	0,0002773
— 2′, 47″		0⁰, 41′, 45″		0.0001474
— 0′, 19″		0⁰, 4′, 45″		0,0000022
+ 2′, 6″		0⁰, 31′, 30″		0,0000840
+ 3′, 9″		0⁰, 47′, 15″		0,0001889
+ 4′, 36″		1⁰, 9′, 0″		0,0004028

Hiernach ist das Mittel von s^2 oder $\left(\frac{\sin. s}{2}\right)^2 = 0,0001821$

und daher $\frac{\cos.p \sin.d}{\cos.(p+d)} \cdot \frac{s^2}{2} = -0,3785 \,.\, 0,0001821$

$= - 0,00006892$, in Secunden $= - 206265'' \,.\, 0,00006892$
$= - 14'',2$.

Da die Veränderlichkeit der Declination sehr klein ist, so läßt sie sich außer Acht lassen, und daher setzen:

$$p = 180^0 - \left(h + d - \frac{cos.\, p\; sin.\, d}{cos.\, (p + d)} \cdot \frac{s^2}{2}\right)$$

$$= 51^0, 14', 56'', 8 - 14'', 2 = 51^0, 14', 42'', 6.$$

Hierzu aber kommt der

Sonnenhalbmesser . . . . = 0°, 16′, 8″,1,
der Refractionswinkel . . . . = 0°, 1′, 20″,5,
und die Parallaxe . . — 8″,55 $cos.\, 35^0$ = — 0°, 0′, 6″,8;
daher folgt die gesuchte Polhöhe oder Breite von Göttingen:

$$p = 51^0 + 14', 42'', 6 + 0^0, 17', 21'', 8 = 51^0, 32', 4'', 6.$$

Es läßt sich die Polhöhe eines Ortes auch ohne einen Verticalkreis und zwar durch bloßes Ablesen am Horizontalkreis, bei der Beobachtung zweier Circumpolarsterne in ihren entgegengesetzten größten Azimuthen bestimmen.

Die Differenz c der beiden Ablesungen ist die Summe der beiden unbekannten größten Azimuthalwinkel a und a_1. Es ist $\frac{a + a_1}{2} = \frac{c}{2}$ bekannt, und $\frac{a - a_1}{2}$ durch die Formel

$$tang. \frac{a - a_1}{2} = \frac{tang. \frac{1}{2} (d - d_1)}{tang. \frac{1}{2} (d + d_1)}\; tang. \frac{c}{2},$$

in welcher d und d_1 die aus den astronomischen Ephemeriden zu nehmenden Poldistanzen der beiden Sterne bezeichnen, zu berechnen.

Nun folgt

$$a = \frac{a + a_1}{2} + \frac{a - a_1}{2},$$

$$a_1 = \frac{a + a_1}{2} - \frac{a - a_1}{2},$$

und hieraus die gesuchte Polhöhe p mittels der Formel

$$cos\; p = \frac{sin.\, d}{sin.\, a} = \frac{sin.\, d_1}{sin.\, a_1}.$$

§. 17. Geographische Länge. Der geographische Längenunterschied zweier Orte wird angegeben durch den in Bogen verwandelten Unterschied zwischen den einerlei Augenblick entsprechenden Zeiten dieser Orte. Wird daher an beiden Orten eine und dieselbe momentane Erscheinung beobachtet, so findet man den Längenunterschied, wenn man die Beobachtungszeiten von einander subtrahirt und in Bogen verwandelt. Bei kleinen Entfernungen von höchstens 10 Meilen bedient man sich hierzu mit großer Sicherheit der Racketen oder Pulversignale, die man auf einem Berge in der Nähe dieser Orte entzündet. Auch lassen sich hierzu die electrischen Telegraphen benutzen, da die Geschwindigkeit des electrischen Stromes in den Leitungsdrähten mindestens 30000 geographische Meilen beträgt.

Die Beobachtungen der Verfinsterungen des Mondes oder der Trabanten des Jupiters geben wenig Genauigkeit. Viel schärfer sind die Sonnenfinsternisse und andere Sternbedeckungen

durch den Mond zu beobachten; nur stehen diese Hülfsmittel nicht zu allen Zeiten zu Gebote. Dagegen sind die Beobachtungen der Orte des mit großer Geschwindigkeit (beinahe 15° täglich) an dem Fixsternhimmel sich fortbewegenden Mondes zur Zeitbestimmung sehr geeignet, da man in den Mondtafeln diese Orte für jede Zeit genau angegeben findet. Was auch an der Genauigkeit einer einzigen Beobachtung abgeht, wird durch die Vervielfältigung der Beobachtungen ersetzt.

Sehr einfach ist die Lösung dieser Aufgabe, wenn man an beiden Orten den Zeitunterschied zwischen den Culminationen des Mondes und eines Fixsternes beobachtet. Ist dieser Unterschied an einem Orte um τ'' Sternzeit größer als am anderen Orte, und ist die Veränderung der Rectascension des Mondes in einer Stunde Sternzeit, $= t''$, so hat man den gesuchten **Längenunterschied**:

$$\lambda = \left(54000'' \cdot \frac{1}{t} - 1\right)\tau.$$

Z. B. man hat beobachtet die Culminationszeit

	in Gotha:	in Mannheim:
vom Monde . . .	13 St. 47′, 32″,45	13 St. 47′, 53″,0
von α in der Jungfrau	13 » 14′, 17″,87	13 » 14′, 17″,2
Unterschiede:	0 St. 33′, 14″,58	0 St. 33′, 35″,8;

hiernach ist also $\tau = 21'',22$. Die stündliche Aenderung der Rectascension des Mondes war aber nach den Ephemeriden, $t = 0^{0}, 34', 44'',998 = 2084'',998$; folglich ist der gesuchte Längenunterschied beider Orte:

$$\lambda = \left(\frac{54000''}{2084'',998} - 1\right) \cdot 21'',22 = \frac{51915{,}002 \,.\, 21{,}22}{2084{,}998}$$

$= 528'',36 = 0$ St. $8', 48'',36 \ldots$ Zeit, $= 2^{0}, 12', 5'',4$ Bogen.

Um gleich in einer Nacht eine Reihe von Beobachtungen anstellen und aus deren Ergebnissen einen Mittelwerth nehmen zu können, mißt man die in den Ephemeriden sehr genau angegebenen Monddistanzen von einem Sterne. Ist t_1 die Sternzeit der Beobachtung, t dagegen die derselben Monddistanz entsprechende Sternzeit nach den Ephemeriden, so hat man den Längenunterschied zwischen dem Orte der Beobachtung und dem für die Ephemeriden:

$$\lambda = t_1 - t \text{ in Zeit}, = 15\,(t_1 - t) \text{ in Bogen}.$$

Sind a, h und d die scheinbaren oder beobachteten Höhen und die Distanz der Gestirne, a_1, h_1 und d_1 aber die wahren Höhen und die wahre Distanz derselben, so hat man

$$\sin. \tfrac{1}{2} d_1 = \cos. n \cos. \left(\frac{a_1 + h_1}{2}\right),$$

wobei die Hülfsgröße n bestimmt ist durch die Gleichung:

$$(\sin. n)^2 = \frac{\cos. \frac{1}{2}(a+h+d) \cos. \frac{1}{2}(a+h-d)}{[\cos. \frac{1}{2}(a_1+h_1)]^2} \cdot \frac{\cos. a_1 \cos. h_1}{\cos. a \cos. h}.$$

Beispiel. In Seeberg wurde am 9. Septbr. 1792 um 20 Uhr 3 Min. 29,2 Sec. wahrer Zeit des Morgens die Distanz der beiden inneren Ränder der Sonne und des Mondes

$= 67^0, 36', 50''$ beobachtet und es war für diese Zeit die Höhe des oberen Sonnenrandes, $a = 22^0, 58', 34'',4$, die des oberen Mondrandes aber $h = 55^0, 58', 54'',0$.

Die Ephemeriden geben für dieselbe Zeit

	der Sonne	des Mondes
den horizontalen Halbmesser	$= 957'',4,$	$= 878'',0$
die horizontale Parallaxe . .	$= 7'',8,$	$= 3250'',6$
die Refraction	$= 135'',0,$	$= 38'',9,$

und hiernach berechnet sich die Höhenparallaxe

der Sonne $p = 7'',8 \cos. a = 7'',2$

des Mondes $p_1 = 3250'',6 \cos. h = 1830''$,

der vergrößerte Halbmesser

der Sonne $= 957'',4 (1 + p \sin. a \sin. 1'') = 957'',4$,

des Mondes $= 878 (1 + p_1 \sin. h \sin. 1'') = 900'',0$.

Jetzt folgt die scheinbare Centraldistanz zwischen Sonne und Mond:

$d = 67^0, 36', 50'' + 957'',4 + 900'' = 68^0, 7', 47'',4$;

ferner die scheinbare Höhe

des Sonnenmittels $= 22^0, 58', 34'',4 - 957'',4 = 22^0, 42', 37''$

des Mondmittels $= 55^0, 58', 54'',0 - 900'' = 55^0, 43', 54''$

die wahre Höhe

des ersteren $= 22^0,42',37'' - 135'' + 7'',2 = 22^0,40',29'',2$

und des letzteren $= 55^0,43',54'' - 38'',9 + 1830'' = 56^0,13',45''$.

Mit Hülfe dieser Werthe ergiebt sich:

$$(\sin. n)^2 = \frac{\cos. 73^0, 17', 9'',2 \cos. 5^0, 9', 21'',8}{(\cos. 39^0, 27', 7'',1)^2} \cdot \frac{\cos. 22^0, 40', 29'',2 . \cos. 56^0, 13', 45''}{\cos. 22^0, 42', 37'' . \cos. 55^0, 43', 54''};$$

hiernach $\log. \sin. n = 9,8380683$, $n = 43^0, 31', 55'',5$,

folglich $\sin. \frac{1}{2} d_1 = \cos. 43^0, 31', 55'',5 \cos. 39^0, 27', 7'',1$,

$\log. \sin. \frac{1}{2} d_1 = 9,7480372$, $\frac{1}{2} d_1 = 34^0, 2', 32'',5$,

und sonach die wahre Centraldistanz $d_1 = 68^0, 5', 5''$.

Nun ist aber um

18 Uhr $0', 0''$ wahre Zeit in Paris $d_1 = 68^0, 45', 50''$

21 » $0', 0''$ » » » » $= 67^0, 24', 28''$;

folglich die Abnahme dieser Distanz in 3 St. $= 1^0, 21', 22''$,

und die Pariser Zeit, welche der Abnahme

$68^0, 45', 50'' - 68^0, 5', 5'' = 0$ St. $40', 45''$ entspricht,

$$= 18 \text{ St.} + \frac{40', 45'' . 3}{1^0, 21', 22''} = 19 \text{ St. } 30', 8'',8.$$

Da aber die Zeit der Gothaer Sternwarte (Seeberg) $= 20$ St. $3', 29'',2$ betrug, so ist die gesuchte Längendifferenz $= 0$ St. $33', 20'',4$.

Bei Anwendung des Theodoliten muß man eine Reihe von Beobachtungen anstellen, und hierbei die einerlei Zeit entsprechenden Höhen- und Azimuthalwinkel durch Interpolation, und hieraus erst die Distanzen berechnen.

Das einfachste Mittel zur Bestimmung der Längenunterschiede

gewähren die Uhren oder Chronometer, mit welchen man sich von dem einen Orte nach dem andern begiebt. Die Abweichung der nach dem ersten Orte gestellten Uhrzeit von der Uhrzeit des zweiten Ortes ist der gesuchte Längenunterschied. Wie hierbei zu rechnen ist, giebt folgendes Beispiel an die Hand. Den 29. Mai 1786 fand Zach, daß sein Chronometer gegen London am Mittag 2″,1 nachging und aus den früheren Beobachtungen entnahm er, daß er täglich 0″,1715 zurückblieb. Den 27. Juni kam er auf der Sternwarte Seeberg an, und fand, daß diese Uhr am Mittage 23 St. 19′, 3″,4 anzeigte. Nun ist aber nach den Ephemeriden die mittlere Zeit am wahren Mittage in London den 27. Juni = 0 St. 2′, 34″,3; ferner die Verspätung des Chronometers

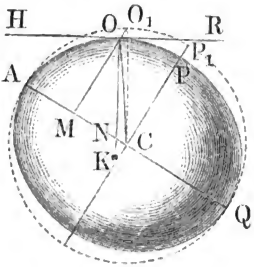
$$= 2'',1 + 0{,}1715 \,.\, 29 = \qquad 7'',07$$

daher ist nach dem Chronometer den 27. Juni die Zeit des wahren Mittages in London = 0 St. 2 Min. 27″,23 und die gesuchte Längendifferenz zwischen beiden Orten

= 0 St. 2′, 27″,23 + 24 St. − 23 St. 19′, 3″,40
= 0 St. 43′, 23″,83.

§. 18. Dimensionen der Erde. Obgleich der Umfang des Erdmeridians nach der ursprünglichen Bestimmung 40 Millionen, also der Quadrant desselben = 10 Millionen Meter enthalten soll, so ist doch nach einer neueren Berechnung von Bessel (s. Poggendorff's Ann. Bd. 42 und Bd. 55) der letztere = 10′000855,76 Meter und hiernach der Halbmesser des Aequators, Fig. 152, $CA = a = 3272077{,}14$ Toisen, und die halbe Erdaxe $CP = b = 3261139{,}33$ Toisen, folglich die Abplattung

Fig. 152.



$$\alpha = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{299{,}15},$$

d. i. nahe $^1/_{300}$, und die Excentricität

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = \sqrt{0{,}00672} = 0{,}082.$$ Auch ist

$$a = \frac{5400}{2\pi} = 859{,}4367 \text{ geographische Meilen, und}$$

$$b = 856{,}5640 \text{ geographische Meilen.}$$

Die Toise ist = 6 alte Pariser Fuß = 1,94903631 Meter, und eine geographische Meile enthält hiernach 3807,232 Toisen.

Ist die Polhöhe des Ortes O: $ANO = p$ und dagegen die geocentrische Breite desselben $ACO = p_1$, so hat man $tang.\, p_1 = \frac{b^2}{a^2}\, tang.\, p$, und hiernach für den der Kugelgestalt entsprechenden Hülfswinkel $ACO_1 = p_2$,

$$tang.\, p_2 = \frac{b}{a}\, tang.\, p = \frac{a}{b}\, tang.\, p_1.$$

Ferner für die Coordinaten $CM = x$ und $MO = y$,

$$x = a\, cos.\, p_2 \text{ und } y = b\, sin.\, p_2,$$

und für den Radiusvector $CO = r$,

$$r = \sqrt{a^2 cos.\, p_2^2 + b^2 sin.\, p_2^2} = \sqrt{\frac{a^4 + b^4 tang.\, p^2}{a^2 + b^2 tang.\, p^2}}$$

$$= a \sqrt{\frac{cos.\, p}{cos.\, p_1\, cos.\, (p - p_1)}}.$$

Der Halbmesser eines Parallelkreises ist:

$$CM = x = r\, cos.\, p_2 = \frac{a^2 cos.\, p}{\sqrt{a^2 cos.\, p^2 + b^2 sin.\, p^2}}$$

$$= \frac{a\, cos.\, p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 sin.\, p^2}}.$$

Ein Längengrad

$$= \frac{\pi x}{180^0} = \frac{\pi\, a\, cos.\, p}{180^0 \sqrt{1 - \varepsilon^2 sin.\, p^2}}.$$

Der Krümmungshalbmesser $KO = r_1$ ist

$$r_1 = \frac{\sqrt{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^3}}{a^4\, b^4} = \frac{(1 - \varepsilon^2)\, a}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2 sin.\, p^2)^3}}, \text{ annähernd}$$

$$= a\, [1 - \alpha\, (2 - 3\, sin.\, p^2)]$$

und hiernach ein Breitengrad

$$= \frac{\pi\, r_1}{180^0} = \frac{\pi\, a}{180^0} [1 - \alpha\, (2 - 3\, sin.\, p^2)].$$

(Wegen der Länge eines Meridianbogens s. Seite 172.)

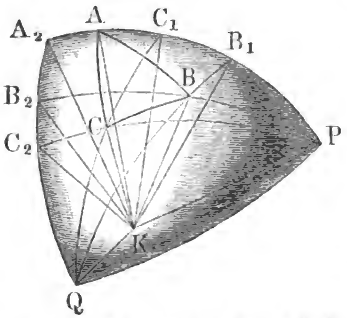
Die Messungen auf dem Erdsphäroid lassen sich auf sphäroidische Dreiecke zurückführen, deren Auflösung die sogenannte sphäroidische Trigonometrie lehrt; haben diese Dreiecke eine mäßige Größe, so lassen sie sich als sphärische Dreiecke behandeln, und messen die Seiten dieser Dreiecke noch nicht eine Meile, so kann man diese sogar wie geradlinige oder ebene Dreiecke auflösen, wenn man nur den sphärischen Exceß, d. i. die Größe, um welche ihre Winkelsumme größer als zwei Rechtwinkel ist, gleichmäßig vertheilt, nämlich jeden der drei Winkel um den dritten Theil dieses Excesses vermindert. Diese Methode gewährt noch den Vortheil, daß bei ihr auch die Beobachtungsfehler mit ausgeglichen werden. Sind A, B und C, Fig. 153, die gemessenen Winkel des Dreieckes ABC, und ist $BC = a$ die durch Auflegen von Meßstäben gefundene Seite desselben, so findet man hiernach die anderen Seiten $AC = b$ und $AB = c$, wenn man setzt: $E = A + B + C - 180^0$, durch die Formeln:

$$b = \frac{a\, sin.\left(B - \frac{E}{3}\right)}{sin.\left(A - \frac{E}{3}\right)} \text{ und } c = \frac{a\, sin.\left(C - \frac{E}{3}\right)}{sin.\left(A - \frac{E}{3}\right)}.$$

Kennt man den Azimuthalwinkel PAB der Seite c von A aus, und die Breite $A_2 A$ von A, so kann man nun auch

durch Auflösung von sphärischen Dreiecken, die Breiten- und Längenunterschiede der übrigen Eckpunkte, sowie die Azimuthalwinkel der übrigen Seiten finden. Z. B. die Auflösung des Dreieckes APB giebt aus $AB = c, AP = 90 - AA_2 = 90 - p$ (Breite) und den Azimuthalwinkel BAP nach Tabelle auf S. 198 das Complement PB der Breite BB_2 von B zu einem Rechtwinkel, sowie den Längenunterschied

Fig. 153.



$$A_2B_2 = \angle APB$$

und den Azimuthalwinkel ABP der Seite AB von B aus.

Sind BB_1 und CC_1 größte Kugelkreisbögen, welche auf dem Meridian A_2P von A rechtwinkelig stehen, und keineswegs mit den Parallelkreisbögen durch B und C zusammenfallen, so bilden $AB_1 = x$ und $B_1B = y$ u. s. w. rechtwinkelige Coordinaten, welche die Lage von B u. s. w. gegen A bestimmen, und sich nach Formeln in Tabelle S. 196 berechnen lassen. Bei Punkten, welche nur eine oder wenige Meilen entfernt sind, läßt sich auch die ebene Trigonometrie anwenden und setzen

$$x = AB_1 = AB \,.\, cos. BAP, \; y = BB_1 = AB \,.\, cos. BAP,$$

ebenso für den Punkt C:

$$x_1 = AC_1 = AC \, cos. CAP \text{ und } y_1 = CC_1 = AC \, cos. CAP.$$

Uebrigens hat man sehr einfach den Winkel $APB = \varphi$, um welchen die Meridiane durch A und B von einander abweichen, annähernd:

$$\varphi'' = 0{,}03240 \,.\, y \, tang. p,$$

wo p die Polhöhe bezeichnet und y in Metern gegeben sein muß.

Beispiel. Von einem Dreiecke ABC wurden gefunden:

$$A = 56^0, 51', 28''$$
$$B = 66^0, \; 6', 17''$$
$$C = 57^0, \; 2', 24''$$

$$\text{Summe} = 180^0, 0', \; 9'', \text{ also } \frac{E}{3} = 3''$$

es ist deshalb zu setzen:

$$A = 56^0, 51', 25'',$$
$$B = 66^0, \; 6', 14'' \text{ und}$$
$$C = 57^0, \; 2', 21''.$$

Die Seite $AB = c$ ergab sich durch Anlegung von Meßstäben $= 414{,}889$ Ruthen, und es berechnen sich daher hiernach die übrigen Seiten:

$$a = \frac{c \, sin. A}{sin. C} = 414{,}036 \text{ R. und } b = \frac{c \, sin. B}{sin. C} = 452{,}095 \text{ R.}$$

Der Azimuthalwinkel BAP war $35^0, 16', 15''$, folglich sind die Coordinaten:

$$AB_1 = x = c\,cos.\,35^0, 16', 15'' = 338{,}729 \text{ R.},$$
$$B_1B = y = c\,sin.\,35^0, 16', 15'' = 239{,}574 \text{ R.};$$

endlich ergiebt sich die Convergenz der Meridiane AP und BP, da 1 Ruthe = 3,766 Meter ist und die Polhöhe von $A = 51^0$ beträgt,

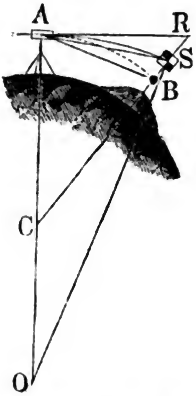
$$\varphi'' = 0{,}0324 \,.\, 3{,}766 \,.\, 239{,}574 \,.\, tang.\, 51^0 = 36{,}0 \text{ Sec.}$$

Ist h die Höhe einer horizontalen Seite a über dem Meeresspiegel in Metern, so ist dieselbe auf den Meeresspiegel reducirt,

$$a_1 = \left(1 - \frac{h}{6366200}\right) a.$$

§. 19. Nivelliren und Höhenmessen. Die Depression $BR = a$ des wahren Horizontes AB, Fig. 154, unter der Horizontalebene AR in A folgt aus der Entfernung $AB = d$ und dem Erdhalbmesser $AC = BC = r$ durch folgende Formel:

Fig. 154.



$$a = \frac{d^2}{2r},$$ oder, wenn d in Ruthen zu 12 Fuß gegeben ist, da $r = 1690312{,}5$ Ruthen,

$$a = \frac{d^2}{3380625} \text{ Rth.} = \frac{d^2}{281719} \text{ Fuß}$$
$$= \frac{d^2}{23477} \text{ Zoll.}$$

Der Depressionswinkel BAR ist $= \frac{1}{2}$ Centriwinkel $ACB = \frac{1}{2}\, C$,

$$= 206265'' \cdot \frac{d}{r},$$ und wenn d in Ruthen gegeben ist,

$$C = 0{,}122022'' \,.\, d.$$

Der Halbmesser $OA = OS = r_1$ der Refraction ist 7- bis 8mal so groß als der Erdhalbmesser $CA = r$, folglich der Refractionswinkel $RAS = \varrho = \frac{1}{2} AOS = \frac{1}{14}$ bis $\frac{1}{16}$ des Centriwinkels ACB. Nach Delambre soll man im Mittel, sowie im Herbst und im Frühling, $\varrho = 0{,}08\, C$, im Sommer aber $\varrho = 0{,}075\, C$ und im Winter $= 0{,}09$ bis $0{,}1\, C$ setzen. Uebrigens hängt ϱ auch von der Witterung ab, und verändert sich namentlich bei feuchter Witterung, Stürmen und Nebeln.

Der Depressionswinkel $\frac{1}{2}\, C$ wird durch den Refractionswinkel $RAS = 0{,}08\, C$ vermindert, so daß der wahre Horizont unter dem durch Visiren angegebenen Horizont nur um den Winkel

$$BAS = \tfrac{1}{2} C - 0{,}08\, C = (1 - 0{,}16)\frac{C}{2} = 0{,}84 \cdot \frac{C}{2}$$
$$= 0{,}05125'' \,.\, d,$$ oder um die Höhe

$$BS = z = 0{,}84 \cdot \frac{d^2}{2r} = \frac{d^2}{27953} \text{ Zoll}$$

tiefer liegt. Diese Correction ist nur bei einem Nivellement aus dem Ende nöthig, bei Nivellements aus der Mitte hingegen

ist dieselbe nicht vorzunehmen, da hier eine Ausgleichung statt hat. Zur Erleichterung der Rechnung dient folgende

Tabelle

der Höhen, um welche der wahre Horizont unter dem scheinbaren liegt, bei Entfernungen von 25 zu 25 Ruthen.

Entfernung in Ruthen, zu je 12 Fuß.	Depression des wahren Horizontes	Elevation durch Refraction	Tiefe des wahren Horizontes unter dem scheinbaren	Entfernung in Ruthen, zu je 12 Fuß.	Depression des wahren Horizontes	Elevation durch Refraction	Tiefe des wahren Horizontes unter dem scheinbaren
	in Fußen.				in Fußen.		
25	0,002	0,000	0,002	775	2,132	0,349	1,783
50	0,009	0,002	0,007	800	2,272	0,372	1,900
75	0,020	0,003	0,017	825	2,416	0,396	2,020
100	0,035	0,005	0,030	850	2,565	0,421	2,144
125	0,055	0,009	0,046	875	2,718	0,446	2,272
150	0,079	0,013	0,066	900	2,875	0,472	2,403
175	0,109	0,018	0,091	925	3,037	0,500	2,537
200	0,142	0,023	0,119	950	3,204	0,527	2,677
225	0,179	0,029	0,150	975	3,375	0,556	2,819
250	0,222	0,035	0,187	1000	3,550	0,585	2,965
275	0,268	0,043	0,225	1025	3,730	0,615	3,115
300	0,319	0,051	0,268	1050	3,914	0,645	3,269
325	0,375	0,060	0,315	1075	4,102	0,676	3,426
350	0,435	0,069	0,366	1100	4,295	0,708	3,587
375	0,499	0,079	0,420	1125	4,493	0,740	3,753
400	0,568	0,090	0,477	1150	4,695	0,773	3,922
425	0,641	0,103	0,538	1175	4,901	0,806	4,095
450	0,719	0,115	0,604	1200	5,111	0,840	4,271
475	0,801	0,128	0,673	1225	5,327	0,875	4,452
500	0,887	0,142	0,745	1250	5,546	0,910	4,636
525	0,978	0,157	0,821	1275	5,770	0,946	4,824
550	1,074	0,173	0,901	1300	5,999	0,982	5,017
575	1,174	0,190	0,984	1325	6,232	1,019	5,213
600	1,278	0,207	1,071	1350	6,469	1,057	5,412
625	1,387	0,226	1,161	1375	6,711	1,095	5,616
650	1,500	0,244	1,256	1400	6,957	1,134	5,823
675	1,617	0,264	1,353	1425	7,208	1,173	6,035
700	1,739	0,284	1,455	1450	7,463	1,213	6,250
725	1,866	0,305	1,561	1475	7,722	1,254	6,468
750	1,997	0,327	1,670	1500	7,986	1,295	6,691

Beim **trigonometrischen Höhenmessen** berechnet man den Niveauabstand zwischen zwei Punkten A und B aus dem Elevationswinkel $SAR = \alpha$, Fig. 155 (a. f. S.), und der Entfernung $AB = d$ durch folgende Formeln. Der um den Refractionswinkel $SAS_1 = \varrho$ corrigirte Höhenwinkel ist

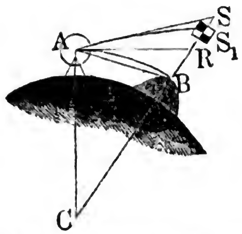
$$RAS_1 = \alpha_1 = \alpha - \varrho = \alpha - 0{,}08C,$$

und die Sehne

$$AB = s = d\left[1 - {}^1/_{24}\left(\frac{d}{r}\right)^2\right],$$

wo $r = CA = 1690312$ Ruthen zu nehmen ist, und hieraus folgt die gesuchte Höhe $BS_1 =$

Fig. 155.



$$h = \frac{s\,sin.\left(\alpha_1 + \frac{C}{2}\right)}{cos.\,(\alpha_1 + C)}$$

für kleine Distanzen aber

$$h = s\,tg.\left(\alpha_1 + \frac{C}{2}\right)$$
$$= s\,tg.\left(\alpha - \varrho + \frac{C}{2}\right)$$
$$= s\,tg.\,(\alpha + 0{,}42\,C).$$

Um den wahren Niveauabstand zu finden, hat man zu h noch die Instrumenthöhe zu addiren, und die Signalhöhe zu subtrahiren.

Kann man auch aus dem anderen Ende zurück nach dem ersten visiren, so erhält man einen anderen Elevationswinkel β, und es folgt nun der Refractionswinkel

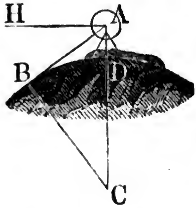
$$\varrho = \frac{\alpha + \beta + C}{2},$$

und daher genauer

$$h = \frac{s\,sin.\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)}{cos.\left(\frac{\alpha - \beta + C}{2}\right)}.$$

Um die Erhebung eines Punktes A, Fig. 156, über den Meeresspiegel zu finden, hat man die Depression $BAH = \alpha$ des sichtbaren Horizontes BD unter dem Horizonte AH des Ortes A zu messen. Aus diesem Winkel und dem Halbmesser $CB = CD = r$ folgt dann

Fig. 156.



$$h = \left(\frac{1 - cos.\,\alpha}{cos.\,\alpha}\right) r,$$

und die Entfernung $AB = d = r\,tg.\,\alpha$, umgekehrt aber

$$cos.\,\alpha = \frac{r}{r + h}.$$

Mit Berücksichtigung der Refraction giebt für

$h = 1$ par. Fuß,	$\alpha = 0^0, 1', 1''$	und	$d = 0{,}258$	geogr. M.
$h = 10$ » »	$\alpha = 0^0, 8', 12''$	»	$d = 0{,}796$	» »
$h = 50$ » »	$\alpha = 0^0, 7', 9''$	»	$d = 1{,}788$	» »
$h = 100$ » »	$\alpha = 0^0, 10', 6''$	»	$d = 2{,}526$	» »
$h = 200$ » »	$\alpha = 0^0, 14', 18''$	»	$d = 3{,}376$	» »
$h = 300$ » »	$\alpha = 0^0, 17', 30''$	»	$d = 4{,}386$	» »
$h = 400$ » »	$\alpha = 0^0, 20', 12''$	»	$d = 5{,}052$	» »
$h = 500$ » »	$\alpha = 0^0, 22', 35''$	»	$d = 5{,}652$	» »

§. 20. **Barometrisches Höhenmessen.** Sind
b_1 und b_2 die beobachteten Barometerstände,
t_1 und t_2 die entsprechenden Lufttemperaturen,
τ_1 und τ_2 die entsprechenden Quecksilbertemperaturen,

ist ferner h der gesuchte Niveauabstand,
r der Erdhalbmesser und
p die mittlere Polhöhe beider Orte,

so hat man nach Laplace und Gauß, wenn man die Temperaturen nach der Centesimaleintheilung angiebt:

$$h = 18336\,(1 + 0{,}002845\ cos.\ 2\,p)\left(1 + \frac{t_1 + t_2}{500}\right)$$
$$\left(\left(1 + \frac{h}{r}\right) log. \left[\left(1 + \frac{\tau_2 - \tau_1}{5550}\right)\frac{b_1}{b_2}\right] + 0{,}8686\,\frac{h}{r}\right)$$

Meter, oder wenn man die Temperatur in Reaumur'schen Graden ausdrückt:

$$h = 18336\,(1 + 0{,}002845\ cos.\ 2\,p)\left(1 + \frac{t_1 + t_2}{400}\right)$$
$$\left(\left(1 + \frac{h}{r}\right) log. \left[\left(1 + \frac{\tau_2 - \tau_1}{4440}\right)\frac{b_1}{b_2}\right] + 0{,}8686\,\frac{h}{r}\right) \text{ Meter,}$$

und es ist hierbei rechts statt h ein Näherungswerth einzusetzen.

Am bequemsten rechnet man mit Hülfe folgender Tabellen von Gauß, welche die Anwendung fünfstelliger Logarithmen und die Temperaturen in Reaumur'schen Graden ausgedrückt, voraussetzt.

Tafel I.

Argument $t_1 + t_2$.

$t_1 + t_2$	A	$t_1 + t_2$	A	$t_1 + t_2$	A
— 10°	4,25337	+ 11°	4,27620	+ 31°	4,29689
9	4,25448	12	4,27726	32	4,29790
8	4,25560	13	4,27832	33	4,29891
7	4,25671	14	4,27937	34	4,29991
6	4,25781	15	4,28042	35	4,30092
5	4,25892	16	4,28147	36	4,30192
4	4,26002	17	4,28251	37	4,30291
3	4,26111	18	4,28356	38	4,30391
2	4,26220	19	4,28460	39	4,30490
1	4,26330	20	4,28564	40	4,30589
0	4,26439	21	4,28667	41	4,30688
+ 1°	4,26548	22	4,28770	42	4,30787
2	4,26657	23	4,28874	43	4,30885
3	4,26765	24	4,28976	44	4,30984
4	4,26872	25	4,29079	45	4,31082
5	4,26980	26	4,29181	46	4,31179
6	4,27087	27	4,29283	47	4,31277
7	4,27195	28	4,29385	48	4,31374
8	4,27301	29	4,29487	49	4,31471
9	4,27408	30	4,29588	50	4,31568
10	4,27514				

Tafel II.

Argument p.

p	c	p	p	c	p	p	c	p
0°	124	90°	16°	105	74°	31°	58	59°
1	123	89	17	102	73	32	54	58
2	123	88	18	100	72	33	50	57
3	123	87	19	97	71	34	46	56
4	122	86	20	95	70	35	42	55
5	122	85	21	92	69	36	38	54
6	121	84	22	89	68	37	34	53
7	120	83	23	86	67	38	30	52
8	119	82	24	83	66	39	26	51
9	118	81	25	79	65	40	21	50
10	116	80	26	76	64	41	17	49
11	115	79	27	73	63	42	13	48
12	113	78	28	69	62	43	9	47
13	111	77	29	65	61	44	4	46
14	109	76	30	62	60	45	0	45
15	107	75						

Tafel III.

Argument v.

v	c_1	v	c_1
1,9	+ 1	3,0	+ 7
2,3	1	3,1	9
2,4	2	3,2	11
2,5	2	3,3	14
2,6	3	3,4	17
2,7	3	3,5	22
2,8	4	3,6	27
2,9	5	3,7	34

c ist negativ, wenn die Polhöhe p des Ortes über 45° und positiv, wenn p unter 45° beträgt. Uebrigens sind c und c_1 in Einheiten der 5. Decimale gegeben, und $10\tau_1$ und $10\tau_2$ als Einheiten derselben Ordnung zu behandeln.

Der Gebrauch dieser Tabelle ist folgender.

Man ziehe zuerst von $log. b$, $10\tau_1$ und von $log. b_2$, $10\tau_2$ ab, jedoch mit Berücksichtigung der Zeichen von τ_1 und τ_2 und setze die Differenz $(log. b_1 - 10\tau_1) - (log. b_2 - 10\tau_2) = u$. Hierauf nehme man aus Tafel I. mit dem Argument $t_1 + t_2$,

den Werth A und aus Tafel II. mit dem Argument p den Werth c, und berechne hiernach $v = log.u + A + c$.

Endlich nehme man aus Tafel III. mittels v die Größe c_1, und setze

$v + c_1 = log.h$ in Metern, oder
$v + c_1 + 9{,}71018 = log.h$ in Toisen, oder
$v + c_1 + 0{,}50327 = log.h$ in preuß. Fußen.

Beispiel. Es ist

$b_1 = 316{,}27$ Lin., $t_1 = + 0^0{,}3$, $\tau_1 = 0^0{,}5$ R., endlich
$b_2 = 286{,}53$ » , $t_2 = - 1^0{,}9$, $\tau_2 = - 1^0{,}7$
$p = 48^0$.

Hiernach hat man $log.b_1 - 10\tau_1 = 2{,}50001$
$log.b_2 - 10\tau_2 = 2{,}45734$
$u = 0{,}04267$
$log.u = 8{,}63012$,
aus Tafel I. mit $t_1 + t_2 = - 1^0{,}6$, $A = 4{,}26264$,
aus Tafel II. mit $p = 48^0$, $c = \quad - 13$.
$v = 2{,}89263$,
aus Tafel III. mit $v = 2{,}9$, $c_1 = \quad 5$,
$log.h = 2{,}89268$;
folglich $h = 781{,}05$ Meter $+ 0{,}50327$,
oder $log.h_1 = 3{,}39595$,
also $h_1 = 2488{,}3$ Fuß.

Uebrigens hat man folgende Regeln in Obacht zu nehmen. Zu sicheren Beobachtungen sind zwei gute Barometer und zwei gute Thermometer nöthig. Die Beobachtungen sind möglichst gleichzeitig anzustellen und etwa von 10 zu 10 Minuten zu wiederholen. Es sind ferner vor und nach dem Gebrauche beide Instrumente sorgfältig mit einander zu vergleichen und nöthige Correctionen nicht zu unterlassen. Es ist zu den Beobachtungen ruhiges Wetter und wo möglich bedeckter Himmel auszuwählen; die Barometer und Thermometer sind stets im Schatten aufzuhängen und man soll auch nicht eher zu beobachten anfangen, als nachdem diese Instrumente längere Zeit darin befindlich gewesen sind.

§. 21. Das thermometrische Höhenmessen.

Wenn man mittels eines Hypsometers (von Regnault) die Temperatur des siedenden Wassers beobachtet, so läßt sich mit Hülfe der folgenden Tabelle der entsprechende Barometerstand bestimmen, und macht man diese Beobachtungen an zwei Orten, so kann man mit Anwendung der Regeln des vorigen Paragraphen den Höhenunterschied dieser Orte berechnen.

Da bei mittlerem Luftdrucke eine Abnahme des Barometerstandes von 1 Millimeter nur eine Senkung des Siedepunktes von $\frac{1}{27}$ Grad verursacht, so ist es nöthig, daß bei thermometrischen Höhenbestimmungen die Temperatur des siedenden Wassers mit der größten Genauigkeit ermittelt werde.

Tabelle

der Spannkraft des Wasserdampfes (Barometerstandes) für die Siedepunkte von 93° bis 101° C.

Siede-punkt in C°.	Spannkraft in Millimetern.	Differenz.	Siede-punkt in C°.	Spannkraft in Millimetern.	Differenz.
93,0	588,41		97,0	682,03	
		11,08			12,53
93,5	599,49		97,5	694,56	
		11,25			12,70
94,0	610,74		98,0	707,26	
		11,43			12,89
94,5	622,17		98,5	720,15	
		11,61			13,06
95,0	633,78		99,0	733,21	
		11,79			13,29
95,5	645,57		99,5	746,50	
		11,97			13,50
96,0	657,54		100,0	760,00	
		12,15			13,71
96,5	669,69		100,5	773,71	
		12,34			13,92
97,0	682,03		101,0	787,63	

Beispiel. Man hat beobachtet am unteren Standpunkte den Siedepunkt bei $\tau_1 = 97^0,35C$, und am oberen bei $\tau_2 = 99^0,75C$, und findet hiernach die entsprechenden Barometerstände

$$b_1 = 746,50 + \frac{25}{50} \cdot 13,50 = 746,50 + 6,75 = 753,25 \text{ Millim.,}$$

sowie

$$b_2 = 682,03 + \frac{35}{50} \cdot 12,53 = 682,03 + 8,77 = 690,80 \text{ Millim.}$$

Es ist nun $log. b_1 = 2,87694$
$log. b_2 = 2,83935$
folglich $u = 0,03756$
und $log. u = 8,57507.$

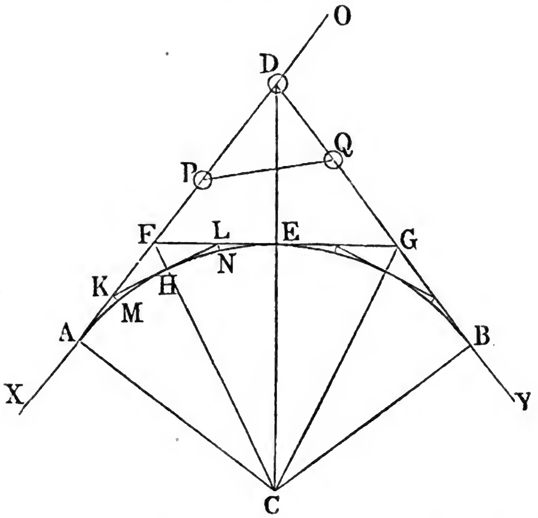
Hat man nun noch die Lufttemperaturen $t_1 = 8^0,8$ R und $t_2 = 6^0,5$ R, also $t_1 + t_2 = 15,3$, so folgt aus Tab. I. $A = 4,28042 + 0,3 \,.\, 0,00105 = 4,28071$, ist ferner die mittlere geographische Breite der beiden Orte $p = 52^0$, so folgt noch nach Tab. II., §. 20, $c = 0.00030$; so daß nun $v = 8,57507 + 4,28071 + 0,00030 = 2,85608$ folgt; da aber nach Tab. III. dem Werthe $v = 2,9$, $c_1 = 5$ entspricht, so folgt $log. h = 2,85613$, und $h = 718,00$ Meter, oder $= 2287,6$ Fuß.

Eisenbahnvermessungen.

§. 22. **Eisenbahncurven.** Die erste Absteckung einer Bahnstrecke besteht aus einer Verbindung von geraden Linien, wovon je zwei in einem Punkte, dem sogenannten **Brechpunkte**, zusammenstoßen; bei der weiteren Absteckung werden die an je einem Brechpunkte anliegenden Enden dieser geraden Strecken durch einen, oder nach Befinden, mehrere Kreisbögen ersetzt

Der Brechungswinkel $ODY = \delta$, Fig. 157, um welchen die geradlinigen Strecken XD und DY von einander abweichen, läßt sich mit Hülfe eines Theodoliten oder anderen

Fig. 157.



Winkelmeßinstrumentes bestimmen, und ist auch gleich dem Centriwinkel $ACB = 2\beta$ des Kreisbogens AEB, welcher sich an diese Strecken tangential anschließt und die Theile AD und BD derselben ersetzt. Es ist nicht nöthig, den Brechungswinkel $ODB = \delta$ unmittelbar auszumessen, es ist derselbe auch gleich der Summe der Winkel $\overline{DPQ} = P$ und $\overline{DQP} = Q$, welche eine beliebige Linie PQ mit den geraden Strecken DA und DB einschließt. Mißt man nun die Winkel P und Q, sowie die Länge der Linie $PQ = c$ unmittelbar, so erhält man

$$\angle ODB = \delta = 2\beta = P + Q,$$

$$DP = a_1 = \frac{c \sin. Q}{\sin. \delta} \text{ und}$$

$$DQ = a_2 = \frac{c \sin. P}{\sin. \delta}.$$

Aus dem gegebenen Curvenhalbmesser $CA = CB = CE = r$ folgt die Tangente

$$DA = DB = t = r \tang. \beta;$$

es sind daher die von P und Q aus abzuschneidenden und die Berührungspunkte A und B bestimmenden Stücke:

$$PA = s_1 = t - a_1 = r \tang. \beta - \frac{c \sin. Q}{\sin. \delta} \text{ und}$$

$$QB = s_2 = t - a_2 = r \tang. \beta - \frac{c \sin. P}{\sin. \delta}.$$

Um den Mittelpunkt E des Bogens $AEB = b = \frac{\delta^0 \pi r}{180^0}$ $= 0{,}0174533\, \delta^0 r$ zu finden, giebt man entweder mittels des Winkelmeßinstrumentes von D aus die durch den Winkel $\overline{ADC} = 90 - \beta$ bestimmte Richtung DC an und mißt die Secansexterna

$$DE = \frac{r}{cosin.\, \beta} - r = \frac{r\,(1 - cosin.\, \beta)}{cosin.\, \beta}$$

ab, oder man schneidet von A und B aus die Tangente

$$AF = BG = t_1 = r\, tang.\, \frac{\beta}{2}$$

ab, und trägt dieselbe in der Richtung von F nach G, oder in der von G nach F als $FE = GE$ auf.

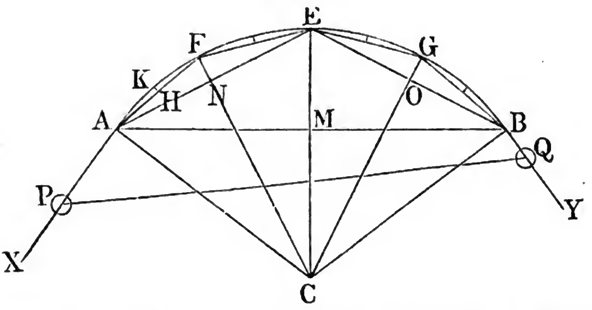
Um jede der Bogenhälften AE und BE noch ein Mal zu halbiren, hat man dasselbe Verfahren zu wiederholen, nämlich entweder

$$FH = \frac{r\left(1 - cosin.\, \frac{\beta}{2}\right)}{cosin.\, \frac{\beta}{2}} \text{ aufzutragen, oder}$$

$$AK = EL = KH = LH = r\, tang.\, \frac{\beta}{4} \text{ abzuschneiden, u. s. w.}$$

Wenn es der Raum nicht gestattet, Messungen außerhalb des Bogens AEB anzustellen, kann man auch den letzteren mittels der Sehnen u. s. w. abstecken. Zuerst mißt man von zwei in den geradlinigen Bahnstrecken XA und YB liegenden Punkten P und Q, Fig. 158, aus wieder die Winkel $\overline{APQ} = P$ und $\overline{BQP} = Q$,

Fig. 158.



sowie die Länge $PQ = c$ und berechnet hieraus den Brechungswinkel oder Centriwinkel

$$ACB = \delta = 2\beta = P + Q,$$

sowie die Strecke

$$PA = s_1 = \frac{c\, sin.\, Q}{sin.\, \delta} - r\, tang.\, \beta$$

und die Strecke

$$QB = s_2 = \frac{c \sin. P}{\sin. \delta} - r \tang. \beta.$$

Mit Hülfe der letzteren Formel bestimmen sich die Anschlußpunkte A und B; wenn man nun in der Richtung AB, $AM = BM = r \sin. \beta$ abmißt, und in der dadurch bestimmten Sehnenmitte M das Perpendikel

$$ME = r (1 - \cos. \beta)$$

errichtet, so erhält man dadurch den Mittelpunkt E des Bogens AEB.

Um nun die Bogenhälften von Neuem zu halbiren, mißt man in der Richtung von AE

$$AN = EN = r \sin. \frac{\beta}{2}$$

ab, und errichtet das Perpendikel

$$NF = r\left(1 - \cos. \frac{\beta}{2}\right);$$

auch halbirt man ferner, indem man

$$AH = FH = r \sin. \frac{\beta}{4} \text{ abmißt und}$$

$$HK = r\left(1 - \cos. \frac{\beta}{4}\right) \text{ aufträgt u. s. w.}$$

Mittels der vorstehenden Formeln sind die in der Tabelle auf Seite 293 u. s. w. enthaltenen Linienwerthe berechnet worden, und man kann sich daher bei Bestimmung derselben dieser Tabelle bedienen. Diese Werthe entsprechen sämmtlich dem Curvenhalbmesser $= 1000000$ und sind daher in den Fällen der Anwendung, bei gegebenem Radius $= r$, mit $\frac{r}{1000000} = 0{,}000001 \,.\, r$ zu multipliciren.

Folgende Beispiele werden den Gebrauch dieser Tabelle hinreichend erläutern.

Ist der durch Messung bestimmte Brechungswinkel $\delta = 38^0 40'$, also $\beta = 19^0{,}20'$, und soll der Curvenhalbmesser $r = 1600$ Fuß in Anwendung gebracht werden, so hat man die halbe Bogenlänge

$$AE = BE = b = 337430 \,.\, 0{,}000001 \,.\, 1600$$
$$= 337430 \,.\, 0{,}0016 = 539{,}888 \text{ Fuß},$$

ferner für die Absteckung mittels der Tangente (Fig. 157) die Tangentenlänge

$$DA = DB = t = 350848 \,.\, 0{,}0016 = 561{,}357 \text{ Fuß},$$

die Tangentenhöhe

$$DE = k = 59762 \,.\, 0{,}0016 = 95{,}619 \text{ Fuß};$$

dagegen ist für die Absteckung mittels der Sehne (Fig. 158) die halbe Sehnenlänge

$$AM = MB = s = 331063 \,.\, 0{,}0016 = 529{,}701 \text{ Fuß},$$

und die Bogenhöhe

$$ME = h = 56391 \,.\, 0{,}0016 = 90{,}226 \text{ Fuß}.$$

Will man die Bogenhälften von Neuem halbiren, so hat man $\beta = \frac{19^0{,}20'}{2} = 9^0{,}40'$ zu setzen, diesen Winkel in der ersten

Verticalcolumne aufzusuchen u. s. w. Man erhält für diese neue Theilung oder die der Bogenhälfte

$AH = HE = b_1 = 168715 . 0{,}0016 = 269{,}944$ Fuß,

ferner für die erste Absteckungsweise (Fig. 157) die Tangentenlänge

$AF = EF = t_1 = 170334 . 0{,}0016 = 272{,}534$ Fuß,

die Tangentenhöhe

$FH = k_1 = 14403 . 0{,}0016 = 23{,}045$ Fuß,

und für die zweite Absteckungsweise (Fig. 158) die halbe Sehne

$AN = EN = s_1 = 167916 . 0{,}0016 = 268{,}666$ Fuß,

und die Bogenhöhe

$FN = h_1 = 14198 . 0{,}0016 = 22{,}717$ Fuß.

Um die weitere Theilung des Bogens AEB in acht gleiche Theile zu bewirken, hat man $\beta = \frac{9^0, 40'}{2} = 4^0, 50'$ zu setzen, und die entsprechenden Linienwerthe aus der gedachten Tabelle zu entnehmen u. s. w.

Ist der gegebene Brechungswinkel β nicht in der Tabelle enthalten, so muß man die gesuchten Linienwerthe durch Interpolation bestimmen.

Wäre z. B. $\delta = 37^0, 12'$ gefunden worden, so hätte man $\beta = 18^0, 36'$ und daher zwischen den Winkelwerthen $18^0, 30'$ und $18^0, 40'$ zu interpoliren, nämlich die Werthe für $18^0, 30'$ um 0,6mal die Differenz der Werthe für $18^0, 30'$ und $18^0, 40$, zu vergrößern. Wäre nun noch der geforderte Curvenhalbmesser $r = 2000$ Fuß, so hätte man die halbe Bogenlänge:

$b = (322886 + 0{,}6 . 2909) . 0{,}002 = 649{,}262$ Fuß,

die Tangente

$t = (334595 + 0{,}6 . 3238) . 0{,}002 = 673{,}076$ Fuß,

die entsprechende Tangentenhöhe

$k = (54492 + 0{,}6 . 1032) . 0{,}002 = 110{,}232$ Fuß.

Ferner folgt die halbe Sehne

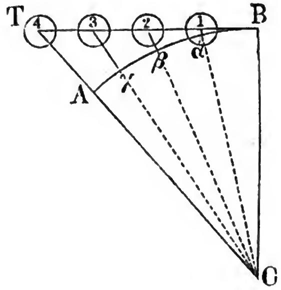
$s = (317305 + 0{,}6 . 2757) . 0{,}002 = 637{,}918$ Fuß,

und die entsprechende Bogenhöhe

$h = (51676 + 0{,}6 . 927) . 0{,}002 = 104{,}464$ Fuß.

Um andere Zwischenpunkte $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ eines Bogenstückes AB anzugeben, wendet man mehrere Methoden an. Am genauesten, jedoch auch am umständlichsten geht man hierbei zu Werke, wenn man die Tangente BT des Bogens BA, Fig. 159, in gleiche Theile theilt, in den Theilpunkten 1, 2, 3 ... die Winkel der radialen Ordinaten 1α, 2β, 3γ... aufträgt u. s. w.

Fig. 159.



Ist β der bekannte Centriwinkel ACB des Bogens AB und n die Anzahl der Theile,

in welche derselbe getheilt werden soll, so hat man die in 1, 2, 3 ... anzutragenden Winkel

$$\overline{B1C} = 90^0 - \frac{\beta}{n},\ \overline{B2C} = 90^0 - 2\left(\frac{\beta}{n}\right),$$

$$\overline{B3C} = 90^0 - 3\left(\frac{\beta}{n}\right) \text{ u. s. w.},$$

und bezeichnet k die vorher bestimmte Tangentenhöhe AT, so sind die auf den abgesteckten Richtungen abzusteckenden Ordinaten:

$$\overline{1\alpha} = \left(\frac{1}{n}\right)^2 k = 1 \cdot \frac{k}{n^2},\ \overline{2\beta} = \left(\frac{2}{n}\right)^2 k = 4 \cdot \frac{k}{n^2},$$

$$\overline{3\gamma} = \left(\frac{3}{n}\right)^2 k = 9 \cdot \frac{k}{n^2} \text{ u. s. w.}$$

Eine andere Methode besteht darin, daß man das der Sehne $A\acute{N}$ gleiche Tangentenstück BT, Fig. 160, in gleiche Theile theilt und in den Theilpunkten 1, 2, 3 .. die Perpendikel oder senkrechten Ordinaten

$$\overline{1\alpha} = \left(\frac{1}{n}\right)^2 h = 1 \cdot \frac{h}{n^2},\ \overline{2\beta} = \left(\frac{2}{n}\right)^2 h = 4 \cdot \frac{h}{n^2},$$

$$\overline{3\gamma} = \left(\frac{3}{n}\right)^2 h = 9 \cdot \frac{h}{n^2} \text{ u. s. w.}$$

errichtet, welche sich aus der Bogenhöhe $h = r(1 - \cos.\beta)$ und der Anzahl n der verlangten Bogentheile leicht berechnen lassen.

Auch kann man die halbe Sehne $AN = 2\,r\,sin.\,\beta$, Fig. 161,

Fig. 160.

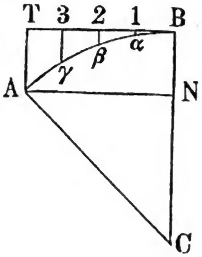
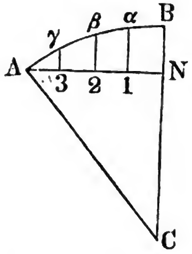


Fig. 161.



in gleiche Theile theilen, und die Zwischenpunkte $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ des Bogens AB mittels der Perpendikel

$$\overline{1\alpha} = \left[1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2\right] h,\ \overline{2\beta} = \left[1 - \left(\frac{2}{n}\right)^2\right] h,$$

$$\overline{3\gamma} = \left[1 - \left(\frac{3}{n}\right)^2\right] h \ldots$$

bestimmen.

Endlich lassen sich Zwischenpunkte $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ des Bogens AB, Fig. 162, auch dadurch bestimmen, daß man den Winkel $\overline{BAT} = \frac{\beta}{2}$ zwischen der Sehne AB und der Tangente AT in n gleiche Theile theilt, an AT die Winkel

$$\overline{TA1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\beta}{2},\ \overline{TA2} = \frac{2}{n} \cdot \frac{\beta}{2},\ \overline{TA3} = \frac{3}{r} \cdot \frac{\beta}{2} \text{ u. s. w.}$$

anträgt, und die erhaltenen Theillinien $\overline{A1}$, $\overline{A2}$, $\overline{A3}$ u. s. w. mittels $\overline{A\alpha} = \overline{\alpha\beta} = \overline{\beta\gamma} \, .. = 2r\left(\sin.\frac{\beta}{2n}\right)$ in $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ durchschneidet. Wenn der Bogen AB eine mäßige Ausdehnung hat, wie auch bei den ersten Methoden vorausgesetzt wird, so kann man auch $A\alpha = \alpha\beta = \beta\gamma \ldots = \frac{b}{n}$ = dem $n$ten Theil des Bogens $A\beta B = b$ setzen.

Giebt man statt des Krümmungshalbmessers r einer Bahn-

Fig. 162.

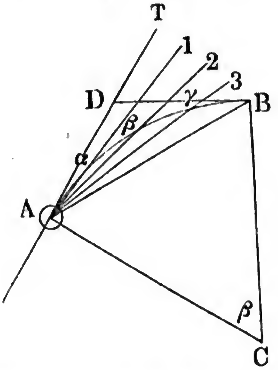
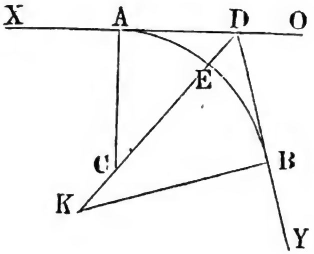


Fig. 163.



curve die Tangente t, so ist der erstere mittels der Formel $r = t \, cotg. \beta$ zu berechnen, oder mittels der Tabelle zu bestimmen, indem man den dem Winkel β entsprechenden Tangentenwerth aus dieser Tabelle in die gegebene Tangente dividirt.

Auch ist es zuweilen nöthig, eine Bahncurve aus zwei verschieden gekrümmten Bögen zusammenzusetzen. Giebt man z. B. den Anschlußpunkt A des einen Bogens AE, Fig. 163, mittels der Tangente $AD = t_1$ und ist $CA = r_1$ der Halbmesser desselben, so hat man für den Centriwinkel $ACD = \beta_1$,

$$tang. \beta_1 = \frac{t_1}{r_1},$$ und für die Tangentenhöhe

$$DE = k = \frac{r_1 (1 - cos. \beta_1)}{cos. \beta_1}.$$

Bezeichnet nun δ den gegebenen Brechungswinkel ODB, so ist der Centriwinkel des zweiten Bogens EB:

$$\beta_2 = \delta - \beta_1,$$

ferner der Halbmesser $KB = KE$ desselben

$$r_2 = \frac{k \, cos. \beta_2}{1 - cos. \beta_2}$$

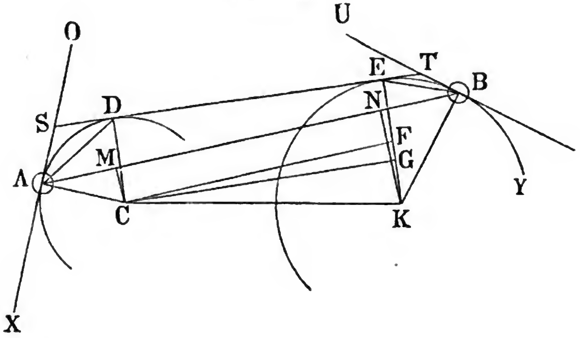
und die Tangente BD:

$$t_2 = r_2 \, tang. \beta_2 = \frac{k \, sin. \beta_2}{1 - cos. \beta_2}.$$

Etwas complicirter ist folgende Absteckung. Es sind die Halbmesser $CA = r_1$ und $KB = r_2$, Fig. 164 (a. f. S.), zweier Curven oder Kreise, sowie zwei Punkte A und B in

denselben gegeben; man soll dieselben durch eine gerade Strecke DE mit einander verbinden. Als bekannt anzusehen ist noch die Distanz $AB = d$, sowie der Brechungswinkel $SAB = \delta_1$

Fig. 164.



und der Brechungswinkel $TBA = \delta_2$, und es folgen daher die Coordinaten der Mittelpunkte C und K:

$$AM = x_1 = r_1 \sin. \delta_1,\ MC = y_1 = r_1 \cos. \delta_1,$$
$$BN = x_2 = r_2 \sin. \delta_2,\ NK = y_2 = r_2 \cos. \delta_2,$$

und daher für den Winkel $KCF = \mu$, unter welchem AB von der Centrallinie CK geschnitten wird:

$$\text{tang.}\, \mu = \frac{NK - MC}{MN} = \frac{y_2 - y_1}{d - (x_1 + x_2)}.$$

Ferner folgt die Centraldistanz

$$CK = e = \sqrt{[d - (x_1 + x_2)]^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

und für den Winkel $KCG = \nu$, unter welchem die Tangente DE von CK geschnitten wird:

$\sin. \nu = \frac{r_2 - r_1}{e}$. Nun ist der Brechungswinkel OSD oder Centriwinkel $ACD = 2\beta_1 = \delta_1 + \mu - \nu$, sowie der Brechungswinkel UTE oder Centriwinkel

$$BKE = 2\beta_2 = \delta_2 - (\mu - \nu).$$

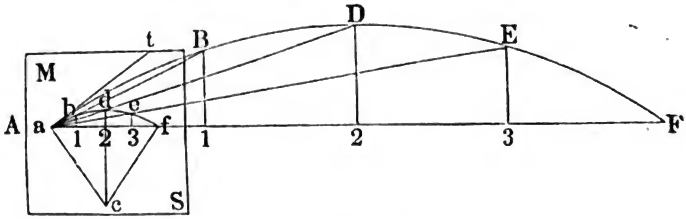
Um endlich die Anschlußpunkte D und E anzugeben, trägt man von A und B aus, die Winkel $SAD = \beta_1$ und $TBE = \beta_2$ an die geraden Tangenten AO und BU, und mißt auf den dadurch bestimmten Richtungen die Sehnen

$$AD = 2 r_1 \sin. \beta_1 \text{ und } BE = 2 r_2 \sin. \beta_2 \text{ ab.}$$

Man kann bei Absteckung von Curven auch den Meßtisch mit Vortheil in Anwendung bringen, wenn man die abzusteckenden Bogen auf demselben aufzeichnet und nun durch Einschneiden u. s. w. vergrößert auf das Feld überträgt. Um z. B. den Bogen af von der Mensel MS, Fig. 165, auf das Feld überzutragen, theilt man die Sehne desselben in gleiche Theile, errichtet in den Theilpunkten 1, 2, 3 die Perpendikel $\overline{1b}$, $\overline{2d}$, $\overline{3e}$,

steckt hierauf in der Richtung der Sehne af die Sehne AF auf dem Felde ab und trägt die Theile der ersteren in natürlichem Maaße mittels der Kette auf dem Felde auf. Ferner

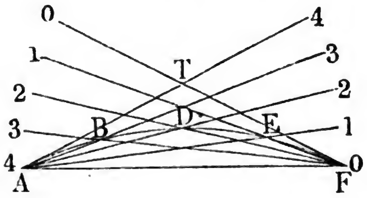
Fig. 165.



theilt man den Winkel fat zwischen der Sehne af und der Tangente at des Bogens in gleiche Theile, trägt mittels der Kippregel die Richtungen der Theillinien auf das Feld über und durchschneidet dieselben mittels der in 1, 2, und 3 auf AF zu errichtenden Perpendikel: die sich ergebenden Durchschnittspunkte B, D, E liegen in dem abzusteckenden Bogen ADF.

Wenn der abzusteckende Bogen ADF, Fig. 166, nicht zu klein ist, so kann man denselben auch durch Einschneiden mittels der aus seinen Endpunkten A und F gezogenen Theillinie der Winkel TAF und TFA bestimmen. Die Schnittpunkte B,D und E bilden die Absteckung der Curve. Dieses Verfahren kann man ebenso gut beim Gebrauch des Theodoliten als beim Gebrauch des Meßtisches anwenden.

Fig. 166.



Ohne Winkelmeßinstrument werden die Bahncurven auf folgende Weise abgesteckt.

1. Aus dem Curvenhalbmesser $CA = CF .. = r$ und einer Tangente $AD = DF = FG = GK .. = t$, Fig. 167, bestimmt man die Bogenhöhe:

$$DE = GH = LM = h = \frac{t^2}{2r + h},$$

annähernd mittels der Formel:

$$h = \frac{t^2}{2r}\left[1 - \left(\frac{t}{2r}\right)^2\right],$$

meist genau genug, $= \frac{t^2}{2r}$, sowie die Tangentenhöhe:

$$AS = FU = KT = k = \frac{2t^2}{r\left(1 - \frac{t^2}{r^2}\right)},$$

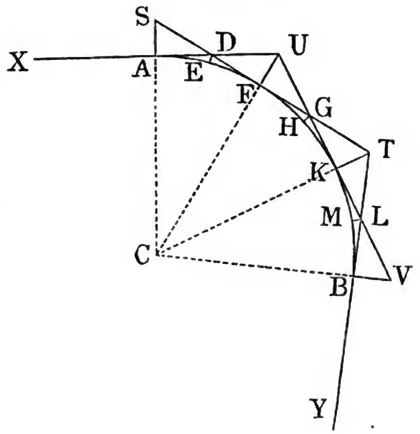
annähernd mittels der Formel:

$$k = \frac{2\,t^2}{r}\left[1 + \left(\frac{t}{r}\right)^2\right] = 4\,h\left(1 + \frac{3\,h}{2\,r}\right),$$

meist genau genug $= 4h$.

Um mittels dieser Höhen bei kurzen Bögen den Bogen $AEFHK\ldots$ abzustecken, mißt man $AD = t$ in der Verlängerung der geraden Bahnstrecke XA ab, errichtet in A das Perpendikel $AS = k$, mißt in der Richtung SD, DF und $FG = AD = t$ ab; ferner errichtet man in F auf SF das Perpendikel $FU = k$, trägt in der Richtung von UG die Linien GK und $KL = t$ auf u. s. w. Auf diese Weise erhält man ein Polygon $ADFGKLB$, welches den Bogen AHB in den Punkten A, F, K, B berührt, und wenn man noch die Bogenhöhen $DE = GH = LM = h$ rechtwinkelig auf AD, FG, KL aufträgt, bestimmen sich auch die Zwischenpunkte E, H und M.

Fig. 167.



2. Aus dem Curvenhalbmesser $CA = CF = r$ und der Sehne $AF = FK = KB = 2s$, Fig. 168, bestimmt sich die Bogenhöhe: $DE = GH = LM = h = \dfrac{s^2}{2r - h}$, annähernd mittels der Formel:

$$h = \frac{s^2}{2r}\left[1 + \left(\frac{s}{2r}\right)^2\right],$$

oder bei kleineren Bögen, $= \dfrac{s^2}{2r}$.

Ferner ist die Höhe $DP = GQ = LR = h_1$ des Durchschnittes P, Q, R je zweier Sehnen über der Mitte D, G, L der zwischenliegenden Sehne:

$$h_1 = \frac{2\,s^2\sqrt{r^2 - s^2}}{r^2 - 2\,s^2},$$

annähernd

$$h_1 = \frac{2\,s^2}{r}\left[1 + {}^3\!/_2\left(\frac{s}{r}\right)^2\right] = 4\,h\left(1 + {}^5\!/_2\,\frac{h}{r}\right),$$

und oft genügend scharf $= 4\,h$.

Der auf den geraden Bahnstrecken AX und BY aufgetragenen Abscisse, $AN = BU = s$, entspricht die Ordinate der benachbarten Sehne AF und BK:

$$NO = US = l = \frac{s^2}{\sqrt{r^2 - s^2}},$$

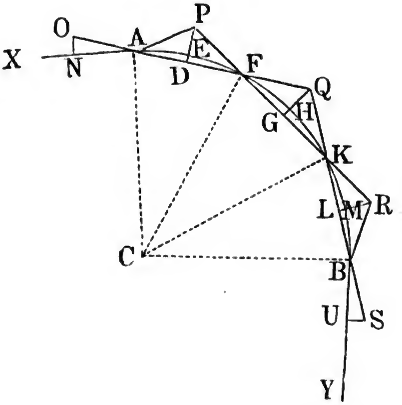
oder annähernd,

$$l = \frac{s^2}{r}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{r}\right)^2\right] = 2h\left(1 + \frac{h}{2r}\right),$$

einfacher, jedoch weniger scharf, $= 2h$.

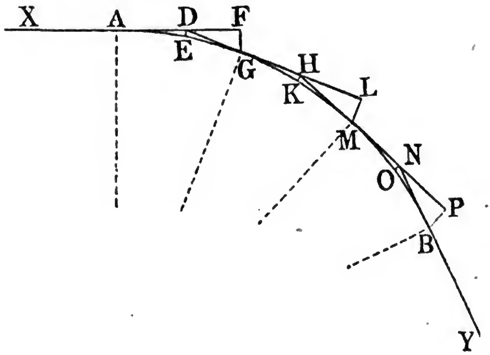
Um mit Hülfe der Sehnen AF, FK . . die Bahncurve AHB abzustecken, mißt man auf AX, $AN = s$ ab, errichtet in N das Perpendikel $NO = l$, ferner mißt man in der Richtung von OA, $AD = DF = s$ ab, errichtet in D das Perpendikel $DP = h_1$, ebenso giebt man in der Richtung von PF, $FG = GK = s$ an, errichtet das Perpendikel $GQ = h_1$, und schneidet in der Richtung $QK = KL = LB = s$ ab. Auf diese Weise erhält man die Punkte F und K, und steckt man auch noch die Lothe $DE = GH = LM = h$ ab, so ergeben sich auch die Zwischenpunkte E, H und M der Bahncurve AHB.

Fig. 168.



Sehr einfach, jedoch nur annähernd, läßt sich die Bahncurve AKB, Fig. 169, auch dadurch abstecken, daß man die Tangente

Fig. 169.



$AF = t$ in D halbirt, in den Punkten F und D derselben die Lothe $FG = k = \frac{t^2}{2r}$ und $DE = \frac{1}{4}k = \frac{t^2}{8r}$ errichtet, ferner in der Richtung von DG die Tangente $GL = 2\,GH = t$ abmißt, von derselben aus die Lothe $LM = k$ und $HK = \frac{1}{4}k$ errichtet, sowie in der Richtung HM die Tangente $MP = 2\,MN = t$ aufträgt u. s. w.

§. 23. **Cubatur der Auf- und Abträge.** Die Figuren 170, 171, 172 und 173 sind die gewöhnlichen Querprofile der Straßen- und Eisenbahnkörper.

Fig. 170.

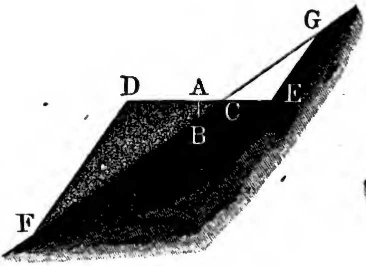


Fig. 171.

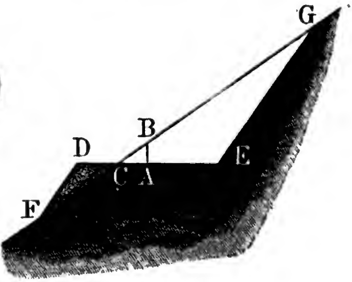


Fig. 172.

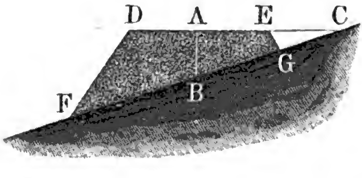


Fig. 173.

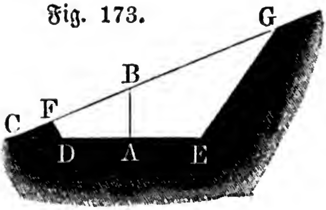


Fig. 170 und Fig. 172 mit einer Auftragscote AB, Fig. 171 und Fig. 173 mit einer Abtragscote AB. Bezeichnet man in jedem Falle diese Cote durch h, die halbe Kronenbreite $AD = AE$ durch b, die Böschung des Auf- oder Abtrages durch m und die des Bodens FG, oder die Cotangente des Neigungswinkels der mittleren Falllinie des Bodens gegen den Horizont, durch n, so hat man den Querschnitt des Auftrages in Fig. 170, wo $b > nh$ ist:

$$\text{Fläche } CDF = \frac{(b + nh)^2}{2(n - m)},$$

und dagegen den des Abtrages, oder

$$\text{Fläche } CEG = \frac{(b - nh)^2}{2(n - m)}.$$

Ferner für den Auftrag in Fig. 171, wo ebenfalls $b > nh$ ist:

Fläche $CDF = \frac{(b - nh)^2}{2(n - m)}$, und für den Abtrag:

Fläche $CEG = \frac{(b + nh)^2}{2(n - m)}$.

Ferner für den Auftrag in Fig. 172, wo $b < nh$ ist:

Fläche $DEGF = DCF - ECG = \frac{(b+nh)^2}{2(n-m)} - \frac{(b-nh)^2}{2(n+m)}$

und ebenso für den Abtrag in Fig. 173, wo ebenfalls $b < nh$ ist:

Fläche $DEGF = CEG - CFD = \frac{(b+nh)^2}{2(n-m)} - \frac{(b-nh)^2}{2(n+m)}$.

Ist FG ziemlich oder ganz söhlig, wie in Fig. 174 und Fig. 175 abgebildet wird, so erhält man für den Auf- oder Abtrag die Querschnittsfläche $DEGF = (2b + mh)h$.

Fig. 174.

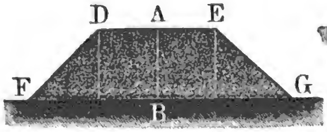
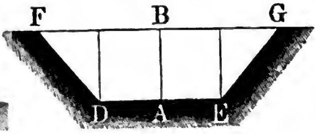


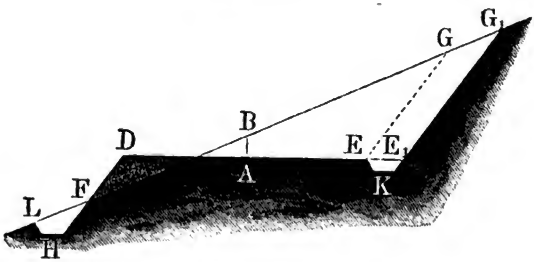
Fig. 175.



Diese Formel ist auch anzuwenden, um die Profilfläche des Eisenbahngrabens oder eines Grabens überhaupt zu bestimmen.

Die Abträge erhalten in Folge der Seitengräben noch eine größere Breite, deshalb hat man bei der Berechnung derselben die halbe Kronenbreite $AE = b$, Fig. 176, noch um die

Fig. 176.



Breite $EE_1 = b_1$ des Grabens im Niveau der Bahnfläche zu vergrößern. Uebrigens sind natürlich die Querprofile EE_1K und FHL der Seitengräben besonders zu berechnen.

Um nun den cubischen Inhalt eines Auf- oder Abtrages zu finden, von welchen die drei Profilflächen F_0, F_1 und F_2, so wie die Horizontalabstände l_1 zwischen F_0 und F_1, und l_2 zwischen F_1 und F_2 bekannt sind, hat man die Formel:

$$V = \frac{l_1 + l_2}{6}\left[2(F_0 + F_1 + F_2) + \frac{l_2}{l_1}(F_1 - F_0) + \frac{l_1}{l_2}(F_1 - F_2)\right]$$

$$= \frac{l}{6}\left[F_0 + 4F_1 + F_2 + \left(\frac{F_1 - F_0}{l_1} + \frac{F_2 - F_1}{l_2}\right)(l_2 - l_1)\right]$$

und für $l_1 = l_2 = \frac{1}{2} l$:

$$V = \frac{l}{6}(F_0 + 4F_1 + F_2).$$

Beispiel. Bei einer Kronenbreite $2b$ von 30 Fuß, einer Auf- und Abtragsböschung $m = 2$, einer Bodenböschung $n = 4$ und einer Auftragscote $h = 3$ Fuß hat man, da $b > nh$, d. i. $15 > 3 \cdot 4$ ist, die Fläche des Auftrages

$$= \frac{(15 + 3 \cdot 4)^2}{2(4 - 2)} = \frac{27^2}{4} = 182{,}25 \text{ Quadrat-Fuß},$$

dagegen die des Abtrages

$$= \frac{(15 - 12)^2}{4} = \frac{9}{4} = 2{,}25 \text{ Quadrat-Fuß}.$$

In einer Entfernung von 100 Fuß ist die Auftragscote $h = 3\frac{1}{2}$ Fuß und die Erdböschung $n = 3$, daher hier die Fläche des Auftrages:

$$= \frac{(15 + 3 \cdot 3{,}5)^2}{2 \cdot (3 - 2)} = \frac{(25{,}5)^2}{2} = 325{,}125 \text{ Quadrat-Fuß}$$

und die des Abtrages

$$= \frac{(15 - 10{,}5)^2}{2} = \frac{4{,}5^2}{2} = 10{,}125 \text{ Quadrat-Fuß}.$$

In einem ferneren Abstande von 150 Fuß ist endlich $h = 2$ Fuß, und $n = 3{,}5$, daher die Fläche des Auftrages

$$= \frac{(15 + 7)^2}{2 \cdot 1{,}5} = 161{,}333 \text{ Quadrat-Fuß},$$

und die des Abtrages

$$= \frac{(15 - 7)^2}{3} = 21{,}333 \text{ Quadrat-Fuß}.$$

Endlich folgt der Auftragkörper zwischen diesen Profilen:

$$V = \frac{100 + 150}{6}\left[\begin{array}{l}2(182{,}25 + 325{,}125 + 161{,}333) \\ + {}^{150}/_{100} \cdot 142{,}875 + {}^{100}/_{150} \cdot 163{,}792\end{array}\right]$$

$$= {}^{250}/_{6}(1337{,}416 + 214{,}312 + 109{,}194) = 69205 \text{ C.-Fuß};$$

und dagegen der Abtragskörper:

$$V_1 = {}^{250}/_{6}[2(2{,}25 + 10{,}125 + 21{,}333) + {}^{3}/_{2} \cdot 7{,}875 - {}^{2}/_{3} \cdot 11{,}208]$$

$$= \frac{1000}{4 \cdot 6}(67{,}416 + 11{,}813 - 7{,}472) = 2990 \text{ Cubik-Fuß}.$$

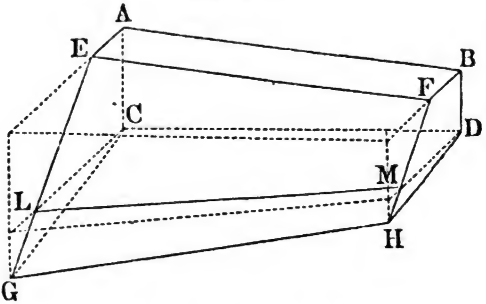
Das **Volumen eines Bahnkörpers** läßt sich auch direct bestimmen, wenn man den Theil $CDHG$, Fig. 177 (a. f. S.), seiner Oberfläche, welcher in die Erdoberfläche fällt, als eine **windschiefe Fläche** ansieht. Bezeichne l die Länge AB des Bahnkörpers, b die halbe Kronenbreite $AE = FB$, h die Cote AC an einem, sowie h_1 die Cote oder Höhe BD am zweiten Querprofile, ferner sei m die Böschung der Dammfläche $EFHG$, sowie n die der Erdfläche in C, und n_1 die der Erdfläche in D, also $m = cotang.\, CLE = cotang.\, DMF$,

$n = cotang.\, LCG$ und $n_1 = cotang.\, MDH$; so hat man für den Inhalt des Dammstückes $AFDG$:

$$V = \frac{l}{4}\left[b(h+h_1) + \frac{b+nh}{n-m}\left(b+\frac{m}{3}(2h+h_1)\right) + \frac{b+n_1h_1}{n_1-m}\left(b+\frac{m}{3}(2h_1+h)\right]\right.$$

Wenn die Erdfläche von der Dammaxe aus ansteigt, so ist n

Fig. 177.



und nach Befinden auch n_1 negativ in Rechnung zu bringen, also

$$V = \frac{l}{4}\left[b(h+h_1) - \frac{b-nh}{n+m}\left(b+\frac{m}{3}(2h+h_1)\right) - \frac{b-n_1h_1}{n_1+m}\left(b+\frac{m}{3}(2h_1+h)\right)\right]$$

zu setzen.

Kleinere Erdböschungen läßt man auch wohl ganz außer Acht, indem man voraussetzt, daß der dadurch erwachsende Fehler auf der einen Dammhälfte von dem auf der anderen ziemlich ausgeglichen wird. In diesem Falle erhält man viel einfacher

$$V = \frac{l}{2}\left(b(h+h_1) + \frac{m}{3}(h^2+hh_1+h_1^2)\right).$$

Fällt die Dammkrone an einem Ende in die Erdfläche, so ist $h_1 = 0$, und daher

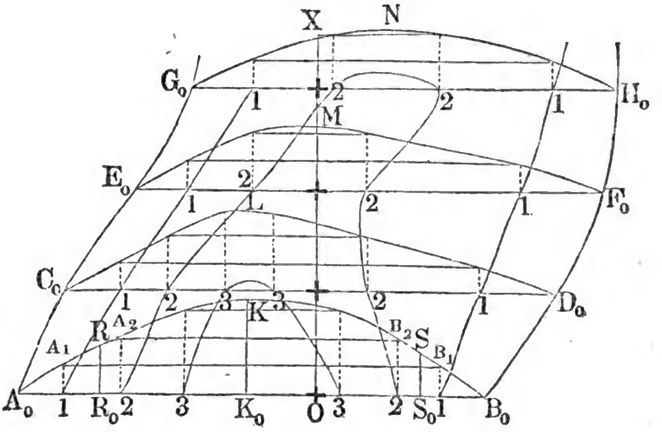
$$V = \frac{l}{2}\left(bh + \frac{m}{3}h^2\right).$$

§. 24. Aufnahme von Teichräumen, Flussbetten, Halden und Bergen. Das Wesentliche dieser cubischen Aufnahmen besteht darin, daß man eine horizontale Axe durch den aufzunehmenden Raum legt und in gewissen Abständen von einander Querprofile desselben angiebt. Bei der Aufnahme eines Querprofiles mißt man an verschiedenen Stellen die Tiefe desselben unter einer beliebig angenommenen Horizontalebene, und giebt diese Stellen durch Anvisiren mittels der Kippregel u. s. w. auf dem in irgend einem Punkte der Axe aufgestellten Meßtisch an. Hat man es mit der Aufnahme eines gefüllten Teiches zu thun, so dient der Wasserspiegel als Horizontalebene, von welcher

aus die Tiefen gemessen werden; in jedem anderen Falle ist hingegen diese Horizontalebene mittels der Visirlinie eines zur Seite der Axe aufgestellten Luftblasenniveaus (§. 6) anzugeben.

Die Querprofile denkt man sich um ihre in der gedachten Horizontalebene liegenden Grundlinien umgedreht und auf diese Ebene aufgeklappt, und man erhält dieselben nun dadurch, daß man in den durch Einschneiden bestimmten Punkten, wo man die Nivellir-, oder nach Befinden, Sondirstange aufgehalten hat, die gemessenen Tiefen rechtwinkelig zur Grundlinie aufträgt und die erhaltenen Endpunkte durch einen Zug verbindet. Einen Theil einer solchen Teichaufnahme führt Fig. 178 vor Augen.

Fig. 178.

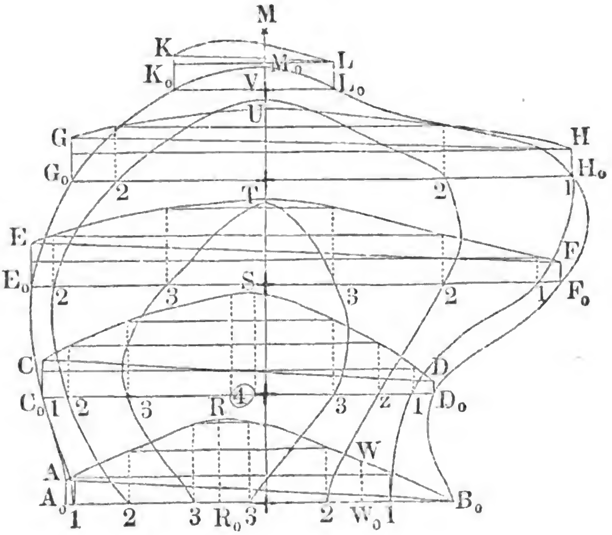


Es ist OX die Axe und es sind A_0B_0, C_0D_0, E_0F_0 und G_0H_0 die zugleich im Wasserspiegel liegenden Perpendikel oder Grundlinien der Querprofile. Ferner sind R_0, K_0, S_0 Schnittpunkte im Querprofile durch A_0B_0, sowie R_0R, K_0K, S_0S die an diesen Punkten durch Nivelliren bestimmten Tiefen, und es giebt daher der durch A_0, R, K, S und B_0 geführte Zug die Umgrenzung dieses Querprofiles AKB an. Auf gleiche Weise werden auch die übrigen Querprofile C_0LD_0, E_0MF_0 u. s. w. aufgetragen.

Um sich nun noch ein genaues Bild von dem Teichbette zu verschaffen, legt man ferner in gewissen Abständen Parallelen oder Horizontalen durch die umgeklappten Querprofile, wie z. B. A_1B_1, A_2B_2 u. s. w., projicirt dieselben auf die Grundlinie, z. B. auf A_0B_0, und verbindet nun noch die dadurch erhaltenen Lothpunkte, welche einer und derselben Tiefe entsprechen, wie z. B. 1, 1, 1 oder 2, 2, 2, 2..., durch einen Zug. Diese Züge, wie z. B. 111..., 222..., 333..., bilden die Grenzen tiefer liegender Teichspiegel genau wie $A_0C_0E_0G_0$, $B_0D_0F_0H_0$ die der obersten Teichfläche.

Eine Bergaufnahme wird durch das Bruchstück in Fig. 179 illustrirt. Es ist hier die Basis oder Grundebene durch den tiefsten Punkt B_0 der ganzen Aufnahme gelegt, und es sind $A_0 B_0$,

Fig. 179.



$C_0 D_0$, $E_0 F_0$ ... die in dieser Ebene liegenden Grundlinien der Querprofile. Unmittelbar sind durch das Luftblasenniveau die Tiefen der verschiedenen Punkte in diesen Querprofilen unter dem Niveau der Fernrohraxe bestimmt worden; man hat aber diese Tiefen von der Tiefe des Nullpunktes B_0 unter eben diesem Niveau abgezogen, und dadurch die Höhen jener Punkte über diesen Nullpunkt bestimmt. Diese Höhen sind nun auch in den entsprechenden Schnittpunkten R_0, W_0 ... als $R_0 R$, $W_0 W$ .. rechtwinkelig auf die Grundlinien, wie z. B. auf $A_0 B_0$, aufzutragen und die dadurch bestimmten Punkte R, W... eines Querprofiles, wie z. B. desjenigen durch $A_0 B_0$, durch einen Zug $ARWB_0$ mit einander zu verbinden. Nachdem man auf gleiche Weise die übrigen Querprofile CSD, ETF, GUH verzeichnet hat, kann man auch durch Horizontalen in gleichen Verticalabständen, nach der oben angegebenen Regel, noch die Horizontalschnitte 111 ..., 222 ..., 333 ... auftragen.

Wenn man die Inhalte F_0, F_1, F_2, der Querprofile einer cubischen Aufnahme ermittelt hat, ist es nun leicht mittels der Simpson'schen Regel (s. §. 16 der theoret. Geometrie) den Inhalt des aufgenommenen Körpers, z. B. eines Teichraumes, einer Halde u. s. w. zu berechnen, und wenn man nur einzelne Streifen der Querprofile in Betracht zieht, kann man auch die Inhalte einzelner Horizontalschichten des ganzes Raumes ermitteln. (S. des Verfassers neue Markscheidekunst.)

Tafel der Bögen, Tangenten, Secansexternen, Sinus u
Sinusversus für die von 10 zu 10 Minuten steigende Wink
scala, zum Gebrauch beim Abstecken der Eisenbahncurven u. s.
Der Radius $r = 1000000$.

Winkel. Gr.	Winkel. Min.	Bogen.	Tangente.	Secans externa (Tangentenhöhe).	Sinus.	Sinus versus (Bogenhöhe).
0	0	0	0	0	0	0
	10	2909	2909	4	2909	4
	20	5818	5818	17	5818	17
	30	8727	8727	38	8727	38
	40	11636	11636	68	11635	68
	50	14544	14545	106	14544	106
		2909	2910	46	2908	46
1	0	17453	17455	152	17452	152
	10	20362	20365	207	20361	207
	20	23271	23275	271	23269	271
	30	26180	26186	343	26177	343
	40	29089	29097	423	29085	423
	50	31998	32009	512	31992	512
		2909	2912	98	2907	97
2	0	34907	34921	610	34899	609
	10	37815	37834	715	37806	715
	20	40724	40747	830	40713	829
	30	43633	43661	953	43619	952
	40	46542	46576	1084	46525	1083
	50	49450	49491	1224	49431	1222
		2909	2917	148	2905	148
3	0	52360	52408	1372	52336	1370
	10	55269	55325	1529	55241	1527
	20	58178	58243	1695	58145	1692
	30	61087	61163	1869	61049	1865
	40	63995	64083	2051	63952	2047
	50	66904	67004	2242	66854	2237
		2909	2923	200	2902	199
4	0	69813	69927	2442	69756	2436
	10	72722	72851	2650	72658	2643
	20	75631	75775	2867	75559	2859
	30	78540	78702	3092	78459	3083
	40	81449	81629	3326	81359	3315
	50	84358	84558	3569	84258	3556
		2909	2931	251	2898	249
5	0	87266	87489	3820	87156	3805

Winkel. Gr.	Min.	Bogen.	Tangente.	Secans externa (Tangentenhöhe).	Sinus.	Sinus versus (Bogenhöhe).
5	0	87266	87489	3820	87156	3805
	10	90175	90421	4080	90053	4063
	20	93084	93354	4348	92950	4329
	30	95993	96289	4625	95846	4604
	40	98902	99226	4911	98741	4887
	50	101811	102164	5205	101635	5178
		2909	2940	303	2893	300
6	0	104720	105104	5508	104528	5478
	10	107629	108046	5820	107421	5786
	20	110538	110990	6141	110313	6103
	30	113446	113936	6470	113203	6428
	40	116355	116883	6808	116093	6762
	50	119264	119833	7154	118982	7104
		2909	2952	356	2887	350
7	0	122173	122785	7510	121869	7454
	10	125082	125738	7874	124756	7813
	20	127991	128694	8247	127642	8180
	30	130900	131652	8629	130526	8555
	40	133809	134613	9020	133410	8939
	50	136717	137576	9419	136292	9331
		2909	2965	409	2881	401
8	0	139626	140541	9828	139173	9732
	10	142535	143508	10245	142053	10141
	20	145444	146478	10671	144932	10558
	30	148353	149451	11106	147809	10984
	40	151262	152426	11550	150686	11418
	50	154171	155404	12003	153561	11860
		2909	2980	462	2873	451
9	0	157080	158384	12465	156434	12311
	10	159989	161368	12936	159307	12770
	20	162897	164354	13416	162178	13238
	30	165806	167343	13905	165048	13714
	40	168715	170334	14403	167916	14198
	50	171624	173329	14909	170783	14691
		2909	2998	517	2865	501
10	0	174533	176327	15426	173648	15192
	10	177442	179328	15952	176512	15701
	20	180351	182332	16486	179375	16219
	30	183260	185339	17030	182235	16745
	40	186168	188350	17582	185095	17279
	50	189077	191363	18145	187953	17822
		2909	3017	572	2856	551
11	0	191986	194380	18717	190809	18373

Winkel. Gr.	Min.	Bogen.	Tangente.	Secans externa (Tangentenhöhe).	Sinus.	Sinus versus (Bogenhöhe).
11	0	191986	194380	18717	190809	18373
	10	194895	197401	19297	193664	18932
	20	197804	200425	19887	196517	19499
	30	200713	203452	20486	199368	20075
	40	203622	206483	21095	202218	20659
	50	206531	209518	21713	205065	21252
		2909	3038	628	2847	600
12	0	209440	212556	22341	207912	21852
	10	212348	215599	22977	210756	22461
	20	215257	218645	23624	213599	23079
	30	218166	221695	24280	216440	23704
	40	221075	224748	24945	219279	24338
	50	223984	227806	25620	222116	24980
		2909	3062	684	2835	650
13	0	226893	230868	26304	224951	25630
	10	229802	233934	26998	227784	26288
	20	232711	237004	27702	230616	26955
	30	235619	240079	28415	233445	27630
	40	238528	243157	29138	236273	28313
	50	241437	246240	29871	239098	29005
		2909	3088	743	2824	699
14	0	244346	249328	30614	241922	29704
	10	247255	252420	31366	244743	30412
	20	250164	255516	32128	247563	31128
	30	253073	258618	32900	250380	31852
	40	255982	261723	33682	253195	32585
	50	258891	264834	34474	256008	33325
		2908	3115	802	2811	749
15	0	261799	267949	35276	258819	34074
	10	264708	271069	36088	261628	34831
	20	267617	274194	36910	264434	35596
	30	270526	277324	37742	267238	36370
	40	273435	280460	38585	270040	37151
	50	276344	283600	39437	272840	37940
		2909	3145	862	2797	798
16	0	279253	286745	40299	275637	38738
	10	282162	289896	41172	278432	39544
	20	285070	293052	42055	281225	40358
	30	287979	296213	42949	284015	41180
	40	290888	299380	43853	286803	42010
	50	293797	302553	44767	289589	42849
		2909	3178	925	2783	846
17	0	296706	305731	45692	292372	43695

Winkel.		Bogen.	Tangente.	Secans externa (Tangentenhöhe).	Sinus.	Sinus versus (Bogenhöhe).
Gr.	Min.					
17	0	296706	305731	45692	292372	43695
	10	299615	308914	46627	295152	44550
	20	302524	312104	47573	297930	45412
	30	305433	315299	48529	300706	46283
	40	308342	318500	49496	303479	47162
	50	311250	321707	50474	306249	48049
		2909	3213	988	2768	895
18	0	314159	324920	51462	309017	48944
	10	317068	328139	52461	311782	49846
	20	319977	331364	53471	314545	50757
	30	322886	334595	54492	317305	51676
	40	325795	337833	55524	320062	52603
	50	328704	341077	56567	322816	53538
		2909	3251	1054	2752	943
19	0	331613	344328	57621	325568	54481
	10	334521	347585	58686	328317	55432
	20	337430	350848	59762	331063	56391
	30	340339	354119	60849	333807	57358
	40	343248	357396	61947	336547	58334
	50	346157	360679	63057	339285	59316
		2909	3291	1121	2735	992
20	0	349066	363970	64178	342020	60308
	10	351975	367268	65310	344752	61306
	20	354884	370573	66454	347481	62313
	30	357792	373885	67609	350207	63328
	40	360701	377204	68775	352931	64350
	50	363610	380530	69955	355651	65381
		2909	3334	1190	2717	1039
21	0	366519	383864	71145	358368	66420
	10	369428	387205	72347	361082	67466
	20	372337	390554	73561	363793	68520
	30	375246	393910	74787	366501	69582
	40	378155	397275	76024	369206	70653
	50	381064	400646	77273	371908	71730
		2908	3380	1262	2699	1086
22	0	383972	404026	78535	374607	72816
	10	386881	407414	79808	377302	73910
	20	389790	410810	81094	379994	75011
	30	392699	414214	82392	382683	76121
	40	395608	417626	83702	385369	77237
	50	398517	421046	85025	388052	78363
		2909	3429	1335	2679	1135
23	0	401426	424475	86360	390731	79498

Winkel.		Bogen.	Tangente.	Secans externa (Tangentenhöhe).	Sinus.	Sinus versus (Bogenhöhe).
Gr.	Min.					
23	0	401426	424475	86360	390731	79495
	10	404335	427912	87708	393407	80636
	20	407243	431358	89068	396080	81784
	30	410152	434812	90441	398749	82940
	40	413061	438276	91827	401415	84104
	50	415970	441748	93225	404078	85275
		2909	3481	1411	2659	1179
24	0	418879	445229	94636	406737	86454
	10	421788	448719	96061	409392	87642
	20	424697	452218	97498	412044	88836
	30	427606	455726	98948	414693	90039
	40	430515	459244	100411	417338	91249
	50	433423	462771	101885	419980	92467
		2909	3537	1493	2638	1225
25	0	436332	466308	103378	422618	93692
	10	439241	469854	104881	425253	94925
	20	442150	473410	106398	427884	96166
	30	445059	476976	107929	430511	97415
	40	447968	480551	109473	433135	98671
	50	450877	484137	111030	435755	99934
		2909	3596	1572	2616	1272
26	0	453786	487733	112602	438371	101206
	10	456694	491339	114187	440984	102485
	20	459603	494955	115787	443593	103772
	30	462512	498582	117400	446198	105066
	40	465421	502219	119028	448799	106367
	50	468330	505867	120670	451397	107677
		2909	3658	1657	2593	1317
27	0	471239	509325	122327	453990	108994
	10	474148	513195	123997	456580	110318
	20	477057	516875	125682	459167	111650
	30	479966	520567	127382	461749	112989
	40	482874	524270	129097	464327	114336
	50	485783	527984	130826	466901	115691
		2909	3725	1744	2571	1361
28	0	488692	531709	132570	469472	117052
	10	491601	535447	134330	472038	118422
	20	494510	539195	136104	474600	119799
	30	497419	542956	137893	477159	121183
	40	500328	546728	139698	479713	122575
	50	503237	550512	141518	482263	123974
		2908	3797	1836	2547	1406
29	0	506145	554309	143354	484810	125380

Winkel. Gr.	Winkel. Min.	Bogen.	Tangente.	Secans externa (Tangentenhöhe).	Sinus.	Sinus versus (Bogenhöhe).
29	0	506146	554309	143354	484810	125380
	10	509054	558118	145206	487352	126794
	20	511963	561939	147072	489890	128216
	30	514872	565773	148956	492423	129644
	40	517781	569619	150854	494953	131080
	50	520690	573478	152769	497479	132524
		2909	3872	1931	2521	1451
30	0	523599	577350	154700	500000	133975
	10	526508	581235	156648	502517	135433
	20	529417	585133	158612	505030	136898
	30	532325	589045	160592	507538	138371
	40	535234	592970	162589	510043	139851
	50	538143	596908	164603	512542	141338
		2909	3953	2030	2496	1495
31	0	541052	600861	166633	515038	142833
	10	543961	604827	168681	517529	144335
	20	546870	608807	170746	520016	145844
	30	549779	612801	172828	522499	147360
	40	552688	616809	174927	524977	148883
	50	555596	620832	177044	527450	150414
		2909	4037	2135	2469	1538
32	0	558505	624869	179179	529919	151952
	10	561414	628921	181331	532384	153497
	20	564323	632988	183501	534844	155049
	30	567232	637070	185689	537300	156609
	40	570141	641167	187896	539751	158175
	50	573050	645280	190120	542197	159749
		2909	4128	2244	2442	1581
33	0	575959	649408	192364	544639	161330
	10	578868	653551	194625	547076	162917
	20	581776	657710	196906	549509	164512
	30	584685	661886	199205	551937	166114
	40	587594	666077	201523	554360	167723
	50	590503	670284	203861	556779	169340
		2909	4224	2357	2414	1623
34	0	593412	674508	206218	559193	170963
	10	596321	678749	208594	561602	172593
	20	599230	683007	210991	564007	174230
	30	602139	687281	213457	566406	175874
	40	605047	691572	215842	568801	177525
	50	607956	695881	218299	571191	179183
		2909	4326	2476	2385	1665
35	0	610865	700207	220775	573576	180848

Winkel. Gr.	Winkel. Min.	Bogen.	Tangente.	Secans externa (Tangentenhöhe).	Sinus.	Sinus versus (Bogenhöhe).
35	0	610865	700207	220775	573576	180848
	10	613774	704551	223272	575957	182520
	20	616683	708913	225789	578332	184199
	30	619592	713293	228326	580703	185885
	40	622501	717369	230886	583069	187577
	50	625410	722107	233466	585429	189277
		2909	4436	2602	2356	1706
36	0	628319	726543	236068	587785	190983
	10	631227	730996	238691	590136	192696
	20	634136	735469	241335	592482	194416
	30	637045	739961	244002	594823	196143
	40	639954	744472	246691	597159	197877
	50	642863	749003	249403	599489	199617
		2909	4551	2733	2326	1748
37	0	645772	753554	252136	601815	201365
	10	648681	758125	254892	604136	203118
	20	651590	762716	257671	606451	204880
	30	654498	767327	260472	608761	206647
	40	657407	771960	263298	611067	208421
	50	660316	776612	266146	613367	210202
		2909	4674	2873	2294	1788
38	0	663225	781286	269019	615661	211990
	10	666134	785981	271914	617951	213783
	20	669043	790697	274835	620235	215585
	30	671952	795436	277780	622515	217392
	40	674861	800196	280748	624789	219206
	50	677770	804980	283741	627057	221027
		2908	4804	3019	2263	1827
39	0	680678	809784	286760	629320	222854
	10	683587	814612	289803	631578	224688
	20	686496	819462	292872	633831	226528
	30	689405	824336	295967	636078	228375
	40	692314	829234	299088	638320	230229
	50	695223	834155	302234	640557	232089
		2909	4945	3173	2231	1866
40	0	698132	839100	305407	642788	233955
	10	701041	844069	308607	645013	235829
	20	703949	849062	311834	647233	237708
	30	706858	854081	315086	649448	239594
	40	709767	859124	318368	651657	241486
	50	712676	864193	321677	653861	243385
		2909	5094	3336	2198	1906
41	0	715585	869287	325013	656059	245291

Winkel.		Bogen.	Tangente.	Secans externa (Tangentenhöhe).	Sinus.	Sinus versus (Bogenhöhe).
Gr.	Min.					
41	0	715585	869287	325013	656059	245291
	10	718494	874407	328378	658252	247202
	20	721403	879553	331770	660439	249120
	30	724312	884725	335193	662620	251045
	40	727221	889924	338643	664796	252975
	50	730129	895151	342123	666966	254912
		2909	5253	3510	2165	1943
42	0	733038	900404	345633	669131	256855
	10	735947	905685	349172	671289	258805
	20	738856	910994	352742	673443	260760
	30	741765	916331	356341	675590	262722
	40	744674	921697	359972	677732	264691
	50	747583	927091	363634	679868	266666
		2909	5424	3694	2130	1980
43	0	750492	932515	367328	681998	268646
	10	753400	937968	371052	684123	270633
	20	756309	943451	374809	686242	272626
	30	759218	948965	378599	688355	274625
	40	762127	954508	382420	690462	276631
	50	765036	960083	386275	692563	278642
		2909	5606	3889	2095	2018
44	0	767945	965689	390164	694658	280660
	10	770854	971326	394085	696748	282684
	20	773763	976996	398041	698831	284713
	30	776672	982697	402032	700909	286750
	40	779580	988432	406058	702981	288792
	50	782489	994199	410117	705047	290839
		2909	5801	4096	2060	2054
45	0	785398	1000000	414213	707107	292893

Dritter Theil.

Mechanik.

Erster Abschnitt.

Formeln, Regeln und Tabellen für die theoretische Mechanik.

Erstes Capitel.

Gewichtstabellen.

A. Allgemeine Gewichtstafel,

enthaltend die Gewichtseinheiten in verschiedenen Ländern.

1. **Anhalt:** wie in Preußen.
2. **Baden:** 1 Pfund = 32 Loth = 500 Gramm = 10 Zehnlinge = 100 Centaß = 1000 Dekaß = 10000 Aß. 1 Centner = 10 Stein = 100 Pfund = 50 Kilogramm.
3. **Baiern:** 1 Pfund = 32 Loth = 560 Gramm. 1 Centner = 5 Stein = 100 Pfund = 112 Zollpfund.
4. **Belgien:** wie in Frankreich.
5. **Braunschweig:** 1 altes Pfund = 32 Loth = 467,711 Gramm, wie in Preußen; 1 neues Pfund = 1 Zollpfund = 10 Neuloth = 100 Quint = 1000 Halbgramm = 500 Gramm; 1 Centner = 100 Pfund.
6. **Bremen:** 1 altes Pfund (Handelsgewicht) = 32 Loth = 498,5 Gramm. 1 Centner = 116 Pfund. 1 neues Pfund = 1 Zollpfund.
7. **Dänemark:** 1 altes Pfund (Handelsgewicht) = 32 Loth = 499,309 Gramm.

1 Centner = 100 Pfund. 1 Last = 16¼ Schiffspfund = 52 Centner.
1 neues Pfund = 1 Zollpfund.

8. England: 1 Pfund Avoir-du-pois = 453,5976 Gramm.
1 Pfund Troy-Gewicht = 5760 Grains = 373,246 Gramm. 1 Tonne = 20 Centner = 160 Stein = 2240 Av.-Pfd.

9. Frankfurt a. M.: 1 altes Pfund (leichtes Handelsgewicht) = 32 Loth = 467,711 Gramm.
1 Centner Handelsgewicht = 108 Pfd. Leichtgew.
= 100 Pfd. Schwergew.
1 neues Pfund = 1 Zollpfund.

10. Frankreich: 1 Kilogramm = 1000 Gramm = Gewicht eines Litre oder Cubikdecimeters Wasser bei der größten Dichtigkeit und im luftleeren Raume gewogen.
1 altes Pfund = 489,506 Gramm.
1 neues Pfund = 500 Gramm = 16 Onces = 128 Gros = 9216 Grains.
1 neuer Centner (Quintal) = 100 Kilogramm.
1 neue Schiffstonne (Millier) = 1000 Kilogramm.

11. Hamburg: 1 altes Pfund (Handelsgewicht) = 32 Loth = 484,609 Gramm.
1 Centner = 112 Pfund;
1 Schiffspfund = 2½ Centner = 20 Liespfund.
1 neues Pfund = 1 Zollpfund = 10 Neuloth = 100 Quint.

12. Hannover: wie in Braunschweig.

13. Hessen, Großherzogthum: 1 Pfund = 32 Loth = 500 Gramm. 1 Centner = 100 Pfund.

14. Hessen, Kurfürstenthum: das alte preußische Gewicht.

15. Holstein: theils wie in Hamburg, theils wie in Lübeck.

16. Lippe-Detmold: 1 altes Pfund = 32 Loth = 467,41 Gramm. 1 Centner = 108 Pfund.
1 neues Pfund = 1 Zollpfund.

17. Lippe-Schaumburg: wie in Braunschweig.

18. Lombardei: wie in Frankreich.

19. Lübeck: 1 Pfund (Handelsgew.) = 32 Loth = 486,474 Grm.

20. Mecklenburg-Schwerin: w. i. Preuß., 1 ℔ = 500 Grm.

21. Mecklenburg-Strelitz: w. i. Preußen, 1 ℔ = 500 Grm.

22. Nassau: wie in Frankfurt a. M.
1 altes Wiesbadener Pfund = 470,686 Gramm.
1 alter Wiesbadener Centner = 106 Pfund.
1 neues Pfund = 1 Zollpfund = 10 Neuloth.

23. Niederlande: 1 Pond = 1 Kilogramm = 10 Oncen = 100 Looden = 1000 Wigtjes; also wie in Frankreich.

24. Norwegen: 1 Pfund = 498,114 Gramm; im Uebrigen wie in Dänemark.

25. Oesterreich: 1 Wiener Handelspfund = 32 Loth = 560,012 Gramm. 1 Centner = 5 Stein = 100 Handelspfund.

26. Oldenburg: 1 Pfund = 32 Loth = 480,367 Gramm.
1 Centner = 100 Pfund.
1 Schiffspfund = 290 Pfund.

27. Preußen: 1 neues Pfund = 1 Zollpfund = 30 Loth = 300 Quent = 3000 Cent = 30000 Korn = 1/2 Kilogramm = 1,069036 alte Pfund.
1 altes Pfund = 2 Mark = 32 Loth = 128 Quent = 576 Grän = 1/66 von dem Gewichte eines Cubikfußes Wasser bei 15° R. Wärme, im luftleeren Raume gewogen, = 467,7110 Gramm.
1 neuer Centner = 5 Stein = 100 Pfund.
1 alter Centner = 110 Pfund.
1 Schiffslast = 4000 Pfund.
Das neue Gewicht in Preußen gilt seit dem 1. Juli 1858.

28. Rußland: 1 Pfund = 32 Loth = 96 Solotnik = 409,52 Gramm.
1 Schiffspfund (Berkowrtz) = 10 Pud = 400 Pfd.

29. Sachsen, Königreich: 1 neues Pfund = 1 Zollpfund = 30 Loth = 300 Quent = 3000 Cent = 30000 Korn = 1/2 Kilogramm.
1 altes Leipziger Pfund = 467,214 Gramm.
1 Centner neues Gewicht = 100 Pfund = 5 Stein,
altes Gewicht = 110 Pfund.

30. Sachsen-Weimar: wie in Preußen.

31. Schleswig: wie in Dänemark.

32. Schweden: 1 Skalpund = 32 Loth = 425,3395 Gr.
1 Centner = 120 Pfund.
1 Schiffspfund = 20 Ließpfund = 400 Skalpund (Schalpfund).
1 neues Pfund (seit 1858) = 1 Skalpund = 100 Korn = 10000 Art.
1 neuer Centner = 100 neue Pfund.

33. Schweiz: wie in Baden.

34. Würtemberg: 1 altes Pfund = 32 Loth = 467,728 Gr.
1 Centner = 104 Pfund (leichte Pfund).
1 neues Pfund = 1 Zollpfund = 32 Loth = 128 Quent.

35. Zollgewicht: 1 Zollcentner = 100 Zollpfund.
1 Zollpfund = 1/2 Kilogramm = 30 Loth.

B. Vergleichungstabelle,

enthaltend eine Vergleichung von 12 verschiedenen Landesgewichten unter einander.

Deutsches Zoll-Pfund.	Altes Preußisches Pfund.	Oesterreichisches Pfund.	Baiersches Pfund.	Altes Würtembergsches Pfund.	Cölnische alte Mark.
1	1,06904 0,02899	0,89284 9,95077	0,89286 9,95078	1,06900 0,02898	2,13847 0,33010
0,93542 9,97101	1	0,83518 9,92178	0,83520 9,92179	0,99996 9,99998	2,00037 0,30111
1,12002 0,04923	1,19735 0,07822	1	1,00002 0,00001	1,19730 0,07820	2,39514 0,37933
1,12000 0,04922	1,19732 0,07821	0,99998 9,99999	1	1,19728 0,07819	2,39508 0,37932
0,93546 9,97102	1,00004 0,00002	0,83521 9,92180	0,83523 9,92181	1	2,00044 0,30113
0,46762 9,66990	0,49991 9,69889	0,41751 9,62067	0,41752 9,62068	0,49989 9,69887	1
0,99862 9,99940	1,06756 0,02839	0,89160 9,95017	0,89162 9,95618	1,06752 0,02838	2,13551 0,32950
0,85068 9,92977	0,90941 9,95876	0,75952 9,88054	0,75953 9,88055	0,90937 9,95874	1,81915 0,25987
0,81904 9,91331	0,87558 9,94230	0,73127 9,86408	0,73129 9,86409	0,87555 9,94228	1,75149 0,24341
0,90720 9,95770	0,96982 9,98669	0,80998 9,90847	0,81000 9,90848	0,96979 9,98668	1,94001 0,28780
0,97901 9,99079	1,04660 0,01978	0,87410 9,94156	0,87412 9,94157	1,04656 0,01976	2,09359 0,32089
2,00000 0,30103	2,13807 0,33002	1,78568 0,25180	1,78571 0,25181	2,13800 0,33001	4,27693 0,63113

B. Vergleichungstabelle,

enthaltend eine Vergleichung von 12 verschiedenen Landesgewichten unter einander.

Dänisches und Norweg. Pfund.	Schwedisches Pfund.	Russisches Pfund.	Englisches Pfund.	Altfranzösisches Pfund (poids du marc).	Kilogramm.
1,00138 0,00060	1,17553 0,07023	1,22094 0,08669	1,10230 0,04230	1,02144 0,00921	0,50000 9,69897
0,93672 9,97161	1,09962 0,04124	1,14210 0,05770	1,03111 0,01331	0,95548 9,98022	0,46771 9,66998
1,12157 0,04983	1,31662 0,11946	1,36748 0,13592	1,23460 0,09153	1,14404 0,05844	0,56001 9,74820
1,12155 0,04982	1,31660 0,11945	1,36746 0,13591	1,23457 0,09152	1,14401 0,05843	0,56000 9,74819
0,93675 9,97162	1,09966 0,04126	1,14214 0,05772	1,03115 0,01332	0,95551 9,98024	0,46773 9,66999
0,46827 9,67050	0,54971 9,74013	0,57094 9,75659	0,51546 9,71220	0,47765 9,67911	0,23381 9,36887
1	1,17391 0,06963	1,21925 0,08609	1,10078 0,04170	1,02003 0,00861	0,49931 9,69837
0,85186 9,93037	1	1,03863 0,01646	0,93770 9,97206	0,86892 9,93898	0,42534 9,62874
0,82017 9,91391	0,96281 9,98354	1	0,90283 9,95560	0,83660 9,92252	0,40952 9,61228
0,90845 9,95830	1,06644 0,02793	1,10763 0,04440	1	0,92664 9,96691	0,45360 9,65667
0,98037 9,99139	1,15086 0,06102	1,19532 0,07748	1,07916 0,03309	1	0,48951 9,68976
2,00277 0,30163	2,35106 0,37126	2,44188 0,38772	2,20460 0,34333	2,04288 0,31024	1

C. Verwandlung des alten preußischen Gewichtes in neues Gewicht.

Altes Gewicht.	Neues Gewicht (Zollgewicht).		
	Pfund.	Pfund	und Loth.
1 Quent.	0,00731	—	0,2192
2 »	0,01462	—	0,4385
3 »	0,02192	—	0,6577
1 Loth.	0,02923	—	0,8770
2 »	0,05846	—	1,7539
3 »	0,08770	—	2,6309
4 »	0,11693	—	3,5078
5 »	0,14616	—	4,3848
6 »	0,17539	—	5,2617
7 »	0,20462	—	6,1387
8 »	0,23385	—	7,0157
9 »	0,26309	—	7,8926
10 »	0,29232	—	8,7696
20 »	0,58464	—	17,5392
30 »	0,87696	—	26,3087
1 Pfund.	0,93542	—	28,0627
2 »	1,87084	1	26,1253
3 »	2,80627	2	24,1880
4 »	3,74169	3	22,2506
5 »	4,67711	4	20,3133
6 »	5,61253	5	18,3760
7 »	6,54795	6	16,4386
8 »	7,48338	7	14,5013
9 »	8,41880	8	12,5639
10 »	9,35422	9	10,6266
20 »	18,70844	18	21,2532
30 »	28,06266	28	1,8798
40 »	37,41688	37	12,5064
50 »	46,77110	46	23,1330
60 »	56,12532	56	3,7596
70 »	65,47954	65	14,3862
80 »	74,83376	74	25,0129
90 »	84,18798	84	5,6395
100 »	93,54220	93	16,2661
1 Centner.	102,8964	102	26,8927
2 »	205,7928	205	23,7854
3 »	308,6893	308	20,6780
4 »	411,5857	411	17,5707
5 »	514,4821	514	14,4634
6 »	617,3785	617	11,3561
7 »	720,2750	720	8,2488
8 »	823,1714	823	5,1414
9 »	926,0678	926	2,0342
10 »	1028,9642	1028	28,9268

D. Verwandlung des neuen preußischen Gewichtes in altes Gewicht.

Neues Gewicht (Zollgewicht).		Altes Gewicht.		
		Pfund.	Pfund	und Loth.
1	Quent.	0,00356	—	0,1140
1	Loth.	0,03563	—	1,1403
2	»	0,07127	—	2,2806
3	»	0,10690	—	3,4209
4	»	0,14254	—	4,5612
5	»	0,17817	—	5,7015
6	»	0,21381	—	6,8418
7	»	0,24944	—	7,9821
8	»	0,28508	—	9,1224
9	»	0,32071	—	10,2627
10	»	0,35634	—	11,4030
20	»	0,71269	—	22,8061
1	Pfund.	1,06904	1	2,2092
2	»	2,13807	2	4,4183
3	»	3,20711	3	6,6275
4	»	4,27614	4	8,8366
5	»	5,34518	5	11,0458
6	»	6,41422	6	13,2549
7	»	7,48326	7	15,4641
8	»	8,55229	8	17,6733
9	»	9,62132	9	19,8824
10	»	10,69036	10	22,0916
20	»	21,38072	21	12,1832
30	»	32,07108	32	2,2747
40	»	42,76144	42	24,3663
50	»	53,45180	53	14,4579
60	»	64,14216	64	4,5495
70	»	74,83252	74	26,6411
80	»	85,52288	85	16,7326
90	»	96,21324	96	6,8242
1	Centner.	106,9036	106	28,915
2	»	213,8072	213	25,830
3	»	320,7108	320	22,746
4	»	427,6144	427	19,661
5	»	534,5180	534	16,576
6	»	641,4216	641	13,491
7	»	748,3252	748	10,406
8	»	855,2288	855	7,322
9	»	962,1324	962	4,237
10	»	1069,036	1069	1,152

20*

E. Tabelle zur Vergleichung der Belastungen pro Längeneinheit.

Preußen.		Oesterreich.	Sachsen.
Altes Pfund pro Fuß.	Neues Pfund pro Fuß.	Pfund pro Fuß.	Pfund pro Fuß.
1	0,9354	0,8412	0,8440
1,0690	1	0,8993	0,9023
1,1888	1,1120	1	1,0034
1,1847	1,1083	0,9966	1
1,1184	1,0462	0,9408	0,9440
0,9986	0,9342	0,8400	0,8429
1,0112	0,9459	0,8506	0,8535
0,6710	0,6277	0,5645	0,5664

F. Tabelle zur Vergleichung der Belastungen pro Flächeneinheit.

Preußen.		Oesterreich.	Sachsen.
Altes Pfund pro Quadrat-Zoll.	Neues Pfund pro Quadrat-Zoll.	Pfund pro Quadrat-Zoll.	Pfund pro Quadrat-Zoll.
1	0,9354	0,8472	0,7616
1,0690	1	0,9057	0,8141
1,1803	1,1041	1	0,8989
1,3131	1,2283	1,1125	1
0,8125	0,7601	0,6884	0,6188
1,0283	0,9619	0,8712	0,7831
0,9770	0,9139	0,8278	0,7441
14,625	13,681	12,391	11,139

E. Tabelle zur Vergleichung der Belastunge pro Längeneinheit.

Baden.	England.	Frankreich.	
Pfund pro Fuß.	Pfund pro Fuß.	Altes Pfund pro Fuß.	Kilogramm pro Meter.
0,8941	1,0014	0,9889	1,4902
0,9559	1,0705	1,0572	1,5931
1,0629	1,1904	1,1756	1,7716
1,0594	1,1864	1,1716	1,7656
1	1,1199	1,1060	1,6667
0,8929	1	0,9876	1,4882
0,9041	1,0126	1	1,5069
0,6000	0,6720	0,6636	1

F. Tabelle zur Vergleichung der Belastungen pro Flächeneinheit.

Baden.	England.	Frankreich.	
Pfund pro Quadrat=Zoll.	Pfund pro Quadrat=Zoll.	Altes Pfund pro Quadrat=Zoll.	Kilogramm pro Q.=Centimeter
1,2307	0,9725	1,0235	0,06837
1,3157	1,0396	1,0942	0,07309
1,4526	1,1478	1,2081	0,08070
1,6160	1,2769	1,3440	0,08978
1	0,7902	0,8316	0,05556
1,2656	1	1,0525	0,07031
1,2024	0,9500	1	0,06680
18,000	14,223	14,970	1

G. Tabelle der specifischen Gewichte.

1) Feste Körper.

Ahornholz	0,65	bis	0,69
Alabaster	2,70		
Alaun	1,7	»	1,8
Alaunschiefer	2,34	»	2,59
Amalgam, natürliches	13,755		
Anthracit	1,4	»	1,48
Antimon	6,65	»	6,72
Apfelbaumholz	0,67	»	0,79
Argentan	8,4	»	8,7
Arsenik	5,63	»	5,96
Asbest	2,10	»	2,80
Asphalt	1,07	»	1,16
Basalt	2,72	»	2,86
Bausteine, im Mittel	2,5		
Bernstein	1,06	»	1,09
Bimsstein	0,91	»	1,65
Birkenholz	0,60	»	0,80
Birnbaumholz	0,65	»	0,73
Blei	11,33	»	11,45
Bleiglätte	9,3	»	9,5
Bleiglanz	7,4	»	7,6
Braunkohle	1,22	»	1,29
Bronze	8,67	»	8,95
Buchenholz	0,63	»	0,85
Butter	0,943		
Caoutschuk	0,925	»	0,934
Ebenholz	0,80	»	1,33
Eichenholz	0,62	»	0,85
Eis	0,916	»	0,927
Eisen, geschmiedet	7,6	»	7,79
» gegossen	7,0	»	7,5
» in Draht	7,6	»	7,75
Elfenbein	1,80	»	1,92
Erde	1,36	»	2,40
Erlenholz	0,42	»	0,68
Fette	0,92	»	0,94
Feuerstein	2,58	»	2,59
Fichtenholz	0,38	»	0,79
Franzosenholz (Guajak)	1,33		
Glas, Bouteillen=	2,73		
» Krystall=	2,89		

Glas, Flint-	3,20	bis	3,78
Glockenmetall	8,81		
Gneiß	2,39	»	2,71
Gold, gediegen	14,6	»	19,1
» gegossen	19,25		
» gehämmert	19,5		
Granit	2,50	»	3,05
Harz, von Fichten	1,073		
Holz, Laubholz, trocken, im Mittel	0,659		
» » mit Wasser gesättigt	1,110		
» Nadelholz, trocken, im Mittel	0,453		
» » mit Wasser gesättigt	0,839		
Holzkohle, von Nadelholz	0,28	»	0,44
» von Eichenholz	0,573		
Kalk, gebrannt	1,55	»	1,79
Kalkmörtel	1,64	»	1,86
Kalkstein	2,46	»	2,84
Kanonenmetall	8,788		
Kiefernholz	0,463	»	0,910
Kieselsteine	2,3	»	2,7
Kirschbaumholz	0,577	»	0,715
Koaks	0,4		
Kochsalz	2,10	»	2,17
Korkholz	0,240		
Kreide, weiße	1,8	»	2,66
Kupfer, gegossen	8,59	»	8,90
» gehämmert	8,88	»	9,00
» in Draht	8,78	»	8,95
Lehm	1,52	»	2,85
Lerchenholz	0,473	»	0,565
Lindenholz	0,559	»	0,604
Mahagonyholz	0,563	»	1,063
Marmor	2,52	»	2,85
Mauerwerk von Bruchsteinen	2,40	»	2,46
» » Sandsteinen	2,05	»	2,12
» » Ziegelsteinen	1,47	»	1,70
Mehl von Weizen	1,56		
Messing, gegossen	8,40	»	8,71
» in Blechen	8,52	»	8,62
» in Draht	8,34	»	8,73
Mühlsteinquarz	1,24	»	2,61
Platin	20,9	»	21,5
Porphyr	2,4	»	2,8
Porzellan	2,38	»	2,49
Quarz (siehe Kieselsteine).			
Roggen in Masse	0,776		
Sand, fein und trocken	1,40	»	1,64
» » » feucht	1,90	»	1,95
» grob	1,37	»	1,49

Sandstein	1,90	bis	2,70
Silber, gegossen	10,10	»	10,47
» gehämmert	10,51	»	10,62
Stahl, Cementstahl	7,26	»	7,80
» gefrischt	7,50	»	7,81
» Gußstahl	7,83	»	7,92
Steinkohlen	1,21	»	1,51
Tannenholz	0,49	»	0,75
Thon	1,80	»	2,63
Thonschiefer	2,76	»	2,88
Wachs	0,97		
Ziegelstein, gemeiner	1,40	»	2,20
» Klinker	1,52	»	2,29
Zink, gegossen	6,86	»	7,22
» gewalzt	7,19	»	7,86
Zinn	7,29	»	7,47

2) Tropfbare Flüssigkeiten.

Aether, bei 20° C.	0,716		
Alkohol, absoluter, bei 20° C.	0,792		
Bier	1,023	bis	1,034
Kochsalzlauge, gesättigt, bei 0°	1,208		
Milch	1,02	»	1,04
Oele: Baumöl, bei 12° C.	0,919		
Leinöl, bei 12° C.	0,940		
Olivenöl, bei 15° C.	0,918		
Rübsenöl, bei 15° C.	0,913		
Quecksilber, bei 0°	13,550	»	13,575
» gegen Wasser bei 0°	13,598		
Säuren: Salpetersäure, bei 12° C.	1,522		
Salzsäure, bei 15° C.	1,192		
Schwefelsäure, wasserfrei, bei 20° C.	1,970		
Seewasser	1,02	»	1,04
Wasser, destillirtes	1,000		
Wein, Rheinwein	0,992	»	1,002

3) Gas- und dampfförmige Flüssigkeiten.

Bei 0° Temperatur und unter 0,76 Meter Druck.
Das specifische Gewicht der Luft, welches in Hinsicht auf Wasser = 0,0013 ist, = Eins gesetzt.

Alkoholdampf	1,613		
Atmosphärische Luft	1,000		
Kohlenoxydgas	0,941		
Kohlensaures Gas	1,524		
Kohlenwasserstoffgas: 1) ölbildendes	0,985		
2) Grubengas	0,559		
Quecksilberdämpfe	6,976	bis	7,03

Sauerstoffgas	1,103
Schwefelsaure Dämpfe	3,01
Schwefligsaures Gas	2,247
Steinkohlengas	0,5 bis 0,6
Stickstoffgas	0,976
Wasserdampf (ideell)	0,624
» , gesättigter, bei 100° C.	0,470
Wasserstoffgas	0,0688.

Beispiele.

1) Nach Tabelle B. sind 67,5 baierische Pfund
= 67,5 . 1,23457 = 83,333 englische Pfund
= 67,5 . 0,5600 = 37,8 Kilogramm.

2) Nach Tabelle C. ist 7 Centner 24 Pfund altes preuß. Gewicht

$$= \left\{ \begin{array}{r} 720,2750 \\ 18,7084 \\ 3,7417 \end{array} \right\} = 742,7251 \text{ Pfund}$$

= 7 Centner 42,7251 Pfund neues oder Zollgewicht.

3) Nach Tabelle D. ist 43 Pfund 15 Loth Zollgewicht

$$= \left\{ \begin{array}{r} 42,76144 \\ 3,20711 \\ 0,35634 \\ 0,17817 \end{array} \right\} = 46,50306 \text{ Pfund}$$

= 46 Pfund 16,098 Loth altes preuß. Gewicht.

4) Wenn ein Balken pr. Fuß preuß. mit 2500 Zollpfund belastet ist, so trägt nach Tabelle E. ein Fuß österreichisch
= 2500 . 0,8993 = 2248,25 österr. Pfund.

5) Wenn eine Kolbenfläche pr. Quadratzoll engl. mit 40 Pfund Druck belastet ist, so trägt nach Tabelle F. ein Quadratcentimeter derselben
= 40 . 0,07031 = 2,8124 Kilogramm.

6) Wenn der Festigkeitsmodul des Zinkes pr. Quadratzoll engl. 7500 Pfund engl. beträgt, so ist nach Tabelle F. derselbe pr. Quadratzoll preuß.
= 7500 . 0,9619 = 7214 Zollpfund.

II. Tabelle der Dichtigkeiten.

1) Gewicht von 1 bis 9 Cubikzoll in Zollpfund.

Name des Stoffes.	1	2	3
Wasser	0,0357	0,0715	0,1072
Quecksilber	0,4845	0,9691	1,4536
Gußeisen	0,2590	0,5181	0,7771
Stabeisen	0,2733	0,5467	0,8200
Blei	0,4055	0,8111	1,2166
Zinn	0,2608	0,5217	0,7825
Kupfer	0,3126	0,6253	0,9379
Zink	0,2519	0,5038	0,7557
Messing	0,3037	0,6074	0,9111
Bronze	0,3162	0,6324	0,9486
Silber	0,3752	0,7503	1,1255
Gold	0,6932	1,3863	2,0795

2) Gewicht von 1 bis 9 Cubikfuß in Zollpfund.

Name des Stoffes.	1	2	3
Atmosphärische Luft bei 0° C.	0,0800	0,1600	0,2399
» » bei 100° C.	0,0585	0,1170	0,1755
Wasserdampf, gesättigter, bei 100° C.	0,0376	0,0752	0,1128
Wasser	61,74	123,48	185,22
Gußeisen	447,6	895,2	1342,8
Stabeisen	472,3	944,6	1416,9
Blei	700,7	1401,5	2102,2
Zinn	450,7	901,4	1352,1
Kupfer	540,2	1080,4	1620,7
Zink	435,3	870,5	1305,8
Messing	524,8	1049,6	1574,4
Bronze	546,4	1092,8	1639,2
Mauerwerk von { Bruchsteinen .	148,2	296,4	444,5
Mauerwerk von { Sandsteinen .	125,9	251,9	377,8
Mauerwerk von { Ziegeln . . .	98,8	197,6	296,4
Laubholz . . { trocken . . .	40,7	81,4	122,1
Laubholz . . { mit Wasser gesättigt . .	68,5	237,1	205,6
Nadelholz . { trocken . . .	28,0	55,9	83,9
Nadelholz . { mit Wasser gesättigt . .	51,8	103,6	155,4

H. Tabelle der Dichtigkeiten.

1) Gewicht von 1 bis 9 Cubikzoll in Zollpfund.

4	5	6	7	8	9 C.-Zoll.
0,1429	0,1786	0,2144	0,2501	0,2858	0,3216
1,9382	2,4227	2,9073	3,3918	3,8764	4,3609
1,0362	1,2952	1,5542	1,8133	2,0723	2,3314
1,0933	1,3666	1,6400	1,9133	2,1866	2,4600
1,6221	2,0277	2,4332	2,8387	3,2443	3,6498
1,0433	1,3041	1,5650	1,8258	2,0866	2,3475
1,2505	1,5632	1,8758	2,1885	2,5011	2,8137
1,0076	1,2595	1,5114	1,7633	2,0152	2,2671
1,2148	1,5185	1,8222	2,1259	2,4296	2,7333
1,2648	1,5811	1,8973	2,2135	2,5297	2,8459
1,5007	1,8758	2,2510	2,6262	3,0013	3,3765
2,7726	3,4658	4,1590	4,8521	5,5453	6,2385

2) Gewicht von 1 bis 9 Cubikfuß in Zollpfund.

4	5	6	7	8	9 C.-Fuß.
0,3199	0,3999	0,4799	0,5599	0,6398	0,7198
0,2340	0,2925	0,3510	0,4095	0,4681	0,5266
0,1504	0,1880	0,2257	0,2633	0,3009	0,3385
246,96	308,70	370,44	432,18	493,92	555,66
1790,5	2238,1	2685,7	3133,3	3580,9	4028,5
1889,2	2361,5	2833,9	3306,2	3778,5	4250,8
2803,0	3503,7	4204,5	4905,2	5606,0	6306,7
1802,8	2253,5	2704,2	3154,9	3605,6	4056,3
2160,9	2701,1	3241,3	3781,6	4321,8	4862,0
1741,1	2176,3	2611,6	3046,9	3482,1	3917,4
2099,2	2624,0	3148,7	3673,5	4198,3	4723,1
2185,6	2732,0	3278,4	3824,8	4371,2	4917,6
592,7	740,9	889,1	1037,2	1185,4	1333,6
503,8	629,7	755,7	881,6	1007,6	1133,5
395,1	493,9	592,7	691,5	790,3	889,1
162,7	203,4	244,1	284,8	325,5	366,2
274,1	342,7	411,2	479,7	548,3	616,8
111,9	139,8	167,8	195,8	223,7	251,7
207,2	259,0	310,8	362,6	414,4	466,2

I. Gewichte von Metallblechen.

Dicke des Bleches	Ein Quadratfuß Blech wiegt			
	Gußeisen $\varepsilon = 7,25$	Schmiedeis. $\varepsilon = 7,80$	Kupfer $\varepsilon = 8,85$	Zink $\varepsilon = 7,25$
Sechszehntel-Zoll.	Pfund.	Pfund.	Pfund.	Pfund.
1	2,33	2,51	2,85	2,33
2	4,66	5,02	5,69	4,66
3	6,99	7,52	8,54	6,99
4	9,33	10,03	11,38	9,33
5	11,66	12,54	14,23	11,66
6	13,99	15,05	17,08	13,99
7	16,32	17,56	19,92	16,32
8	18,65	20,07	22,77	18,65
9	20,98	22,57	25,61	20,98
10	23,31	25,08	28,46	23,31
11	25,64	27,59	31,30	25,64
12	27,98	30,10	34,15	27,98
13	30,31	32,61	37,00	30,31
14	32,64	35,11	39,84	32,64
15	34,97	37,62	42,69	34,97
16	37,30	40,13	45,53	37,30

K. Gewichtstafel für Quadrateisen.

(Schmiedeeisen, $\varepsilon = 7,80$)

Seitenlänge des quadratischen Querschnitts	Gewicht des laufenden Fußes Quadrateisen			
	0	1	2	3
Zoll.	Pfund.	Pfund.	Pfund.	Pfund.
0	0,00	0,0523	0,209	0,470
1	3,34	4,23	5,23	6,32
2	13,38	15,10	16,93	18,86
3	30,10	32,66	35,32	38,09
4	53,51	56,90	60,41	64,01
5	83,61	87,84	92,18	96,36
6	120,39	125,46	130,63	135,91
7	163,87	169,77	175,78	181,90
8	214,03	220,77	227,62	234,57
9	270,88	278,46	286,14	293,93

I. Gewichte von Metallblechen.

Dicke des Bleches	Ein Quadratfuß Blech wiegt			
	Messing $\varepsilon = 8{,}55$	Zinn $\varepsilon = 7{,}35$	Blei $\varepsilon = 11{,}35$	Silber $\varepsilon = 10{,}55$
Sechszehntel-Zoll.	Pfund.	Pfund.	Pfund.	Pfund.
1	2,75	2,36	3,65	3,39
2	5,50	4,73	7,30	6,78
3	8,25	7,09	10,95	10,18
4	11,00	9,45	14,60	13,57
5	13,75	11,82	18,25	16,96
6	16,50	14,18	21,90	20,35
7	19,24	16,54	25,55	23,75
8	21,99	18,91	29,20	27,14
9	24,74	21,27	32,85	30,53
10	27,49	23,64	36,50	33,92
11	30,24	26,00	40,15	37,32
12	32,99	28,36	43,80	40,71
13	35,75	30,73	47,45	44,10
14	38,49	33,09	51,10	47,49
15	41,24	35,45	54,75	50,89
16	43,99	37,82	58,40	54,28

K. Gewichtstafel für Quadrateisen.

(Schmiedeeisen, $\varepsilon = 7{,}80$)

Seitenlänge des quadratischen Querschnitts	Gewicht des laufenden Fußes Quadrateisen			
	4	5	6	7 Achtelzoll
Zoll.	Pfund.	Pfund.	Pfund.	Pfund.
0	0,836	1,306	1,880	2,560
1	7,52	8,83	10,24	11,76
2	20,90	23,04	25,29	27,64
3	40,97	43,95	47,03	50,22
4	67,72	71,54	75,45	79,48
5	101,16	105,81	110,57	115,43
6	141,29	146,78	152,37	158,07
7	188,11	194,44	200,86	207,40
8	241,62	248,78	256,04	263,41
9	301,82	309,81	317,91	326,12

L. Gewichtstafel für Rundeisen.

Durchmesser des kreisförmigen Querschnitts	Gewicht des laufenden Fußes Rundeisen			
	0	1	2	3
Zoll.	Pfund.	Pfund.	Pfund.	Pfund.
0	0,00	0,0410	0,164	0,369
1	2,63	3,32	4,10	4,97
2	10,51	11,86	12,99	14,82
3	23,64	25,65	27,74	29,92
4	42,03	44,69	47,44	50,27
5	65,66	68,99	72,39	75,68
6	94,56	98,45	102,60	106,75
7	128,70	133,34	138,06	142,86
8	168,10	173,39	178,77	184,23
9	212,75	218,70	224,75	230,85

M. Gewichtstafel für Flacheisen.

Bei der Breite von	Gewicht des laufenden Fußes Flacheisen in Pfunden, bei der Dicke von					
	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8 Zoll
1/4 Zoll	0,104	0,209	0,313	0,418	0,523	0,627
2/4 »	0,209	0,418	0,627	0,836	1,045	1,254
3/4 »	0,313	0,627	0,940	1,254	1,568	1,880
1 »	0,418	0,836	1,254	1,672	2,090	2,508
1 1/4 »	0,522	1,045	1,568	2,090	2,613	3,135
1 2/4 »	0,627	1,254	1,881	2,508	3,135	3,762
1 3/4 »	0,732	1,463	2,195	2,926	3,658	4,389
2 »	0,836	1,632	2,508	3,344	4,180	5,016
2 1/4 »	0,941	1,881	2,822	3,762	4,703	5,644
2 2/4 »	1,045	2,090	3,135	4,180	5,225	6,270
2 3/4 »	1,150	2,299	3,449	4,598	5,748	6,898
3 »	1,254	2,508	3,762	5,016	6,270	7,525
3 1/4 »	1,359	2,717	4,076	5,434	6,793	8,152
3 2/4 »	1,463	2,926	4,389	5,852	7,316	8,779
3 3/4 »	1,568	3,135	4,703	6,270	7,838	9,406
4 »	1,672	3,344	5,016	6,688	8,361	10,03
4 1/4 »	1,777	3,553	5,330	7,106	8,883	10,66
4 2/4 »	1,881	3,762	5,643	7,525	9,406	11,29
4 3/4 »	1,986	3,971	5,957	7,943	9,928	11,91
5 »	2,090	4,180	6,270	8,361	10,45	12,54
5 1/4 »	2,195	4,389	6,584	8,779	10,97	13,17
5 2/4 »	2,299	4,598	6,897	9,197	11,50	13,80
5 3/4 »	2,404	4,807	7,211	9,615	12,02	14,42
6 »	2,508	5,016	7,525	10,03	12,54	15,05

L. Gewichtstafel für Rundeisen.

Durchmesser des kreisförmigen Querschnitts	Gewicht des laufenden Fußes Rundeisen			
	4	5	6	7 Achtelzoll
Zoll.	Pfund.	Pfund.	Pfund.	Pfund.
0	0,657	1,026	1,477	2,011
1	5,91	6,94	8,04	9,23
2	16,42	18,10	19,86	21,71
3	32,18	34,51	36,94	39,53
4	53,19	56,18	59,26	62,42
5	79,45	83,11	86,84	90,66
6	110,97	115,28	119,67	124,15
7	147,74	152,71	157,76	162,88
8	189,77	195,39	201,10	206,88
9	237,05	243,33	249,69	256,13

M. Gewichtstafel für Flacheisen.

Bei der Breite von	Gewicht des laufenden Fußes Flacheisen in Pfunden, bei der Dicke von					
	7/8	8/8	9/8	10/8	11/8	12/8 Zoll
1/4 Zoll	0,732	0,836	0,941	1,045	1,150	1,254
2/4 »	1,463	1,672	1,881	2,090	2,299	2,508
3/4 »	2,195	2,508	2,822	3,135	3,449	3,762
1 »	2,926	3,344	3,762	4,180	4,598	5,016
1 1/4 »	3,658	4,180	4,703	5,225	5,748	6,270
1 2/4 »	4,389	5,016	5,643	6,270	6,898	7,525
1 3/4 »	5,121	5,852	6,584	7,316	8,047	8,779
2 »	5,852	6,689	7,525	8,361	9,197	10,03
2 1/4 »	6,585	7,525	8,465	9,406	10,35	11,29
2 2/4 »	7,316	8,361	9,406	10,45	11,50	12,54
2 3/4 »	8,047	9,197	10,35	11,50	12,65	13,80
3 »	8,779	10,03	11,29	12,54	13,80	15,05
3 1/4 »	9,510	10,87	12,23	13,59	14,94	16,30
3 2/4 »	10,24	11,70	13,17	14,63	16,09	17,56
3 3/4 »	10,97	12,54	14,11	15,68	17,24	18,81
4 »	11,70	13,38	15,05	16,72	18,39	20,07
4 1/4 »	12,44	14,22	15,99	17,77	19,54	21,32
4 2/4 »	13,17	15,05	16,93	18,81	20,69	22,57
4 3/4 »	13,90	15,88	17,87	19,86	21,84	23,83
5 »	14,63	16,72	18,81	20,90	22,99	25,08
5 1/4 »	15,36	17,56	19,75	21,95	24,14	26,34
5 2/4 »	16,09	18,40	20,69	22,99	25,29	27,59
5 3/4 »	16,83	19,23	21,63	24,04	26,44	28,84
6 »	17,56	20,07	22,57	25,08	27,59	30,10

N. Gewichtstabelle für gußeiserne Röhren.

Gewicht eines laufenden Fußes Röhre in Pfunden (γ = 0,2590 Pfund pr. Cubikzoll)

Bei der lichten Weite in Zollen	und der Wandstärke in Achtelzollen					
	2	3	4	5	6	7
1	3,05	5,04	7,32	9,92	12,82	16,02
$1^1/_4$	3,66	5,95	8,54	11,44	14,65	18,16
$1^2/_4$	4,28	6,87	9,77	12,97	16,48	20,29
$1^3/_4$	4,88	7,78	10,99	14,50	18,31	22,43
2	5,49	8,70	12,21	16,02	20,14	24,57
$2^1/_4$	6,10	9,61	13,43	17,55	21,97	26,70
$2^2/_4$	6,71	10,53	14,65	19,07	23,80	28,84
$2^3/_4$	7,32	11,44	15,87	20,60	25,63	30,98
3	7,93	12,36	17,09	22,13	27,47	33,11
$3^1/_4$	8,54	13,28	18,31	23,65	29,30	35,25
$3^2/_4$	9,15	14,19	19,53	25,18	31,13	37,38
$3^3/_4$	9,77	15,11	20,75	26,70	32,96	39,52
4	10,38	16,02	21,97	28,23	34,79	41,66
$4^1/_4$	10,99	16,94	23,19	29,75	36,62	43,79
$4^2/_4$	11,60	17,85	24,41	31,28	38,45	45,93
$4^3/_4$	12,21	18,77	25,63	32,81	40,28	48,07
5	12,82	19,68	26,86	34,33	42,11	50,20
$5^1/_4$	13,43	20,60	28,08	35,86	43,95	52,34
$5^2/_4$	14,04	21,51	29,30	37,38	45,78	54,47
$5^3/_4$	14,65	22,43	30,52	38,91	47,61	56,61
6	15,26	23,35	31,74	40,44	49,44	58,75
$6^1/_2$	16,48	25,18	34,18	43,49	51,27	63,02
7	17,70	27,01	36,62	46,54	54,93	67,29
$7^1/_2$	18,92	28,84	39,06	49,59	58,59	71,56
8	20,14	30,67	41,50	52,64	62,26	75,84
$8^1/_2$	21,36	32,50	43,95	55,69	65,92	80,11
9	22,58	33,33	46,39	58,75	69,58	84,38
$9^1/_2$	23,80	35,16	48,83	61,80	73,24	88,65
10	25,02	37,99	51,27	64,85	76,90	92,93
$10^1/_2$	26,24	39,83	53,71	67,90	80,57	97,20
11	27,47	41,66	56,15	70,95	84,23	101,47
$11^1/_2$	28,69	43,49	58,59	74,01	87,89	105,74
12	29,91	45,32	61,03	77,06	91,55	110,02
13	32,35	48,98	65,92	83,16	98,88	118,56
14	34,79	52,64	70,80	89,27	106,20	127,11
15	37,23	56,30	75,68	95,37	113,53	135,65
16	39,67	59,97	80,57	101,47	120,85	144,20
17	42,11	63,63	85,45	107,57	128,17	152,74
18	44,56	67,29	90,33	113,68	135,50	161,28
19	47,00	70,95	95,21	119,78	142,82	169,83

N. Gewichtstabelle für gußeiserne Röhren.

Gewicht eines laufenden Fußes Röhre in Pfunden ($\gamma = 0{,}2590$ Pfund pr. Cubikzoll)

Bei der lichten Weite in Zollen	und der Wandstärke in Achtelzollen				
	8	9	10	11	12
1	19,52	23,35	27,47	31,89	36,62
1¼	21,96	26,09	30,52	35,25	40,28
1²/₄	24,40	28,84	33,57	38,60	43,95
1¾	26,84	31,59	36,62	41,96	47,61
2	29,28	34,33	39,67	45,32	51,27
2¼	31,73	37,08	42,72	48,68	54,93
2²/₄	34,17	39,83	45,78	52,03	58,59
2¾	36,61	42,57	48,83	55,39	62,26
3	39,00	45,32	51,88	58,75	65,92
3¼	41,49	48,06	54,93	62,10	69,58
3²/₄	43,93	50,81	57,98	65,46	73,24
3¾	46,38	53,56	61,03	68,82	76,90
4	48,81	56,30	64,09	72,17	80,57
4¼	51,25	59,05	67,14	75,53	84,23
4²/₄	53,69	61,80	70,19	78,89	87,89
4¾	56,13	64,54	73,24	82,24	91,55
5	58,57	67,29	76,29	85,60	95,21
5¼	61,01	70,04	79,35	88,96	98,88
5²/₄	63,45	72,78	82,40	92,32	102,54
5¾	65,89	75,53	85,45	95,67	106,20
6	68,33	78,28	88,50	99,03	109,86
6½	73,21	83,77	94,60	105,74	117,19
7	78,09	89,26	100,71	112,46	124,51
7½	82,97	94,76	106,81	119,17	131,84
8	87,85	100,25	112,91	125,88	139,16
8½	92,74	105,74	119,02	132,60	146,48
9	97,62	111,24	125,12	139,31	153,81
9½	102,50	116,73	131,23	146,03	161,13
10	107,38	122,22	137,33	152,74	168,46
10½	112,26	127,72	143,43	159,45	175,78
11	117,14	133,21	149,54	166,16	183,10
11½	122,02	138,70	155,64	172,88	190,43
12	126,90	144,19	161,74	179,60	199,75
13	136,67	155,18	173,95	193,02	212,40
14	146,42	166,17	186,16	206,45	227,05
15	156,19	177,15	198,36	219,88	241,70
16	165,95	188,14	210,57	233,31	256,35
17	175,71	199,13	222,78	246,73	270,99
18	185,47	210,11	234,98	260,16	285,64
19	195,23	221,10	247,19	273,59	300,29

O. Gewichtstabelle für gußeiserne Kugeln.

Durchmesser der Kugel	Gewicht der Kugel in Pfunden			
	0	1	2	3 Viertelzoll.
Zoll				
1	0,13563	0,26491	0,45776	0,72691
2	1,0851	1,5449	2,1193	2,8207
3	3,662	4,656	5,815	7,1525
4	8,680	10,412	12,360	1,4536
5	16,954	19,627	22,566	25,785
6	29,297	33,113	37,248	41,714
7	46,522	51,687	57,220	63,135
8	69,444	76,160	83,296	90,864
9	98,876	107,35	116,29	125,71
10	135,63	146,06	157,01	168,50
11	180,53	193,12	206,28	220,03
12	234,37	249,33	264,91	281,12

P. Münztabelle.

Der deutsch-österreichische Münzvertrag ist eingegangen von dem Kaiserthume Oesterreich, dem Königreiche Preußen und den übrigen deutschen Staaten, mit Ausnahme der Großherzogthümer Mecklenburg-Schwerin und Strelitz, der Herzogthümer Holstein und Lauenburg und der freien Städte Hamburg, Bremen und Lübeck.

Die Gewichtseinheit dieses Münzvereines ist

1 Münzpfund = 1 Zollpfund = $\frac{1}{2}$ Kilogramm = 500 Gramm = 10000 Aß.

A. Aus einem Pfunde feinen Silbers werden geprägt:

a. Landesmünzen.

1. Nach dem Dreißig-Thaler-Fuße: 30 Thaler.
2. Nach dem Fünfundvierzig-Gulden-Fuße: 45 Gulden österreichische Währung.
3. Nach dem Zweiundfünfzigundeinhalb-Gulden-Fuße: $52\frac{1}{2}$ Gulden (rheinische Gulden) süddeutsche Währung.

b. Vereinsmünzen sind

die Einthalerstücke = 1 Thlr. = $1\frac{1}{2}$ Gld. österreichische Währung = $1\frac{3}{4}$ Gld. süddeutsche Währung, und die Zweithalerstücke = 2 Thlr. = 3 Gld. österreichische Währung = $3\frac{1}{2}$ Gld. süddeutsche Währung.

B. Aus einem Pfunde feinen Goldes werden geprägt: 50 Kronen, zu je $1/_{50}$ Zollpfund feinem Golde und 100 halbe Kronen, zu je $1/_{100}$ Zollpfund feinem Golde.

Der Feingehalt der Gold- und Silbermünzen ist 0,9, also der Zusatz (Kupfer) = 0,1.

Die Münzen in verschiedenen Ländern sind folgende:

1. Anhalt: wie in Preußen.
2. Baden: wie in Baiern.
3. Baiern: 1 Gulden (süddeutsche Währung) = 60 Kreuzer = 240 Pfennige.
4. Belgien: wie in Frankreich.
5. Braunschweig: wie in Preußen.
6. Bremen: 1 Thlr. in Gold = $1/_5$ Pistole oder Louisd'or = 72 Groten = 360 Schwaren = 1 Thlr. $2^2/_3$ Sgr. in Silber.
7. Dänemark: 1 Reichsbankthaler = 6 Mark = 96 Schilling = 480 Pfennig = $22^2/_3$ Sgr.
   1 Speciesthaler = 2 Reichsthaler.
8. England: 1 Sovereign = 1 Pfund Sterling (£) = 20 Schillinge = 240 Pence = 6 Thlr. 20,8 Sgr.
   1 Schilling = 10 Sgr.
9. Frankfurt a. M.: wie in Baiern.
10. Frankreich: 1 Franc = 20 Sous = 100 Centimes = $8^1/_{10}$ Sgr.
11. Hamburg: 1 Mark Courant = 16 Schilling = 192 Pfennige = 12,03 Sgr.
    1 Mark Banko = 16 Schilling = 15,17 Sgr.
12. Hannover: wie in Preußen.
13. Hessen, Großherzogthum: wie in Baiern.
14. Hessen, Kurfürstenthum: wie in Preußen.
15. Holland: 1 Gulden = 100 Cents = 17 Sgr. 0,12 Pf.
16. Holstein: wie in Dänemark.
17. Lippe-Detmold und Schaumburg: wie in Preußen.
18. Mecklenburg: 1 Thlr. = 48 Schillinge = 576 Pfennige = 1,0025 Thlr. Vereinsmünze.
19. Nassau: wie in Baiern.
20. Nordamerika. 1 Dollar = 100 Cents = 1,3793 Vereinsthaler = 41,38 Gr.
    $72^1/_2$ Cents = 1 Vereinsthaler.
21. Norwegen: 1 Speciesthaler = 5 Ort (Mark) = 120 Schilling = $45^2/_5$ Sgr.
22. Oesterreich: 1 Gulden = 100 Neukreuzer = $^2/_3$ Thlr.
23. Oldenburg: 1 Thlr. (Vereinsthaler) = 30 Groschen = 360 Schwaren.
24. Portugal: 1 Milreïs = 1000 Reïs = $44^1/_2$ Sgr.
25. Preußen: 1 Thlr. = 30 Sgr. = 360 Pf.
    1 Friedrichsd'or = $5^2/_3$ Thlr.
26. Rußland: 1 Silberrubel = 100 Kopeken = 400 Poluschken = $32^1/_3$ Sgr.
    1 halber Imperial = 5 Silberrubel.

27. Sachsen, Königreich: 1 Thlr. = 30 Ngr. = 300 Pf.
28. Sachsen-Altenburg: wie im Königreiche Sachsen.
29. Sachsen-Coburg-Gotha: theils wie in Baiern, theils wie im Königreiche Sachsen.
30. Sachsen-Meiningen: wie in Baiern.
31. Sachsen-Weimar: wie in Preußen.
32. Sardinien (Piemont): 1 Lira nuova = 100 Centesimi = 1 franz. Franc.
33. Schleswig: wie in Dänemark.
34. Schweden: 1 Rthlr. (Riksdaler) = 100 Oere = $11\frac{1}{2}$ Sgr. 1 Species = 4 Rthlr.
35. Schweiz: wie in Frankreich, 1 Franc = 100 Rappen.
36. Spanien: 1 Duro = 20 Reales = $42\frac{1}{2}$ Sgr. 1 Doblon de Isabel = 5 Duros.
37. Türkei: 1 Piaster = 40 Para = 120 Aper = $21\frac{3}{4}$ preuß. Pfennig.
 1 Beutel Silber = 500 Piaster.
 1 Beutel Gold = 30000 Piaster.
38. Würtemberg: wie in Baiern.

Beispiele.

1) Nach Tabelle G. und H. 1) wiegt ein Cubikzoll Platin im Mittel 0,0357 . 21,2 = 0,75684 Pfund.
2) Nach Tabelle H. 2) wiegen 3,79 Cubikfuß Gußeisen:
$$\left\{\begin{array}{r}1342,8\\313,3\\40,3\end{array}\right\} = 1696,4 \text{ Zollpfund,}$$
und 28,4 Cubikfuß Ziegelmauer:
$$\left\{\begin{array}{r}1976\\790\\40\end{array}\right\} = 2806 \text{ Pfund.}$$
3) Nach Tabelle I. wiegen 27,1 Quadratfuß Zinkblech von $\frac{1}{8}$ Zoll Dicke, = 27,1 . 4,66 = 126,3 Pfund.
4) Nach Tabelle K. wiegt ein Eisenstab von $2\frac{1}{4}$ Zoll ins Quadrat und 5 Fuß Länge, = 16,93 . 5 = 84,65 Pfund.
5) Nach Tabelle M. wiegt ein eiserner Reifen von 3 Zoll Breite, $\frac{1}{2}$ Zoll Dicke und 9 Fuß Länge, = 5,016 . 9 = 45,14 Pfund.
6) Nach Tabelle N. wiegt eine gußeiserne Röhre von 8 Fuß Länge, 6 Zoll lichter Weite und $\frac{3}{4}$ Zoll Wandstärke: = 8 . 49,44 = 395,5 Pfund.

Zweites Capitel.

Formeln, Regeln und Tabellen der allgemeinen Mechanik.

§. 1. Einfache Bewegung. Ist bei einer gleichförmigen Bewegung, c die Geschwindigkeit und s der in der Zeit t'' zurückgelegte Raum, so hat man

$$s = ct,\ c = \frac{s}{t} \text{ und } t = \frac{s}{c}.$$

Ist bei einer gleichförmigbeschleunigten Bewegung die Acceleration p, die Anfangsgeschwindigkeit $= 0$ und die Geschwindigkeit nach der Zeit $t, = v$, endlich der in dieser Zeit zurückgelegte Raum $= s$, so gelten folgende Formeln:

Gegeben:	v, t	s, t	p, t
Gesucht:	s, p	v, p	$v.\ s$
Formel:	$s = \frac{vt}{2}$ $p = \frac{v}{t}$	$v = \frac{2s}{t}$ $p = \frac{2s}{t^2}$	$v = pt$ $s = \frac{pt^2}{2}$

Gegeben:	v, s	v, p	s, p
Gesucht:	t, p	t, s	t, v
Formel:	$t = \frac{2s}{v}$ $p = \frac{v^2}{2s}$	$t = \frac{v}{p}$ $s = \frac{v^2}{2p}$	$t = \sqrt{\frac{2s}{p}}$ $v = \sqrt{2ps}$

Beim freien Fall der Körper ist:

	Für das preuß. Fußmaaß.	Für das österreich. Fußmaaß.	Für das badische Fußmaaß.
$v =$	$31{,}25\, t$ $7{,}906 \sqrt{s}$	$31{,}03\, t$ $7{,}878 \sqrt{s}$	$32{,}7\, t$ $8{,}087 \sqrt{s}$
$s =$	$15{,}625\, t^2$ $0{,}016\, v^2$	$15{,}515\, t^2$ $0{,}01611\, v^2$	$16{,}35\, t^2$ $0{,}01529\, v^2$
$t =$	$0{,}032\, v$ $0{,}253 \sqrt{s}$	$0{,}03223\, v$ $0{,}2539 \sqrt{s}$	$0{,}03058\, v$ $0{,}2473 \sqrt{s}$

Folgende Tabellen geben die am gewöhnlichsten vorkommenden Fallhöhen und Endgeschwindigkeiten an; ihre Einrichtung ist die gewöhnliche. Hiernach entspricht z. B. der Endgeschwindigkeit von 3,5 Fuß, die Fallhöhe 0,1960, und der Fallhöhe $s = 4{,}9$ Fuß, die Endgeschwindigkeit $v = 17{,}50$ Fuß; auch bestimmt sich durch Interpolation nach Tafel II. die der Endgeschwindigkeit $v = 16{,}5$ Fuß entsprechende Fallhöhe

Tafel I.

Die Fallhöhen für die Geschwindigkeiten von 0 bis 10 Fuß.

$v =$	0	1	2	3	4 Fuß.
.,0	0,0000	0,0160	0,0640	0,1440	0,2560
.,1	0,0002	0,0194	0,0706	0,1538	0,2690
.,2	0,0006	0,0230	0,0774	0,1638	0,2822
.,3	0,0014	0,0270	0,0846	0,1742	0,2958
.,4	0,0026	0,0314	0,0922	0,1850	0,3098
.,5	0,0040	0,0360	0,1000	0,1960	0,3240
.,6	0,0058	0,0410	0,1082	0,2074	0,3386
.,7	0,0078	0,0462	0,1166	0,2190	0,3534
.,8	0,0102	0,0518	0,1254	0,2310	0,3686
.,9	0,0130	0,0578	0,1345	0,2434	0,3842

Beim freien Fall der Körper ist:

	Für das engl. Fußmaaß	Für das paris. Fußmaaß.	Für das Metermaaß.
$v =$	$32{,}20\,t$ $8{,}025 \sqrt{s}$	$30{,}20\,t$ $7{,}772 \sqrt{s}$	$9{,}81\,t$ $4{,}429 \sqrt{s}$
$s =$	$16{,}10\,t^2$ $0{,}01553\,v^2$	$15{,}10\,t^2$ $0{,}01656\,v^2$	$4{,}905\,t^2$ $0{,}0510\,v^2$
$t =$	$0{,}03106\,v$ $0{,}2492 \sqrt{s}$	$0{,}03312\,v$ $0{,}2573 \sqrt{s}$	$0{,}1019\,v$ $0{,}4515 \sqrt{s}$

$s = 4{,}3 + 0{,}1 \cdot \frac{50 - 39}{58 - 39} = 4{,}36$ Fuß, so wie nach Tafel I. die der Fallhöhe 0,06 Fuß entsprechende Endgeschwindigkeit $v = 1{,}9 + 0{,}1 \cdot \frac{600 - 578}{640 - 578} = 1{,}935$ Fuß.

Tafel I.

Die Fallhöhen für die Geschwindigkeiten von 0 bis 10 Fuß.

$v =$	5	6	7	8	9 Fuß.
„,0	0,4000	0,5760	0,7840	1,0240	1,2960
„,1	0,4162	0,5954	0,8066	1,0498	1,3250
„,2	0,4326	0,6150	0,8298	1,0758	1,3542
„,3	0,4494	0,6350	0,8526	1,1022	1,3838
„,4	0,4666	0,6554	0,8762	1,1290	1,4138
„,5	0,4840	0,6760	0,9000	1,1560	1,4440
„,6	0,5018	0,6970	0,9242	1,1834	1,4746
„,7	0,5198	0,7182	0,9486	1,2110	1,5054
„,8	0,5382	0,7398	0,9734	1,2390	1,5366
„,9	0,5570	0,7618	0,9986	1,2674	1,5682

Tafel II.

Die den Fallhöhen von 0 bis 12 Fuß entsprechenden Endgeschwindigkeiten.

s =	0	1	2	3	4	5 Fuß.
.,0	0,00	7,91	11,18	13,69	15,81	17,68
.,1	2,50	8,29	11,46	13,92	16,01	17,85
.,2	3,54	8,66	11,73	14,14	16,20	18,03
.,3	4,33	9,01	11,99	14,36	16,39	18,20
.,4	5,00	9,35	12,25	14,58	16,58	18,37
.,5	5,59	9,68	12,50	14,79	16,77	18,54
.,6	6,12	10,00	12,75	15,00	16,96	18,71
.,7	6,61	10,31	12,99	15,21	17,14	18,87
.,8	7,07	10,61	12,23	15,41	17,32	19,04
.,9	7,50	10,90	13,46	15,61	17,50	19,20

Für die gleichförmig beschleunigte Bewegung, welche mit der Geschwindigkeit c anfängt, ist

$$v = c + pt = \frac{2s}{t} - c = \sqrt{c^2 + 2ps} = \frac{s}{t} + \frac{pt}{2},$$

$$s = ct + \frac{pt^2}{2} = \left(\frac{c+v}{2}\right) t = \frac{v^2 - c^2}{2p} = vt - \frac{pt^2}{2}.$$

Für die gleichförmig verzögerte Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit c ist

$$v = c - pt = \frac{2s}{t} - c = \sqrt{c^2 - 2ps} = \frac{s}{t} - \frac{pt}{2},$$

und

$$s = ct - \frac{pt^2}{2} = \left(\frac{c+v}{2}\right) t = \frac{c^2 - v^2}{2p} = vt + \frac{pt^2}{2}.$$

Für frei fallende und frei steigende Körper ist

$$p = g = 9{,}81 \text{ Meter} = 31{,}25 \text{ Fuß}$$

einzusetzen.

Für jede ungleichförmige Bewegung ist, wenn $\varkappa$ den in einem Zeitelement τ erhaltenen Zuwachs an Geschwindigkeit und σ den in einem Zeitelemente durchlaufenen Raum bezeichnet:

$$1)\ \varkappa = p\tau, \quad 2)\ \sigma = v\tau,$$

also auch

$$3)\ p = \frac{\varkappa}{\tau}, \quad 4)\ v = \frac{\sigma}{\tau},$$

endlich

$$5)\ p\sigma = v\varkappa.$$

Tafel II

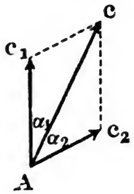
Die den Fallhöhen von 0 bis 12 Fuß entsprechenden Endgeschwindigkeiten.

s =	6	7	8	9	10	11 Fuß.
.,0	19,36	20,92	22,36	23,72	25,00	26,22
.,1	19,53	21,07	22,50	23,85	25,13	26,34
.,2	19,68	21,21	22,64	23,98	25,25	26,46
.,3	19,84	21,36	22,78	24,11	25,37	26,58
.,4	20,00	21,51	22,91	24,24	25,50	26,69
.,5	20,16	21,65	23,05	24,37	25,62	26,81
.,6	20,31	21,79	23,18	24,49	25,74	26,93
.,7	20,46	21,94	23,32	24,62	25,86	27,04
.,8	20,62	22,08	23,45	24,75	25,98	27,16
.,9	20,77	22,22	23,58	24,87	26,10	27,27

---

§. 2. **Zusammengesetzte Bewegung.** Aus den Seitengeschwindigkeiten c_1 und c_2, sowie dem eingeschlossenen Winkel $c_1 A c_2 = \alpha$. Fig. 180, folgt die mittlere Geschwindigkeit

Fig. 180.



$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + 2\, c_1 c_2 \cos. \alpha},$$

und der Winkel $c_1 A c = \alpha_1$, welchen dieselbe mit der Richtung von c_1 einschließt,

$$\sin. \alpha_1 = \frac{c_2 \sin. \alpha}{c},$$

oder

$$\tang. \alpha_1 = \frac{c_2 \sin. \alpha}{c_1 + c_2 \cos. \alpha}.$$

Schließen beide Bewegungen c_1 und c_2 den Rechtwinkel ein, so ist

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \text{ und } \tang. \alpha_1 = \frac{c_2}{c_1}.$$

Umgekehrt, folgt aus der mittleren Geschwindigkeit c und den Winkeln α_1 und α_2, welche dieselbe mit ihren Componenten einschließt:

$$c_1 = \frac{c \sin. \alpha_2}{\sin. (\alpha_1 + \alpha_2)} \text{ und } c_2 = \frac{c \sin. \alpha_1}{\sin. (\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Sollen die Componenten c_1 und c_2, Fig. 181 (a. f. S.) rechtwinkelig gegen einander stehen, soll also $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 90^0$ sein, so hat man

$$c_1 = c \cos. \alpha_1 \text{ und } c_2 = c \sin. \alpha_1.$$

Aus der absoluten Geschwindigkeit c_1 eines Körpers A, Fig. 182, und aus der absoluten Geschwindigkeit c_2 eines anderen B, folgt mit Hülfe des Winkels $ADB = \alpha$, um welchen

Fig. 181.

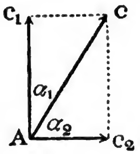
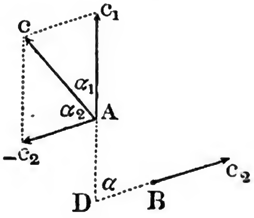


Fig. 182.



die Richtungen beider Geschwindigkeiten von einander abweichen, die relative Geschwindigkeit des ersten Körpers in Hinsicht auf den zweiten:

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 - 2\, c_1 c_2 \cos. \alpha}$$

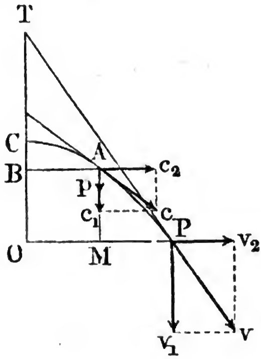
und für den Winkel $c A c_1 = \alpha_1$, welcher die Richtung dieser Bewegung angiebt:

$$\sin. \alpha_1 = \frac{c_2 \sin. \alpha}{c}.$$

Diese Formeln gelten auch bei der Zerlegung, Zusammensetzung und Vergleichung der Accelerationen, in welchem Falle nur statt c_1, c_2 und c, p_1, p_2 und p zu substituiren sind.

Hat ein Punkt A, Fig. 183, die Geschwindigkeit c und Acceleration p, deren Richtungen den Winkel $c A p = \alpha$ zwischen sich einschließen, so sind die Coordinaten des Scheitels C der entsprechenden parabolischen Bahn:

Fig. 183.



$$CB = a = \frac{c^2 \cos. \alpha^2}{2p}$$

und

$$BA = b = \frac{c^2 \sin. 2\alpha}{2p}.$$

Für irgend einen Punkt P, den der Körper nach t Secunden einnimmt, hat man die Abscisse

$$AM = x = ct \cos. \alpha + \frac{pt^2}{2}$$

und die Ordinate

$$MP = y = ct \sin. \alpha, \text{ auch } x = y \cot g. \alpha + \frac{py^2}{2c^2 \sin. \alpha^2};$$

ferner sind im Punkte P die Seitengeschwindigkeiten:

$$v_1 = c \cos. \alpha + pt \quad \text{und} \quad v_2 = c \sin. \alpha,$$

auch ist die mittlere Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{c^2 + 2cpt\cos.\alpha + p^2t^2};$$

und für die Richtung dieser Geschwindigkeit:

$$\sin.vPv_1 = \sin.\varphi = \frac{c\sin.\alpha}{v} \text{ oder}$$

$$\tang.\varphi = \frac{v_2}{v_1} = \frac{c\sin.\alpha}{c\cos.\alpha + pt}.$$

Vom Scheitel C ausgegangen ist, wenn x_1 die Abscisse CO und y_1 die Ordinate OP bezeichnen:

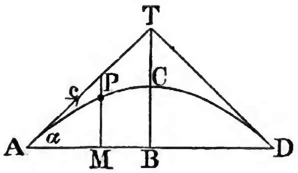
$$x_1 = \frac{py_1^2}{2c^2\sin.\alpha^2}, \text{ und } y_1 = c\sin.\alpha\sqrt{\frac{2x_1}{p}},$$

auch

$$\tang.\varphi = \frac{y_1}{2x_1} = \frac{OP}{2CO} = \frac{OP}{OT}.$$

Für die Wurfbewegung hat man, wenn c die Wurfgeschwindigkeit und α den Elevationswinkel TAB, Fig. 184, bezeichnet, die Wurfhöhe

Fig. 184



$$CB = a = \frac{c^2\sin.\alpha^2}{2g},$$

die halbe Wurfweite

$$BA = BD = b = \frac{c^2\sin.2\alpha}{2g};$$

ferner die Abscisse

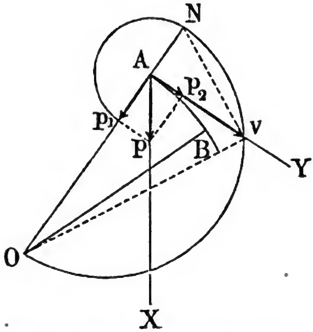
$$AM = x = ct\cos.\alpha$$

und die Ordinate

$$MP = y = ct\sin.\alpha - \frac{gt^2}{2} = x\tang.\alpha - \frac{gx^2}{2c^2\cos.\alpha^2}.$$

Aus der Geschwindigkeit $\overline{Av} = v$ und der Acceleration $\overline{Ap} = p$, Fig. 185, an irgend einer Stelle der krummlinigen Bewegung, folgt mittels des Winkels $pAv = \alpha$, der Krümmungshalbmesser $OA = OB$ der Bahn AB:

Fig. 185.



$$r = \frac{v^2}{p\sin.\alpha}.$$

Es ist also zu $p\sin.\alpha$ (AN), v und v (Av), r die vierte Proportionale (AO).

Umgekehrt ist die Acceleration

$$p = \frac{v^2}{r\sin.\alpha}.$$

§. 3. Phoronometrische Differenzial- und Integralformeln.

1) Einfache Bewegung:

Nimmt während des Zeitelementes ∂t die Geschwindigkeit

v eines Punktes um ∂v und der Weg s um ∂s zu. so gelten folgende Formeln:

$$\text{I. } p = \frac{\partial v}{\partial t}, \text{ oder } \partial v = p\partial t,$$

$$\text{II. } v = \frac{\partial s}{\partial t}, \text{ oder } \partial s = v\partial t,$$

$$\text{III. } v\partial v = p\partial s, \text{ oder } \frac{v^2 - c^2}{2} = \int p\partial s,$$

wobei p die Acceleration, sowie c die Anfangs- und v die Endgeschwindigkeit bei Durchlaufung des Weges s bezeichnen.

Für $p = o$, ist v, sowie für $v = o$, s ein Maximum oder Minimum.

2) Zusammengesetzte Bewegung.

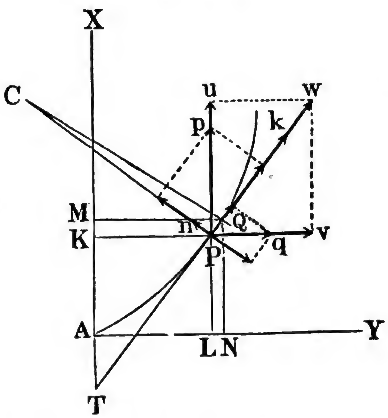
Wenn während des Zeitelementes ∂t die Coordinatenwege $AK = x$ und $AL = y$, Fig. 186, um die Elemente ∂x und ∂y wachsen, so sind die entsprechenden Coordinatengeschwindigkeiten:

$$\text{I. } u = \frac{\partial x}{\partial t} \text{ und } v = \frac{\partial y}{\partial t},$$

und es ist die Tangential- oder Curvengeschwindigkeit:

$$\text{II. } w = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{\frac{\partial x^2 + \partial y^2}{dt^2}} = \frac{\partial s}{\partial t},$$

Fig. 186.



wobei ∂s das Element PQ des Curvenweges $\overline{AP} = s$ bezeichnet.

Hierbei sind auch die Coordinatenaccelerationen:

$$\text{III. } p = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

und

$$q = \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Dieselben lassen sich auch ersetzen durch die Tangentialacceleration:

$$\text{IV. } k = \frac{\partial w}{\partial t},$$

in Vereinigung mit der Normalacceleration

$$\text{V. } n = \frac{w^2}{r},$$

wobei r den Krümmungshalbmesser bezeichnet.

Auch ist

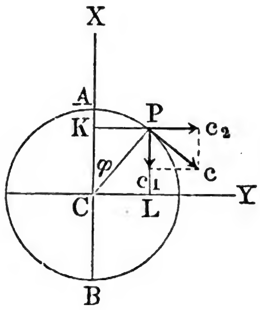
$$w\partial w = k\partial s = p\partial x + q\partial y, \text{ wonach}$$

$$\frac{w^2 - c^2}{2} = \int k \partial s = \int p \partial x + \int q \partial y$$

folgt, wenn unter c die anfängliche Tangentialgeschwindigkeit verstanden wird.

Beispiel. Bewegt sich ein Punkt P gleichförmig im Kreise AB, Fig. 187, so ist $w = c$ constant und daher der Weg $AP = s = r\varphi = ct$, wobei r den Halbmesser $CA = CP$ dieses Kreises, sowie φ^0 den Umdrehungswinkel ACP bezeichnet.

Fig. 187.



Auch folgt $r \partial \varphi = c \partial t$.

Die Coordinaten des bewegten Punktes P sind

$$CK = x = r \cos. \varphi$$

und

$$KP = y = r \sin. \varphi,$$

sowie die Elemente derselben:

$$\partial x = - r \sin. \varphi \partial \varphi$$

und

$$\partial y = r \cos. \varphi \partial \varphi.$$

Daher folgen die Coordinatengeschwindigkeiten

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} = - r \sin. \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} = - c \sin. \varphi = - c \sin. \left(\frac{ct}{r}\right),$$

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = r \cos. \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} = c \cos. \varphi = c \cos. \left(\frac{ct}{r}\right);$$

sowie die Coordinatenaccelerationen:

$$p = \frac{\partial u}{\partial t} = - c \cos. \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \frac{c^2}{r} \cos. \varphi = - \frac{c^2}{r} \cos. \left(\frac{ct}{r}\right)$$

$$q = \frac{\partial v}{\partial t} = - c \sin. \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \frac{c^2}{r} \sin. \varphi = - \frac{c^2}{r} \sin. \left(\frac{ct}{r}\right).$$

Die Tangentialacceleration $k = \frac{\partial w}{\partial t}$ ist = Null, und die Normalacceleration $n = \frac{w^2}{r} = \frac{c^2}{r}$, constant.

Endlich hat man $p \partial x + q \partial y$ = Null.

§. 4. Kraft und Arbeit.

Ist G das Gewicht eines Körpers und g die Beschleunigung der Schwere, so hat man die Masse dieses Körpers: $M = \frac{G}{g}$, sowie umgekehrt, $G = Mg$.

Für das preußische Fußmaaß ist:

$$M = \frac{G}{31,25} = 0,032\, G \text{ und } G = 31,25\, M.$$

Für das Metermaaß aber:

$$M = \frac{G}{9,81} = 0,1019\, G \text{ und } G = 9,81\, M.$$

Ist γ die Dichtigkeit des Wassers und ε das specifische Gewicht eines Körpers, so hat man die Dichtigkeit desselben $\gamma_1 = \varepsilon\gamma$.

Ist überdies V das Volumen desselben, so hat man sein absolutes Gewicht:

$$G = V\gamma_1 = V\varepsilon\gamma, \text{ und umgekehrt, } V = \frac{G}{\varepsilon\gamma}.$$

Für das preußische Maaß und Gewicht ist:

$$G = 61{,}74\,\varepsilon V \text{ Pfd. und } V = \frac{G}{61{,}74\,\varepsilon} = 0{,}01620\frac{G}{\varepsilon} \text{ Cub.-Fuß.}$$

Für das französische Maaß und Gewicht:

$$G = 1000\,\varepsilon V \text{ Kilgr. und } V = 0{,}001\,\frac{G}{\varepsilon} \text{ Cub.-Meter.}$$

Ist P die Kraft, welche einer Masse die Acceleration p ertheilt, so hat man $P = Mp = \frac{pG}{g}$, und umgekehrt,

$$p = \frac{P}{M} = \frac{P}{G}g.$$

Aus der Kraft P und dem Wege s ihres Angriffspunktes, in der Richtung der ersteren gemessen, folgt die Arbeit oder Leistung der Kraft:

$$L = Ps.$$

Ist P veränderlich, so hat man einen mittleren Werth derselben einzuführen. Sind z. B. am Ende der Wege 0, $\frac{1}{3}s$, $\frac{2}{3}s$, s die Kraftwerthe P_0, P_1, P_2, P_3, so ist die Leistung der Kraft

$$L = (P_0 + 3\,P_1 + 3\,P_2 + P_3)\,\frac{s}{8} \text{ (s. Seite 190).}$$

Um eine Masse M aus der Geschwindigkeit c in die Geschwindigkeit v zu versetzen, ist die Arbeit

$$L = Ps = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right)M = \left(\frac{v^2 - c^2}{2\,g}\right)G = \left(\frac{v^2}{2\,g} - \frac{c^2}{2\,g}\right)G$$

nöthig; auch kann die Masse diese Arbeit verrichten, wenn sie gezwungen wird, ihre Geschwindigkeit v in c umzusetzen.

Eine Pferdekraft ist die Leistung von 75 Kilogrammmeter = 480 Fußpfund pr. Sec., daher

$$L = \frac{Ps}{480} = 0{,}002083\,Ps \text{ Pferdekräfte, wenn } P \text{ in}$$

Pfunden und s in Fußen ausgedrückt werden; dagegen

$$L = \frac{Ps}{75} = 0{,}01333\,Ps \text{ Pferdekräfte,}$$

wenn P in Kilogramm und s in Metern gegeben sind.

Folgende Tabelle drückt die hier zu Grunde liegenden Größen g, γ u. s. w. in verschiedenen Landesmaaßen aus.

	Beschleunigung g	Reciproke $\frac{1}{g}$	Dichtigkeit des Wassers γ	Reciproke $\frac{1}{\gamma}$
Preußen . .	31,25 Fß.	0,03200	{61,75 n. P. {66 alte Pfd.	0,01620 0,01515
Oesterreich .	31,03 »	0,03223	56,38 »	0,01774
Baiern . .	33,605 »	0,02976	44,33 »	0,02256
Sachsen . .	34,63 »	0,02888	45,35 »	0,02205
Hannover .	33,58 »	0,02978	53,20 »	0,01879
Würtemberg	34,24 »	0,02921	50,20 »	0,01992
Baden . .	32,70 »	0,03058	54 »	0,01855
Darmstadt .	39,24 »	0,02549	31,20 »	0,03205
England .	32,18 »	0,03108	62,33 »	0,01604
Frankreich .	30,20 »	0,03311	69,92 »	0,01430
»	9,81 Met.	0,10194	1000 Kil.	0,001

	Fußpfund	Reciproke $\frac{1}{\text{Fußpfund}}$	1 Pferdekraft	Reciproke $\frac{1}{\text{Pferdekraft}}$
Preußen, n. Gewicht .	1	1	480 Fpfd.	0,002083
Preußen, alt. Gewicht	1,0690	0,9355	510 »	0,001961
Oesterreich .	0,8865	1,1281	430 »	0,002326
Baiern . .	0,9601	1,0415	459 »	0,002179
Sachsen . .	1,1083	0,9023	530 »	0,001887
Hannover .	1,1487	0,8706	549 »	0,001821
Würtemberg	1,1700	0,8539	560 »	0,001786
Baden . .	1,0462	0,9559	500 »	0,002000
Darmstadt .	1,2554	0,7965	600 »	0,001667
England .	1,1351	0,8810	550 »	0,001818
Frankreich, altes Maaß	0,9869	1,0133	472 »	0,002119
Frankreich, neues Maaß	0,15693 Kilgrm.	6,3720	75 Kilm.	0,013338

Beispiele. 1. Ein Körper von 5,3 engl. Cubikfuß Inhalt und 2,15 specifischem Gewicht, hat das absolute Gewicht: $G = 5{,}3 \,.\, 2{,}15 \,.\, 62{,}33 = 710{,}25$ Pfd. engl., und die Masse:

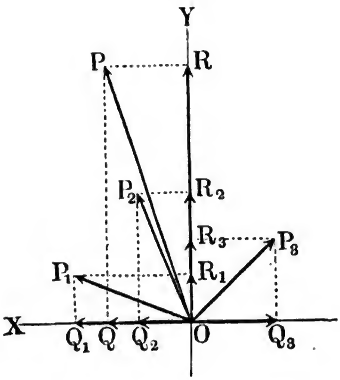
$$M = \frac{G}{g} = 710{,}25 \,.\, 0{,}03108 = 22{,}07 \text{ Pfd.}$$

2. Eine Leistung von 4735 Fußpfund baierisch ist $= 4735 . 1{,}0415 = 4931{,}5$ Fußpfund preuß. $= 10{,}3$ Pferdekräfte.

3. Eine Leistung von 27 Pferdekräften ist $= 27 . 75 = 2025$ Kilogrammmeter $= 27 . 430 = 11610$ Fußpfund österreichisch.

§. 5. Zusammensetzung der Kräfte. Kräfte werden genau so zusammengesetzt und zerlegt wie Accelerationen und Geschwindigkeiten, weshalb denn die in §. 2 mitgetheilten Formeln auch hier ihre Anwendung finden.

Fig. 188.



Wird ein Körper O, Fig. 188, von den Kräften $P_1, P_2, P_3 \ldots$ ergriffen, deren Richtungen in einer Ebene liegen und mit einer Axe $O X$ die Winkel

$P_1 O X = \alpha_1$,
$P_2 O X = \alpha_2$,
$P_3 O X = \alpha_3$

einschließen, so hat man für die entsprechende Mittelkraft folgende Formeln:

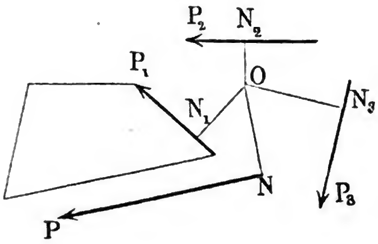
$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots$$
$$= P_1 \cos. \alpha_1 + P_2 \cos. \alpha_2 + P_3 \cos. \alpha_3 + \cdots,$$
$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots$$
$$= P_1 \sin. \alpha_1 + P_2 \sin. \alpha_2 + P_3 \sin. \alpha_3,$$
$$P = \sqrt{Q^2 + R^2}, \text{ und } tang. P O X = tang. \alpha = \frac{R}{Q}$$

Greifen die Kräfte P_1, P_2 u. s. w. in verschiedenen Punkten A_1, $A_2 \ldots$, Fig. 189, des Körpers an, und sind die Hebelarme dieser Kräfte:

$$O N_1 = a_1,\ O N_2 = a_2,\ O N_3 = a_3 \text{ u. s. w.,}$$

so hat man überdies den Hebelarm der Mittelkraft:

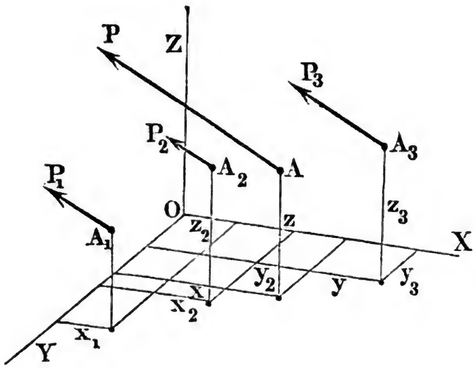
Fig. 189.



$$ON = a = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 + \cdots}{P}.$$

Von Parallelkräften P_1, P_2, P_3 u. s. w., Fig. 190, ist die

Fig. 190.



Mittelkraft $P = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots$, und ihr Mittelpunkt A, d. i. der Punkt, durch welchen die Mittelkraft bei jeder Richtung dieses Kräftesystemes geht, bestimmt durch folgende Abstände von den drei Projectionsebenen:

$$x = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + \cdots}{P_1 + P_2 + \cdots}$$

$$y = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + \cdots}{P_1 + P_2 + \cdots} \text{ und}$$

$$z = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2 + \cdots}{P_1 + P_2 + \cdots}.$$

Wirken die Kräfte P_1, P_2, $P_3 \ldots$ nach Richtungen in verschiedenen Ebenen, so führt man diese auf eine oder zwei Mittelkräfte wie folgt zurück. Zunächst verlege man alle Angriffspunkte in eine und dieselbe Ebene, z. B. in eine Horizontalebene, dann zerlege man jede Kraft in eine Seitenkraft, deren Richtung normal auf dieser Ebene steht, und in eine Seitenkraft, deren Richtung in diese Ebene selbst fällt; endlich vereinige man die ersteren nach der letzten und die anderen nach der vorletzten Regel zu einer Mittelkraft. Wenn sich die Richtungen dieser Mittelkräfte schneiden, so lassen sich beide nach den obigen Regeln auf eine einzige Mittelkraft zurückführen, außerdem aber ist eine solche Vereinigung gar nicht möglich.

§. 6. Zusammensetzung der Kräftepaare. Die Wirkung eines Kräftepaares (P, $-P$), Fig. 191 (a. f. S.), wird durch das Moment oder das Product Pa aus einer Componenten P und dem Hebelarme oder dem senkrechten Abstande $CD = a$ der Angriffslinien beider Componenten (P, $-P$)

von einander gemessen, und ist von den Richtungen derselben ganz unabhängig. Zwei Kräftepaare $(P, -P)$ und $(Q, -Q)$, Fig. 192, geben dieselbe Wirkung, wenn das Moment Pa

Fig. 191.

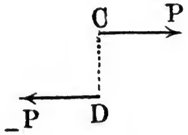
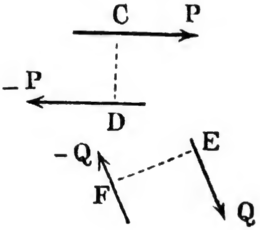


Fig. 192.



des einen gleich dem Momente Qb des anderen ist, wenn sich also die Hebelarme $CD = a$ und $EF = b$ derselben umgekehrt wie ihre Componenten P und Q verhalten; jedoch müssen die Ebenen, in welchen dieselben wirken, entweder mit einander zusammenfallen, oder parallel liegen.

Zwei Kräftepaare $(P, -P)$ und $(Q, -Q)$ mit den Momenten Pa und Qb lassen sich durch ein drittes Kräftepaar $(R, -R)$ ersetzen, dessen Moment $Rc = Pa + Qb$ ist.

Ist $Qb = -Pa$, haben also die Kräftepaare entgegengesetzte Umdrehungsrichtungen, so fällt $Rc =$ Null aus, und es halten sich die beiden Kräftepaare das Gleichgewicht.

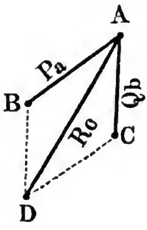
Das aus den in einer und derselben oder in parallelen Ebenen wirkenden Kräftepaaren $(P_1, -P_1)$, $(P_2, -P_2)$, $(P_3, -P_3)\ldots$ resultirende Kräftepaar $(P, -P)$ hat das Moment

$$Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 + \cdots$$

Jede Linie, welche rechtwinkelig auf der Ebene eines Kräftepaares steht, läßt sich als **Umdrehungsaxe** oder Axe desselben ansehen.

Wirken zwei Kräftepaare $(P, -P)$ und $(Q, -Q)$ in verschiedenen Ebenen, so läßt sich das Moment Rc des resultirenden Kräftepaares $(R, -R)$ der Diagonale AD, Fig. 193, eines Parallelogrammes gleichsetzen, dessen Seiten AB und AC durch die Momente Pa und Qb dieser Paare gemessen werden und dessen Seitenwinkel BAC dem Axenwinkel derselben gleich ist. Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes lassen sich auch mehrere, in verschiedenen Ebenen wirkende Kräftepaare zu einem Kräftepaare vereinigen. Man trägt von einem beliebigen Punkte aus auf die Axenrichtungen dieser Paare die Momente

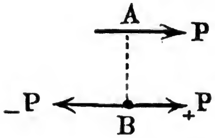
Fig. 193.



derselben auf, und vereinigt diese Momente genau so mit einander, als wenn es Kräfte wären.

Eine Kraft P, Fig. 194, läßt sich auf ein Kräftepaar $(P, -P)$ und eine gleiche Kraft $+P$ zurücken, deren Richtung durch einen gegebenen Punkt B geht, denn die in diesem Punkte angreifenden Kräfte $+P$ und $-P$ halten sich das Gleichgewicht.

Fig. 194.



Kommt es darauf an, ein ganzes System von Kräften zu vereinigen, so zerlege man jede dieser Kräfte in ein Kräftepaar und in eine, in einem und demselben Punkte angreifende Kraft, und vereinige die Kräftepaare zu einem mittleren Kräftepaar, sowie die Kräfte zu einer Mittelkraft.

§. 7. Der Schwerpunkt.

1) Die Schwerpunkte regelmäßiger Räume fallen mit den Mittelpunkten derselben zusammen; die der symmetrischen Räume liegen in den Symmetrieaxen oder Symmetrieebenen.

2) Der Abstand $CS = z$ des Schwerpunktes S eines Kreisbogens $AMB = b$, Fig. 195, wird mit Hülfe des Halbmessers $CM = r$ und der Sehne $AB = s$ durch die Proportion:

$$\frac{z}{r} = \frac{s}{b} \text{ gefunden.}$$

Ist β^0 der Centriwinkel ACB, so hat man hiernach

Fig. 195.

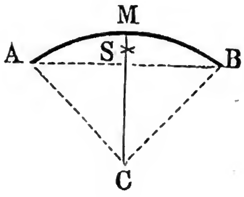
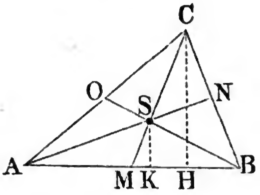


Fig. 196.



$$z = \frac{rs}{b} = \frac{2 \sin. \frac{1}{2} \beta}{\beta} \cdot r,$$

und für den Halbkreis

$$z = \frac{2}{\pi} r = 0,6366 \ldots r, \text{ ungefähr } = \frac{7}{11} r.$$

3) Die Diagonalen eines Parallelogrammes schneiden einander im Schwerpunkte desselben.

4) Die Geraden CM, AN, BO von den Ecken eines Dreieckes ABC, Fig. 196, nach den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten schneiden einander im Schwerpunkte S; auch ist die Entfernung des Schwerpunktes S von der Spitze

C, $= \frac{2}{3}$ und von der Mitte M, $= \frac{1}{3}$ der Halbirungslinie CM, sowie der Abstand SK desselben von der Grundlinie, $\frac{1}{3}$ und von der Spitze, $\frac{2}{3}$ der Höhe CH.

5) Sind a, b und c die Abstände der Eckpunkte eines Dreieckes von einer Ebene, so hat man für den Abstand z seines Schwerpunktes von eben dieser Ebene:

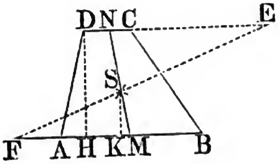
$$z = \frac{a + b + c}{3}.$$

6) Der Schwerpunkt S eines Trapezes AC, Fig. 197, wird gefunden, wenn man $CE = AB = b_1$ und $AF = CD = b_2$ macht, und EF, sowie die Halbirungslinie MN zieht; der Durchschnitt dieser beiden Linien ist S, und der Abstand $SK = z$ dieses Punktes von der Basis wird mittels der Basen b_1 und b_2 und der Höhe $DH = h$ durch die Formel

$$z = \frac{b_1 + 2 b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3}$$

gefunden.

Fig. 197



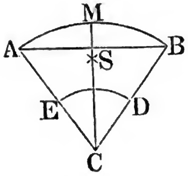
7) Der Schwerpunkt eines Kreisausschnittes ACB, Fig. 198, liegt in der Halbirungslinie CM, und steht um

$$CS = z = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sin. \frac{1}{2} \beta}{\beta} r$$

vom Mittelpunkte C ab (vergl. Nr. 2). Hiernach ist für den Halbkreis

$$z = \frac{4 r}{3 \pi} = 0{,}4244\, r, \text{ annähernd } = \frac{14}{33} r.$$

Fig. 198.



8) Für den Schwerpunkt des Kreisabschnittes AMB, Fig. 198, ist, wenn F den Inhalt und s die Sehne AB desselben bezeichnet, der Abstand des Schwerpunktes von C:

$$z = \frac{s^3}{12 F}.$$

9) Für das concentrische Ringstück $ABDE$ mit den Halbmessern r_1 und r_2 und dem Centriwinkel β^0 ist:

$$CS = z = \frac{4}{3} \frac{\sin. \frac{1}{2} \beta}{\beta} \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}.$$

10) Der Schwerpunkt einer Parabelfläche ABC, Fig. 199, deren Basis $AC = a$ und Höhe $BC = b$ ist, steht um $AK = u = \frac{3}{5} b$ von dem Scheitel A, und um $KS = v = \frac{3}{8} a$ von der Basis AC ab.

11) Der Schwerpunkt eines Prismas liegt in der Mitte der die Schwerpunkte beider Grundflächen, und der seines Mantels in der Mitte der die Schwerpunkte der Umfänge der Grund-

flächen verbindenden Linie; der Schwerpunkt des Mantels einer geraden Pyramide oder eines geraden Kegels liegt in der Höhenlinie, und zwar um $\frac{1}{3}$ dieser Linie von der Basis, und $\frac{2}{3}$ derselben von der Spitze ab; der Schwerpunkt einer Kugelzone liegt endlich in der Mitte der die Mittelpunkte beider Begrenzungskreise verbindenden Geraden.

Fig. 199.

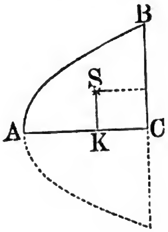
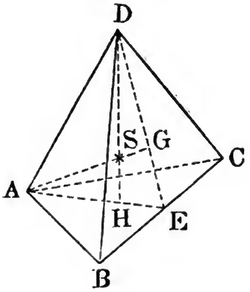


Fig. 200.



12) Der Schwerpunkt S einer dreiseitigen Pyramide $ABCD$, Fig. 200, ist der Durchschnitt aller Geraden AG, DH.. von je einem Eckpunkte nach dem Schwerpunkte der Gegenfläche; und steht um den vierten Theil einer solchen Linie von dieser Fläche, also um Dreiviertel derselben Linie von dem Eckpunkte, oder um ein Viertel der Höhe von der Grundfläche, sowie um drei Viertel der Höhe von der Spitze ab.

13) Stehen die vier Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide um a, b, c, d von einer Ebene ab, so ist der Abstand des Schwerpunktes dieser Pyramide von eben dieser Ebene

$$z = \frac{a + b + c + d}{4}.$$

14) Der Schwerpunkt einer jeden Pyramide befindet sich in der Linie von der Spitze nach dem Schwerpunkte der Grundfläche und steht um drei Viertel der Höhe von jener und um ein Viertel derselben von dieser ab.

15) Sind F_1 und F_2 die Grundflächen und ist h die Höhe einer abgekürzten Pyramide, so hat man den Abstand des Schwerpunktes derselben von F_1:

$$z = \frac{F_1 + 2\sqrt{F_1 F_2} + 3 F_2}{F_1 + \sqrt{F_1 F_2} + F_2} \cdot \frac{h}{4}.$$

Für den abgekürzten Kegel mit den Halbmessern r_1 und r_2 ist:

$$z = \frac{r_1^2 + 2 r_1 r_2 + 3 r_2^2}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2} \cdot \frac{h}{4}.$$

16) Für den Obelisken, Fig. 201 (a. f. S.), dessen rectanguläre Grundflächen G_1 und G_2 die Dimensionen a_1 und b_1 und a_2 und b_2 haben, und dessen Höhe $AB = h$ ist, hat man den Abstand des Schwerpunktes von G_1:

$$z = \frac{a_1 b_1 + 3\,a_2 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1}{2\,a_1 b_1 + 2\,a_2 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1} \cdot \frac{h}{2}.$$

17) Der Schwerpunkt S des Kugelausschnittes ACB, Fig. 202, ist zugleich der Schwerpunkt der Calotte $A_1 M_1 B_1$, deren

Fig. 201.

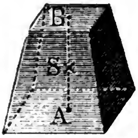
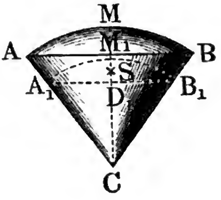


Fig. 202.



Halbmesser $CA_1 = {}^3/_4\, r = {}^3/_4$ des Halbmessers CA der Kugel ist, befindet sich also in der Mitte der Höhe $D_1 M_1 = {}^3/_4\, h$ der Calotte $A_1 M_1 B_1$ und im Abstande $CS = z = {}^3/_4 \left(r - \frac{h}{2}\right)$ vom Mittelpunkte C.

Für die Halbkugel ist $h = r$ und sonach $z = {}^3/_8\, r$.

18) Der Schwerpunkt des Abschnittes eines Sphäroides AMB, Fig. 203, sowie der des Abschnittes $A_1 M B_1$ einer Kugel, steht vom Mittelpunkte der Kugel ab um

$CS = z = {}^3/_4 \dfrac{(2\,r - h)^2}{3\,r - h}$, wobei h wie in Nr. 17 die Höhe des Abschnittes und r den Halbmesser CM der Kugel oder des Sphäroides bezeichnet.

19) Sind F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 die Querschnitte eines

Fig. 203.

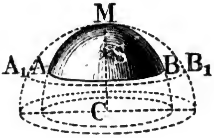
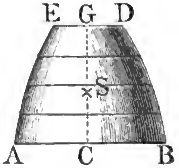


Fig. 204.



Körpers oder einer Fläche AD, Fig. 204, in gleichen Abständen von einander und ist h die ganze Höhe, oder der Abstand zwischen F_0 und F_4, so hat man den Abstand des Schwerpunktes S von F_0 annähernd:

$$CS = z = \frac{0 . F_0 + 1 . 4 F_1 + 2 . 2 F_2 + 3 . 4 F_3 + 4 . F_4}{F_0 + 4 F_1 + 2 F_2 + 4 F_3 + F_4} \cdot \frac{h}{4}.$$

20) Bei der Bestimmung des Schwerpunktes zusammengesetzter Körper ist von den Formeln:

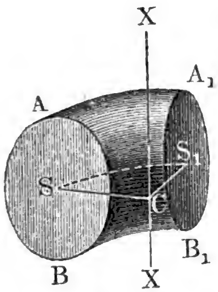
$$x = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + \cdots}{P_1 + P_2 + \cdot}, \; y = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + \cdots}{P_1 + P_2 + \cdots},$$

$$z = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2 + \cdots}{P_1 + P_2 + \cdot\,\cdot},$$

Gebrauch zu machen (siehe den vorigen Paragraphen). Sind die Körpertheile homogen, so kann man statt ihrer Gewichte P_1, $P_2 \ldots$, ihre Volumina V_1, $V_2 \ldots$ einsetzen.

§. 8. Die Guldinische Regel. Der Inhalt eines Rotationskörpers AB, Fig. 205, ist gleich dem eines Prismas, welches zur Basis die Erzeugungsfläche $AB = A_1 B_1 = F$ des ersteren und zur Höhe die Axe. d. i. den Weg $SS_1 = w$ hat, welchen der Schwerpunkt S der Fläche bei Umdrehung oder Erzeugung des Körpers zurücklegt. Ist der Umdrehungswinkel $SCS_1 = \beta^0$, so hat man hiernach den gedachten Inhalt:

Fig. 205.



$$V = Fw = \beta r F = \frac{\beta^0}{180^0} \cdot \pi r F.$$

Ebenso ist für den Inhalt G einer Rotationsfläche, wenn r den Abstand des Schwerpunktes ihrer Erzeugungslinie l von der Umdrehungsaxe bezeichnet:

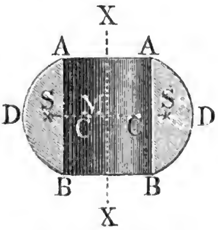
$$G = lw = \beta r l = \frac{\beta^0}{180^0} \pi r l.$$

Für den Ring mit elliptischem Querschnitte ist, wenn a und b die Halbaxen der Ellipse, sowie r den Abstand CS ihres Mittelpunktes von der Umdrehungsaxe bezeichnet:

$$V = 2\pi^2 a b r.$$

Für einen Ring, dessen Querschnitt F ein Kreissegment ADB, Fig. 206, ist, hat man, wenn s die Sehne AB desselben und a den Abstand MC seines Mittelpunktes C von der Umdrehungsaxe bezeichnet, nach Nr. 8, §. 7:

Fig. 206.



$$w = 2\pi\left(a + \frac{s^3}{12\,F}\right)$$

$$V = 2\pi\left(aF + \frac{s^3}{12}\right).$$

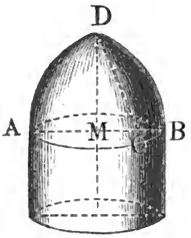
Z. B. für den Ring mit halbkreisförmigem Querschnitte, wo $F = \frac{1}{2}\pi r^2$ und $s = 2r$ ist, $V = \pi r^2 (\pi a + \frac{4}{3} r)$; für eine Kugel mit cylindrischem Loche ist $a = 0$, daher $V = \frac{\pi s^3}{6}$.

Für die **krumme Oberfläche** dieses Ringes hat man nach Nr. 2, §. 7, wenn b den Erzeugungsbogen AB bezeichnet,

$$G = 2\pi\left(a + \frac{s}{b}r\right)b = 2\pi(ab + sr).$$

Dieselben Formeln lassen sich auch auf die **Kuppeln**, wie ADB, Fig. 207, anwenden. Aus der Höhe $MD = h$ und der halben lichten Weite $MA = MB = r$ der Kuppel folgt zunächst der Centriwinkel $ACD = \varphi$, durch die Formel:

Fig. 207.



1) $tang. \frac{\varphi}{2} = \frac{r}{h}$; und hieraus der Bogenhalbmesser $CA = CD$;

2) $r_1 = \frac{h}{sin. \varphi}$, ferner der Abstand $CM = a$ des Mittelpunktes von der Axe der Kuppel:

3) $a = r_1 - r$; der Erzeugungsbogen AD;

4) $b = \varphi r_1$ und das Erzeugungssegment;

5) $F = \left(\varphi - \frac{sin. 2\varphi}{2}\right)\frac{r_1^2}{2}$.

Hiernach ist der cubische Fassungsraum der Kuppel:

6) $V = 2\pi\left(\frac{h^3}{3} - aF\right)$, und die Oberfläche derselben:

7) $G = 2\pi(hr_1 - ab)$.

Die Formel $V = Fw$ für das Volumen eines Rotationskörpers ist auf alle Körper anwendbar, welche durch Bewegung einer ebenen Fläche F längs einer Curve entstehen.

Stellt sich hierbei F stets rechtwinkelig gegen diese Leitcurve, so ist w der Weg des Schwerpunktes der Fläche; rückt dagegen F parallel fort, so ist w die Projection dieses Weges, rechtwinkelig gegen die Ebene von F.

Der Inhalt eines **schief abgeschnittenen Prismas** ist gleich dem eines gerade abgeschnittenen, welches mit demselben einerlei Grundfläche und zur Höhe den Abstand des Schwerpunktes der schiefen Schnittfläche von der Basis hat. Ist G der Inhalt der Grundfläche und h dieser Abstand, so folgt demnach $V = Gh$.

Drittes Capitel.

Statik.

§. 9. Die Hebel. Ist $CA = a$ der Hebelarm der Kraft P und $CB = b$ der der Last Q eines Hebels ACB,

Fig. 208.

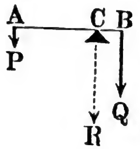


Fig. 209.

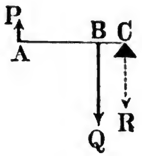


Fig. 210.

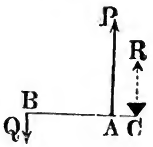


Fig. 208, 209, 210, so hat man $\frac{P}{Q} = \frac{b}{a}$, oder $Pa = Qb$, d. i. im Gleichgewichtszustande eines Hebels verhält sich die Kraft zur Last umgekehrt wie der Hebelarm der Kraft zum Hebelarm der Last, oder es ist das **statische Moment der Kraft gleich dem der Last.**

Beim **doppelarmigen Hebel** ACB, Fig. 208, ist der Druck im Stützpunkte:

Fig. 211.

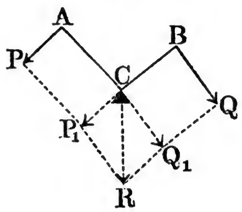
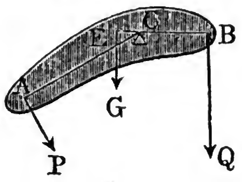


Fig. 212.



$R = P + Q$, beim einarmigen Hebel in Fig. 209 ist:
$R = Q - P$, beim einarmigen Hebel in Fig. 210:
$R = P - Q$,
endlich beim **Winkelhebel** ACB, Fig. 211, wo die Kraft- und Lastrichtung einen Winkel $P_1CQ_1 = \alpha$ zwischen sich einschließen:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos.\alpha}.$$

Ist G das Gewicht des Hebels und e der Horizontalabstand CE, Fig. 212, seines Schwerpunktes von dem Stützpunkte C, so hat man das Moment des Hebelgewichtes $= Ge$, und daher, mit Berücksichtigung des letzteren:

$$Pa \pm Ge = Qb.$$

§. 10. Stabilität. Im statischen Sinne ist das Maaß der Stabilität eines Körpers $ABCD$, Fig. 214, das Product aus dem Gewichte G dieses Körpers, und dem Abstande AM der äußersten Kante A seiner Basis von der verticalen Schwerlinie SG.

Fig. 213.

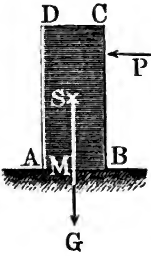
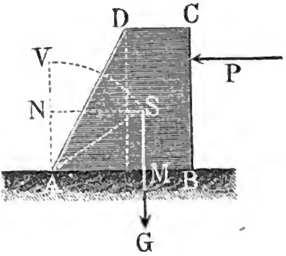


Fig. 214.



Für eine parallelepipedische Mauer AC, Fig. 213, von der Breite $AB = b$, Höhe $AD = h$ und Länge $= l$, ist bei der Dichtigkeit γ derselben das Maaß der Stabilität:

$$S = \tfrac{1}{2} b^2 h l \gamma.$$

Für die geböschte Mauer AC, Fig. 214, ist, wenn man die Böschung oder Ausladung der Rückseite auf jeden Fuß Höhe $= n$ annimmt:

$$S = (\tfrac{1}{2} b^2 + n b h + \tfrac{1}{3} n^2 h^2)\, h l \gamma.$$

Im dynamischen Sinne ist das Maaß der Stabilität eines Körpers die Arbeit, welche man aufzuwenden hat, um den Körper aus dem stabilen in den labilen Gleichgewichtszustand zu bringen, so daß sein Schwerpunkt senkrecht über den Stützpunkt zu stehen kommt. Sind $AM = x$ und $MS = y$ die horizontalen und verticalen Coordinaten des Schwerpunktes S, Fig. 214, in Hinsicht auf die Kante A der Stützung, so hat man die Höhe, auf welche der Schwerpunkt steigen muß, um das labile Gleichgewicht des Körpers herzustellen:

$$\overline{V_1 N} = \sqrt{x^2 + y^2} - y;$$

ist endlich noch G das Gewicht des Körpers, so folgt die gesuchte Stabilität oder Arbeit:

$$S = G\,(\sqrt{x^2 + y^2} - y).$$

Für die geböschte Mauer in Fig. 214 ist:

$$x = \frac{3b^2 + 6nbh + 2n^2h^2}{3(2b + nh)},$$

$$y = \frac{3b + nh}{2b + nh} \cdot \frac{h}{3}, \text{ und}$$

$$G = (b + \tfrac{1}{2} n h)\, h l \gamma.$$

§. 11. Schiefe Ebene. Ist G das Gewicht eines Körpers S, Fig. 215, auf der schiefen Ebene EH, und α der Neigungswinkel EHR derselben gegen den Horizont, so hat man:

1) das Bestreben des Körpers zum Herabgleiten: $P = G \sin. \alpha$,
2) den Normaldruck desselben gegen die Ebene: $N = G \cos. \alpha$.

Fig. 215.

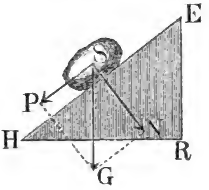
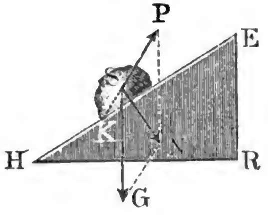


Fig. 216.



Soll eine Kraft P, Fig. 216, dem Gewichte G eines Körpers auf einer schiefen Ebene das Gleichgewicht halten, deren Richtung um einen Winkel $PKE = \beta$ von der schiefen Ebene abweicht, so hat man:

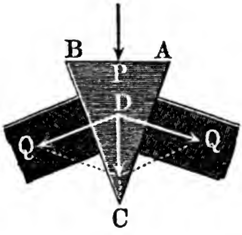
1) $P = \dfrac{G \sin. \alpha}{\cos. \beta}$, und den Normaldruck:

2) $N = \dfrac{G \cos. (\alpha + \beta)}{\cos. \beta}$.

Ist P horizontal gerichtet, so folgt $P = G \, tang. \alpha$, und

$$N = \frac{G}{\cos. \alpha}.$$

Fig. 217.



Für den Keil ACB, Fig. 217, ist, wenn die Kraft P winkelrecht auf den Rücken AB und die Last Q winkelrecht gegen die Seite des Keiles wirkt, und die Schärfe ACB des Keiles durch α bezeichnet wird:

$$P = 2 Q \sin. \frac{\alpha}{2}.$$

§. 12. Seilpolygon. Wenn Gleichgewicht zwischen den Kräften eines Seilpolygones stattfindet, so müssen sich auch die Kräfte in jedem Knoten das Gleichgewicht halten, auch müssen sämmtliche Kräfte im Gleichgewicht sein, wenn sämmtliche Kräfte in einem einzigen Punkte angreifend angenommen werden.

Beim festen Knoten K, Fig. 218, ist die Kraft, welche die unter dem Winkel $AKB = \alpha$ zusammen stoßenden Seilstücke mit den Kräften S_1 und S_2 spannt:

$$P = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2\, S_1\, S_2 \cos.\, \alpha},$$

und für die Winkel $PKS_1 = \alpha_1$ und $PKS_2 = \alpha_2$, welche P mit den Seilrichtungen einschließt:

$$\sin.\, \alpha_1 = \frac{S_2}{P} \sin.\, \alpha \text{ und } \sin.\, \alpha_2 = \frac{S_1}{P} \sin.\, \alpha.$$

Fig. 218.

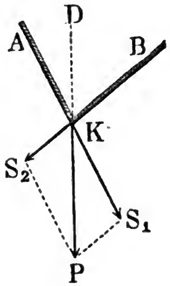
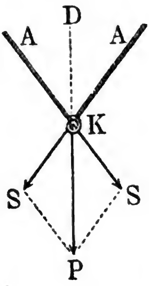


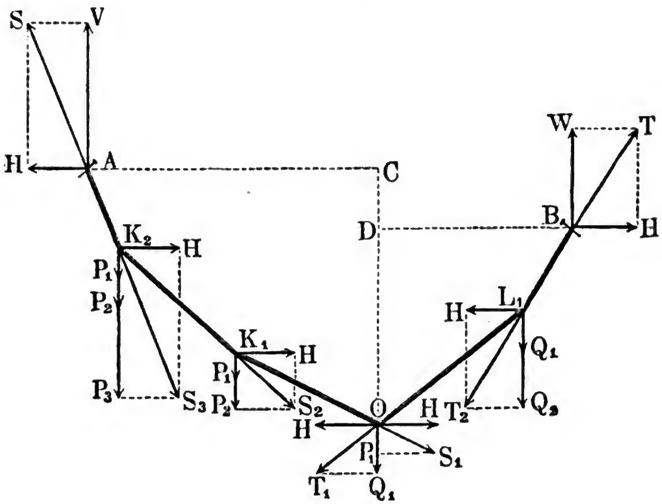
Fig. 219.



Beim losen Knoten K, Fig. 219, sind die Spannungen S, S beider Enden eines und desselben Seiles einander gleich, weshalb die Richtung der Kraft P den vom Seile gebildeten Winkel $AKA = \alpha$ halbirt, und $P = 2\, S \cos.\, \frac{1}{2}\alpha$ ist.

Wird ein Seil durch Parallelkräfte, z. B. durch Gewichte P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2 u. s. w., Fig. 220, gespannt, so ist:

Fig. 220.



1) die Horizontalspannung H an allen Stellen eine und dieselbe;

2) die Summe $V + W$ der Verticalspannungen an beiden Enden A und B gleich der Summe $P_1 + P_2 + P_3 + Q_1 + Q_2$ der sämmtlichen Gewichte; und

3) die Verticalspannung an jedem Punkte gleich der Verticalspannung am darüber befindlichen Ende minus der Summe der darüber hängenden Gewichte;

4) die Richtungen der einzelnen Seilstücke ergeben sich durch Anwendung folgender Formeln:

Ist $G = P_1 + Q_1$ das am untersten Knoten O hängende Gewicht und sind α_1 und β_1 die Neigungswinkel der diesen Knoten bildenden Seilstücke OK_1 und OL_1 gegen den Horizont, so hat man die Spannungen dieser Stücke:

$$S_1 = \frac{G \cos. \beta_1}{\sin. (\alpha_1 + \beta_1)} \text{ und } T_1 = \frac{G \cos. \alpha_1}{\sin. (\alpha_1 + \beta_1)},$$

ferner die Verticalspannungen derselben:

$$V_1 = P_1 = S_1 \sin. \alpha_1 = \frac{G \sin. \alpha_1 \cos. \beta_1}{\sin. (\alpha_1 + \beta_1)}$$

und

$$W_1 = Q_1 = T_1 \sin. \beta_1 = \frac{G \sin. \beta_1 \cos. \alpha_1}{\sin. (\alpha_1 + \beta_1)},$$

sowie die Horizontalspannung:

$$H = S_1 \cos. \alpha_1 = T_1 \cos. \beta_1 = \frac{G \cos. \alpha_1 \cos. \beta_1}{\sin. (\alpha_1 + \beta_1)}.$$

Hängt nun im Knoten K_1 ein Gewicht P_2, so ist die Verticalspannung des Seilstückes $K_1 K_2$:

$$V_2 = P_1 + P_2$$

und für den Neigungswinkel α_2 desselben:

$$tang. \alpha_2 = \frac{P_1 + P_2}{H} = tang. \alpha_1 + \frac{P_2}{H}.$$

Hängt ferner im Knoten K_2 das Gewicht P_3, so ist die Verticalspannung des Seilstückes $K_2 A$:

$$V_3 = P_1 + P_2 + P_3$$

und für den Neigungswinkel α_3 desselben gegen den Horizont:

$$tang. \alpha_3 = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{H} = tang. \alpha_1 + \frac{P_2 + P_3}{H} = tg. \alpha_2 + \frac{P_3}{H}$$

u. s. w.

§. 13. **Kettenlinie.** Hängen an einem vollkommen biegsamen und gewichtlosen Seile ACA, Fig. 221, lauter gleiche Gewichte in gleichen Horizontalabständen und in sehr großer Anzahl neben einander, so bildet dasselbe eine Parabel. Ist a die Bogenhöhe CM und b die entsprechende halbe Spannweite AM, so hat man für den Neigungswinkel $MAL = \alpha$ des Seilendes A gegen den Horizont: $tang. \alpha = \frac{2a}{b}$, und ist noch G die Summe der am Seilstücke AC hängenden Gewichte, so

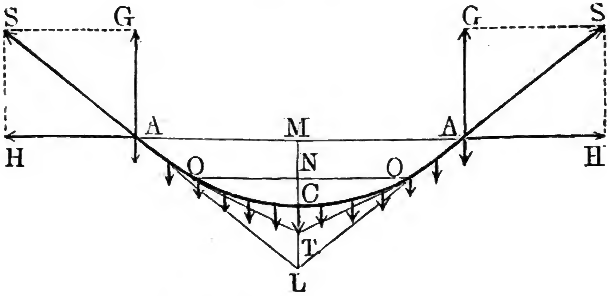
hat man die Verticalspannung in A, $V = G$, ferner die Horizontalspannung

$$H = G \, cotg. \, \alpha = \frac{b}{a} \cdot \frac{G}{2},$$

und die Mittelspannung

$$S = \frac{G}{sin. \, \alpha} = \frac{\sqrt{4a^2 + b^2}}{a} \cdot \frac{G}{2}$$

Fig. 221.



Ist ferner die Abscisse CN eines anderen Punktes $O, = x$, so hat man die Ordinate NO desselben:

$$y = b\sqrt{\frac{x}{a}},$$ und für den Neigungswinkel

$$NOT = \varphi, \; tang. \, \varphi = \frac{2x}{y} = \frac{2\sqrt{ax}}{b}.$$

Wird eine Kette durch ihr Gewicht allein gespannt, so läßt sich die von ihr gebildete Kettenlinie nur dann als Parabel behandeln, wenn ihre Spannhöhe sehr klein, also

b sehr groß gegen a, oder
H » » » G ist.

Die **gemeine Kettenlinie** wird gebildet, wenn gleich lange Stücke der Kette gleich schwer sind. Von ihr soll auch nur die Rede sein. Wiegt jedes Stück von der Länge 1 (Fuß) $= \gamma$, so hat das Kettenstück CA, dessen Länge $= l$ sein mag, das Gewicht $G = l\gamma$, und eben so groß ist auch die Verticalspannung in A. In einem anderen Punkte O, unter dem das Kettenstück OC von der Länge s hängt, ist die Verticalspannung $V = s\gamma$.

Die Horizontalspannung H läßt sich $= c\gamma$ setzen, wenn c die Länge eines Kettenstückes ist, dessen Gewicht der H gleichkommt. Hiernach ist für den Neigungswinkel der Kettenlinie in A:

$$tang. \, \alpha = \frac{G}{H} = \frac{l}{c},$$ und in O:

$$tang. \, \varphi = \frac{V}{H} = \frac{s}{c}.$$

Sind $CN = x$ und $NO = y$ die zusammengehörigen

und dem Bogen $CO = s$ entsprechenden Coordinaten der Kettenlinie, so hat man:

1) $s = \sqrt{2cx + x^2}$, also umgekehrt, $x = \sqrt{c^2 + s^2} - c$ oder $c = \frac{s^2 - x^2}{2x}$.

2) $s = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{y}{c}} - e^{-\frac{y}{c}}\right)$, umgekehrt

$$y = c\,log.nat.\left(\frac{s + \sqrt{c^2 + s^2}}{c}\right),$$

wobei $e = 2{,}71828$, die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems bezeichnet.

3) $y = c\,log.nat.\left(\frac{c + x + \sqrt{2cx + x^2}}{c}\right)$, umgekehrt,

$$x = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{y}{c}} + e^{-\frac{y}{c}}\right) - c,$$

4) $y = \frac{s^2 - x^2}{2x}\,log.nat.\left(\frac{s + x}{s - x}\right)$.

Für stark gespannte Ketten gelten annähernd und noch genauer als die Gleichungen der Parabel, folgende Gleichungen:

$$y = \left(1 - \frac{x}{12c}\right)\sqrt{2cx},$$

$$s = \left[1 + \tfrac{1}{6}\left(\frac{y}{c}\right)^2\right] y \text{ und}$$

$$tang.\varphi = \left[1 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]\frac{2x}{y}.$$

Um weitläufige Rechnungen zu umgehen, bedient man sich mit großem Vortheile folgender für den Parameter $c = 1$ construirten Tabelle (Seite 353), welche sich mittels der Formeln

$$x = \frac{c\,(1 - cos.\,\varphi)}{cos.\,\varphi},$$

$$y = c\;log.\;nat.\left(\frac{1 + sin.\,\varphi}{cos.\,\varphi}\right) \text{ und}$$

$$s = \frac{c\,sin.\,\varphi}{cos.\,\varphi}$$

berechnen läßt. Wie dieselbe zu gebrauchen ist, werden folgende Beispiele vor Augen führen.

1) Für die Spann- oder Bogenhöhe $a = 12$ Fuß und halbe Spannweite $b = 50$ Fuß, also $\frac{b}{a} = \frac{50}{12} = 4{,}166\,..$ findet man, wenn man hierzu die nächste Zahl in der fünften Columne aufsucht und von da aus horizontal zurückgeht, den Aufhängewinkel α nahe $= 26^0$, und wenn man interpolirt, genauer, $\varphi = 26^0 + \frac{4{,}176 - 4{,}167}{4{,}176 - 3{,}843}\;(28^0 - 26^0)$

$= 26^0 + \frac{9 \cdot 2^0}{333} = 26^0{,}3'$. Ferner folgt durch eine Proportion aus den Werthen in der dritten und vierten Columne die Bogenlänge annähernd,

$$l = \frac{0{,}48773}{0{,}47021} \cdot b = \frac{24{,}3865}{0{,}47021} = 51{,}863 \text{ Fuß}.$$

Wäre $\alpha = 28^0$, so würde $l = \frac{53171}{50940} \cdot 50 = 52{,}190$ Fß., also um $52{,}190 - 51{,}863 = 0{,}327$ größer ausfallen; da wir aber α nur 3 Minuten über 26^0 haben, so ist auch l nur um $\frac{0{,}327 \cdot 3}{120} = 0{,}008$ größer, also $l = 51{,}871$ Fuß zu setzen. Wäre das Gewicht von dem laufenden Fuß der Kette, $\gamma = 3$ Pfund, also das ganze Kettengewicht $G = 3 \;\; 51{,}871 = 155{,}61$ Pfund, so würde die Horizontalspannung der Kette $= G \, cotg. \, \alpha = 155{,}61 \, . \, cotg. \, 26^0{,}3' = 318{,}34$ Pfund, und die ganze Kettenspannung im Aufhängepunkte

$$S = \frac{G}{sin. \, \alpha} = \frac{155{,}61}{sin. \, 26^0{,}3'} = 354{,}34 \text{ Pfund betragen.}$$

2) Welche Gestalt bildet die Kette, von welcher die eine Hälfte die Länge $l = 60$ Fuß und das Gewicht $G = 480$ Pfund hat, und welche an ihrem Ende mit der Kraft $S = 2000$ Pfund gespannt wird. Hier folgt sogleich

$$sin. \, \alpha = \frac{G}{S} = \frac{480}{2000} = 0{,}24, \text{ daher } \alpha = 13^0{,}53'.$$

Nun giebt die Tabelle, wenn man 13^0 und 14^0 in ihrer ersten Columne aufsucht und horizontal herübergeht:

$a = 0{,}02630$, $b = 0{,}22887$ und $l = 0{,}23087$
und $a = 0{,}03061$, $b = 0{,}24681$ und $l = 0{,}24933$,
es ist daher nach bekannten Regeln hier:

$$a = \frac{2630}{23087} \cdot 60 = 6{,}835,\; b = \frac{22887 \cdot 60}{23087} = 59{,}479 \text{ Fuß},$$

$$a = \frac{3061 \cdot 60}{24933} = 7{,}366,\; b = \frac{24681 \cdot 60}{24933} = 59{,}394 \text{ Fuß}.$$

Durch Interpolation folgt nun:

$$a = 7{,}366 - \tfrac{7}{60} \cdot 0{,}531 = 7{,}304 \text{ und}$$
$$b = 59{,}394 + \tfrac{7}{60} \cdot 0{,}085 = 59{,}384 \text{ Fuß}.$$

Die Horizontalspannung ist $H = \sqrt{S^2 - G^2} = 1941{,}5$ Pfund.

Für die Parabel ist:

$$x = \frac{c}{2} \, tang. \, \varphi^2 = \frac{c}{2} \left(\frac{sin. \, \varphi}{cos. \, \varphi}\right)^2,$$

$$y = c \, tang. \, \varphi = c \, \frac{sin. \, \varphi}{cos. \, \varphi}, \text{ und}$$

$$s = \frac{c}{2} \left[\frac{sin. \, \varphi}{cos. \, \varphi^2} + log. \, nat. \left(\frac{\frac{1}{2}\pi + \varphi}{2}\right)\right].$$

Tafel.

Die Hauptverhältnisse der Kettenlinie für den Parameter $c = 1$ und für die Aufhängewinkel von 1 bis 60 Grad.

Aufhänge-winkel α^0.	Spannhöhe a.	Halbe Spannweite b.	Bogenlänge l.	Verhältniß $\frac{b}{a}$.	Verhältniß $\frac{l}{b}$.
1°	0,00015	0,01745	0,01745	116,586	1,0000
2	0,00061	0,03491	0,03492	57,230	1,0002
3	0,00137	0,05238	0,05241	38,234	1,0005
4	0,00244	0,06987	0,06993	28,635	1,0008
5	0,00382	0,08738	0,08749	22,874	1,0013
6	0,00551	0,10491	0,10510	19,040	1,0018
7	0,00751	0,12248	0,12278	16,309	1,0025
8	0,00983	0,14008	0,14054	14,250	1,0033
9	0,01247	0,15773	0,15838	12,650	1,0041
10	0,01543	0,17542	0,17633	11,370	1,0052
11	0,01872	0,19318	0,19438	10,320	1,0062
12	0,02234	0,21099	0,21256	9,444	1,0073
13	0,02630	0,22887	0,23087	8,701	1,0088
14	0,03061	0,24681	0,24933	8,063	1,0102
15	0,03528	0,26484	0,26795	7,508	1,0117
16	0,04030	0,28296	0,28675	7,021	1,0134
17	0,04569	0,30116	0,30573	6,591	1,0152
18	0,05146	0,31946	0,32492	6,208	1,0171
19	0,05762	0,33786	0,34433	5,863	1,0192
20	0,06418	0,35637	0,36397	5,553	1,0213
22	0,07853	0,39376	0,40403	5,014	1,0261
24	0,09484	0,43169	0,44523	4,562	1,0314
26	0,11260	0,47021	0,48773	4,176	1,0372
28	0,13257	0,50940	0,53171	3,843	1,0438
30	0,15470	0,54930	0,57735	3,551	1,0511
35	0,22078	0,65284	0,70021	2,957	1,0725
40	0,30540	0,76291	0,83910	2,498	1,0999
45	0,41421	0,88137	1,00000	2,128	1,1346
50	0,55573	1,01068	1,19175	1,819	1,1792
60	1,00000	1,31690	1,73210	1,317	1,3153

§. 14. **Rollen und Radwelle.** Bei der festen Rolle ACB, Fig. 222, ist die Kraft P gleich der Last Q, und der Zapfendruck $R = 2 P \cos. \frac{\alpha}{2}$, wenn α den Winkel PCQ bezeichnet, unter dem die Seilrichtungen zusammenstoßen, und welcher den mit Seil bedeckten Bogen zu 180° ergänzt.

Für die lose Rolle ACB, Fig. 223, ist $\frac{P}{R} = \frac{r}{a}$, d. i.

es verhält sich die Kraft P zur Last R, wie der Halbmesser $CA = r$ der Rolle zu der Sehne $AB = a$ des mit Seil bedeckten Bogens.

Fig. 222.

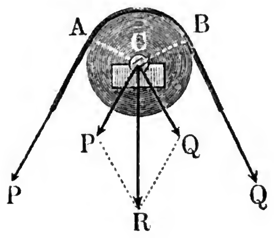
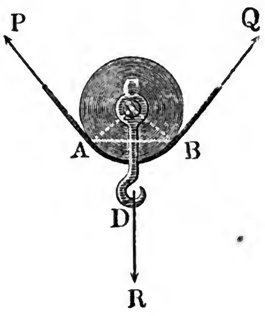


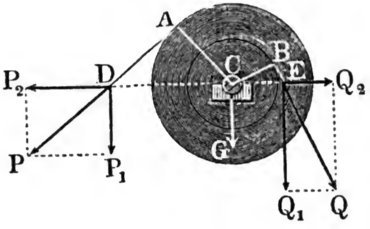
Fig. 223.



Sind die Seile parallel, so hat man $a = 2r$, daher $P = \frac{1}{2} R$, dagegen aber auch den Weg von $R = \frac{1}{2}$ des Weges von P.

Bei einer Radwelle ACB, Fig. 224, ist, wie beim Hebel $Pa = Qb$, oder $\frac{P}{Q} = \frac{b}{a}$, d. i. es verhält sich die Kraft P zur Last Q umgekehrt wie der Hebelarm $CA = a$ der Kraft zum Hebelarme $CB = b$ der Last.

Fig. 224.



Ist G das Gewicht der Maschine, α der Winkel, um welchen die Kraft P, und β der Winkel, um welchen die Last Q vom Horizonte abweicht, so hat man den Verticaldruck, welchen beide Zapfen zusammen auszuhalten haben:

$$V = G + P \sin. \alpha + Q \sin. \beta.$$

Die Wirkungen der Horizontaldrücke $P \cos. \alpha$ und $Q \cos. \beta$ auf die Zapfen sind nach der Theorie des zusammengesetzten Hebels zu berechnen. Liegen die Richtungen von P und Q in einer und derselben Ebene, so kann man den Horizontaldruck auf beide Zapfen zusammen $= P \cos. \alpha - Q \cos. \beta$ setzen.

§. 15. Die gleitende Reibung. Die Reibung ist dem Drucke proportional und unabhängig von der Geschwindigkeit und von der Ausdehnung der Berührungsflächen. Die drehende oder Zapfenreibung ist kleiner als die gleitende und

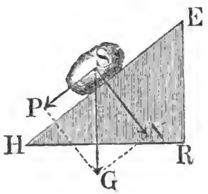
größer als die wälzende Reibung. Die Reibung der Ruhe ist größer als die der Bewegung.

Aus dem Normaldrucke N eines Körpers gegen seine Stütze und aus dem Reibungscoefficienten φ folgt die Größe der Reibung, oder die Kraft, mit welcher dieselbe jeder Bewegung entgegenwirkt: $F = \varphi N$.

Ist s der relative Weg des Körpers auf seiner Stützfläche, so hat man die zur Zurücklegung dieses Weges zu verwendende Arbeit: $A = \varphi Ns$.

Bei einem Körper S auf einer schiefen Ebene EH, Fig. 225, deren Neigungswinkel $EHR = \alpha$ ist, fällt demnach die Reibung

Fig. 225.



$$F = \varphi N = \varphi\, G \cos. \alpha$$

aus; es ist daher das Bestreben zum Herabgleiten:

$$P = (\sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha)\, G,$$

und dasselbe Null für

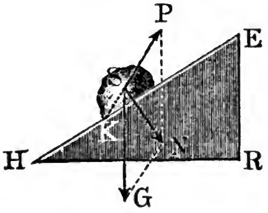
$$\tang. \alpha = \varphi.$$

Der Winkel, welcher durch die letzte Gleichung bestimmt ist, dessen Tangente also dem Reibungscoefficienten φ gleichkommt, wird der Reibungs- oder Ruhewinkel genannt. So lange die Richtung einer Kraft um einen Winkel von der Normalen der Stützfläche abweicht, welcher noch nicht den Reibungswinkel übertrifft, so lange wird auch die Kraft von der Stützfläche vollkommen aufgenommen.

Die Reibung ist eine passive Kraft, kann nur Bewegung mäßigen und verhindern, aber nicht beschleunigen oder erzeugen. Deshalb wirkt sie auch nur hindernd, wenn es darauf ankommt, Bewegung zu erzeugen, dagegen fördernd, wenn es sich darum handelt, Bewegung zu verhindern.

Damit eine Kraft P das Herabgleiten eines Körpers G von der schiefen Ebene EH, Fig. 226, verhindere, muß sein:

Fig. 226.



$$P = \left(\frac{\sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha}{\cos. \beta - \varphi \sin. \beta}\right) G,$$

oder, wenn ϱ den Reibungswinkel bezeichnet,

$$P = \frac{\sin. (\alpha - \varrho)}{\cos. (\beta + \varrho)}\, G,$$

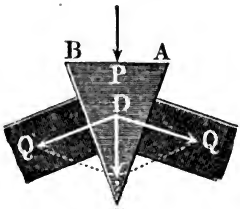
(vgl. §. 11).

Damit sie hingegen das Aufsteigen des Körpers auf der Ebene hervorbringe, muß sein:

$$P = \left(\frac{\sin. \alpha + \varphi \cos. \alpha}{\cos. \beta + \varphi \sin. \beta}\right) G = \frac{\sin. (\alpha + \varrho)}{\cos. (\beta - \varrho)}\, G.$$

Wirkt die Kraft horizontal, so ist $\beta = - \alpha$, daher im ersten Falle:

Fig. 227.



$$P = G\,tang.\,(\alpha - \varrho),$$

und im zweiten:

$$P = G\,tang.\,(\alpha + \varrho).$$

Für den Keil, Fig. 227, ist mit Berücksichtigung der Reibung an den Seitenflächen:

$$P = 2\,Q\,(sin.\,{}^1\!/_2\,\alpha + \varphi\,cos.\,{}^1\!/_2\,\alpha)$$

(vergl. §. 11).

Anmerkung zu folgender Tabelle. Es bedeutet (=), daß die Bewegung in der Richtung der Fasern beider Körper, (+), daß sie rechtwinkelig gegen die Fasern des gleitenden Körpers erfolge, und (⊥), daß sich Hirnholz auf Langholz in der Fasernrichtung des letzteren bewege.

Coefficienten für die gleitende Reibung.

Reibende Körper.	Lage der Fasern.	Zustand der Oberfläche (Schmiere).	Reibungscoefficient für die Ruhe.	Reibungscoefficient für die Bewegung.
Eiche auf Eiche	(=)	trocken	0,62	0,48
	(=)	trockene Seife	0,44	0,16
	(+)	trocken	0,54	0,34
	(+)	mit Wasser benetzt	0,71	0,25
	(⊥)	trocken	0,43	0,19
Esche, Tanne, Buche, Vogelbeer auf Eiche	(=)	desgl.	0,53	0,38
Rindsleder auf Eiche	flach	desgl.	0,61	0,51
	hochkantig	desgl.	0,43	0,33
	hochkantig	mit Wasser benetzt	0,79	0,29
Schwarz zugerichtetes Leder (Riemen)	(=)	trocken	0,74	0,27
Hanfgurte auf Eiche	(=)	desgl.	0,64	0,52
Hanfseil auf Eiche	(=)	desgl.	0,80	0,52
Schmiedeeisen auf Eiche	(=)	mit Wasser benetzt	0,65	0,26
	(=)	Talg	0,11	0,08

Coefficienten für die gleitende Reibung.

Reibende Körper.	Lage der Fasern.	Zustand der Oberfläche (Schmiere).	Reibungscoefficient für die Ruhe.	Reibungscoefficient für die Bewegung.
Gußeisen auf Eiche	(=)	trocken	—	0,49
		mit Wasser benetzt	0,65	0,22
		trockene Seife	—	0,19
Messing auf Eiche	(=)	trocken	0,62	—
Rindsleder als Kolbenliderung auf Gußeisen	(flach)	mit Wasser benetzt	0,62	—
		mit Oel, Seife od. Schweinefett	0,12	—
Lederne Riemen auf gußeisernen Rollen	(flach)	trocken	0,28	—
		mit Wasser benetzt	0,38	—
Gußeisen auf Gußeisen	. .	etwas fettig	0,16	0,15
	. .	mit Wasser benetzt	—	0,31
Schmiedeeisen auf Gußeisen	. .	trocken	0,19	0,18
Schmiedeeisen auf Schmiedeeisen	. .	desgl.	0,13	—
Gußeisen auf Bronze	. .	desgl.	—	0,15
Schmiedeeisen auf Bronze	. .	desgl.	—	0,17
Bronze auf Bronze	. .	desgl.	—	0,20
Bronze auf Gußeisen	. .	desgl.	—	0,21
Bronze auf Schmiedeeisen	. .	etwas fettig	—	0,16
Eiche, Ulme, Weißbuche, wilder Birnbaum, Gußeisen, Schmiedeeisen, Stahl und Bronze, gleitend auf einander und auf sich selbst	(=)	auf gewöhnliche Art geschmiert mit Talg, Schweinefett, Oel, Wagenschmiere &c.	0,11	0,075
		bloß fettig	—	0,15
Rogenstein auf Rogenstein	. .	ohne Schmiere	0,74	0,64

Coefficienten für die gleitende Reibung.

Reibende Körper.	Lage der Fasern.	Zustand der Oberfläche (Schmiere).	Reibungscoefficient für die Ruhe.	Reibungscoefficient für die Bewegung.
Muschelkalk auf Rogenstein	. .	ohne Schmiere	0,75	0,67
Ziegelstein auf Rogenstein	. .	desgl.	0,67	0,65
Eiche auf Rogenstein	(⊥)	desgl.	0,63	0,38
Schmiedeeisen auf Rogenstein	parallel	desgl.	0,49	0,69
Muschelkalk auf Muschelkalk	. .	. . .	0,70	0,38
Rogenstein auf Muschelkalk	. .	. . .	0,75	0,65
Ziegelstein auf Muschelkalk	. .	. . .	0,67	0,60
Schmiedeeisen auf Muschelkalk	. .	. . .	0,42	0,24
Eiche auf Muschelkalk	(⊥)	. . .	0,64	0,38
Rogenstein auf Rogenstein	. .	Mit Mörtel aus drei Theilen feinen Sand und einem Theile hydraulischen Kalk	0,74	—

Beispiel. Welche Kraft ist nöthig, um einen belasteten Schlitten von 500 Pfund Gewicht auf einer Holzbahn von 32^0 Neigung hinaufzuziehen? Es ist hier im ungeschmierten Zustande des Schlittens der Reibungscoefficient $\varphi = 0,4$ zu setzen, weshalb die nöthige Kraft folgt:

$$P = (sin. 32^0 + 0,4 . cos. 32^0) . 500 = (0,530 + 0,4 . 0,848) . 500$$
$$= 0,869 . 500 = 434,5 \text{ Pfund}.$$

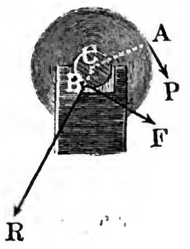
Käme es darauf an, den Schlitten herabzulassen, so würde der nöthige Widerstand sein:

$$P = (sin. 32^0 - 0,4\ cos. 32^0) . 500 = 0,191 . 500 = 95,5 \text{ Pfd}.$$

Wäre die Länge der schiefen Ebene 60 Fuß, so würde die aufzuwendende Arbeit im ersten Falle = 60 . 434,5 = 26070 Fußpfd., und im zweiten = 60   95,5 = 5730 Fußpfund betragen.

§. 16. Die Zapfenreibung. Die Reibung F eines Zapfens CB, Fig. 228, in einem ausgelaufenen Lager ist kleiner als in einem neuen, genau anschließenden Lager und auch kleiner in einem runden, als in einem Lager mit ebenen Flächen. Ist r der Zapfenhalbmesser CB, so hat man das dem Zapfendrucke R entsprechende Moment der Zapfenreibung: $Fr = \varphi Rr$, und wirkt die Kraft an einem Hebelarme, $CA = a$, so ist die auf den Kraftpunkt reducirte Reibung, oder die zur Ueberwindung der Zapfenreibung nöthige Kraft:

Fig. 228.



$$P = \frac{r}{a} F = \frac{r}{a} \varphi R.$$

Ist die Umdrehungszahl des Zapfens pr. Min. $= u$, so hat man die Geschwindigkeit der Reibung $v = \frac{\pi u r}{30}$, daher die Arbeit der Reibung pr. Sec.:

$$Fv = \frac{\pi u \varphi R r}{30} = 0{,}1047\, u \varphi Rr$$

Durch Anwendung von Frictionsrädern wird u und folglich auch die Arbeit der Reibung herabgezogen.

Zur Erleichterung der Rechnung kann man für den Zapfendruck einen Näherungswerth einsetzen. Besteht R aus den rechtwinkeligen Componenten V und H, ist also $R = \sqrt{V^2 + H^2}$, und $V > H$, so kann man setzen, nach Poncelet:

$$R = 0{,}96\, V + 0{,}40\, H,$$

und hierbei höchstens um 4 Procent fehlen.

Ist H nicht über $0{,}2\, V$, so kann man auch setzen: $R = V$, und ist H über $0{,}2 \cdot V$ und unter V, so ist $R = 0{,}89\, V + 0{,}49\, H$, und der größte Fehler beträgt dann nur 2 Procent.

Beispiel. Wenn bei der Radwelle in Fig. 224, S. 354, die Last $Q = 1000$ Pfund, der Kraftarm $a = 4$ und der Lastarm $b = 2{,}5$ Fuß ist, so beträgt die Kraft ohne Rücksicht auf Reibung $P = \frac{b}{a} Q = \frac{5}{8} . 1000 = 625$ Pfund. Sind die Neigungswinkel $\alpha = 45^0$ und $\beta = 60^0$, ist der Zapfenhalbmesser $r = 2\frac{1}{2}$ Zoll, das Gewicht der Maschine, $G = 2000$ Pfund und der Reibungscoefficient $\varphi = 0{,}08$, so folgt noch die Vergrößerung der Kraft durch die Reibung:

$$P_1 = \varphi \frac{r}{a} (G + P \sin. \alpha + Q \sin. \beta)$$

$$= 0{,}08 . \frac{5}{8.12} . 3308 = 13{,}78 \text{ Pfund.}$$

Coefficienten für die Zapfenreibung.

Reibende Körper.	Zustand der Oberflächen.	Reibungscoefficient, wenn die Schmiere erneuert wird: auf gewöhnliche Art.	Reibungscoefficient, wenn die Schmiere erneuert wird: ununterbrochen.
Zapfen von Gußeisen auf Lagern von Gußeisen	geschmiert mit Olivenöl, Schweinefett, Talg oder Schweinefett mit Graphit	0,07 bis 0,08	0,054
	mit denselben Schmieren naß	0,08	»
	mit Asphalt	0,054	»
	fettig	0,14	»
	fettig und naß	0,14	»
Zapfen von Gußeisen auf Lagern von Bronze	geschmiert mit Olivenöl, Schweinefett, Talg od. Schweinefett mit Graphit	0,07 bis 0,08	0,054
	fettig	0,16	»
	fettig und naß	0,16	»
	sehr wenig fettig	0,19	»
Zapfen von Gußeisen auf Lagern von Franzosenholz (Guajak)	ohne Schmiere	0,18	»
	geschmiert mit Oel oder Schweinefett	»	0,090
	fettig von Oel oder Schweinefett	0,10	»
	fettig von Schweinefett und Graphit	0,14	»
Zapfen von Schmiedeeisen auf gußeisernen Lagern	geschmiert m. Olivenöl, Talg, Schweinefett oder Schweinefett und Graphit	0,07 bis 0,08	0,054
Zapfen von Schmiedeeisen auf Lagern von Bronze	geschmiert mit Olivenöl, Schweinefett oder Talg	0,07 bis 0,08	»
	geschmiert mit fester Wagenschmiere	0,09	»
	fett und naß	0,19	»
	sehr wenig fett	0,25	»
Schmiedeeiserne Zapfen auf Lagern von Franzosenholz	geschmiert mit Oel oder Schweinefett	0,11	»
	bloß fettig	0,19	»

Coefficienten für die Zapfenreibung.

Reibende Körper.	Zustand der Oberflächen.	Reibungscoefficient, wenn die Schmiere erneuert wird	
		auf gewöhnliche Art.	ununterbrochen.
Zapfen von Bronze auf Lagern von Bronze	geschmiert mit Oel	0,10	0,054
	geschmiert m. Schweinefett	0,09	»
Zapfen von Bronze auf Lagern von Gußeisen	geschmiert mit Oel oder Talg	0,09	0,045 bis 0,052
Zapfen von Franzosenholz auf Lagern v. Gußeisen	geschmiert m. Schweinefett	0,12	»
	bloß fettig	0,15	»
Zapfen von Franzosenholz auf Lagern von Franzosenholz	geschmiert m. Schweinefett	»	0,07

Bei **stehenden** oder **Fußzapfen** (an Turbinen, Göpeln u. s. w.), welche sich an ihrer ebenen zugespitzten oder abgerundeten Basis reiben, sind die Coefficienten der gleitenden Reibung einzuführen.

Das Reibungsmoment ist für den Zapfen AZA, Fig. 229, mit **ebener Basis**: $Pa = \frac{2}{3} r \cdot \varphi R$; bei solchen mit **zugespitzter Basis**: $Pa = \frac{2}{3} r \frac{\varphi R}{sin.\ \alpha}$, wo 2α die Zuspitzungswinkel ADA und r den Halbmesser CA, Fig. 230, bezeichnet. Bei Zapfen mit **abgerundeter Basis** ist

$$Pa = \frac{2}{3}\left[1 + 0{,}3\left(\frac{r}{r_1}\right)^2\right]\varphi R r,$$

Fig. 229.

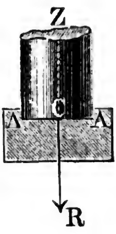
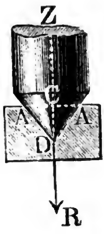
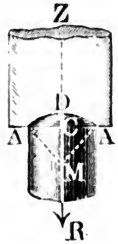


Fig. 230.



wenn r_1 den Abrundungshalbmesser MA, sowie r den Querschnittshalbmesser CA, Fig. 231, bezeichnet.

Fig. 231.



Beispiel. Welche Arbeit consumirt die Reibung am Zapfen einer Turbine, welche 1500 Pfund wiegt, und pr. Minute 100 Umdrehungen macht, wenn der Halbmesser des Zapfens 2 Zoll mißt und die Basis desselben mit einem Radius von 4 Zoll abgerundet ist? Der Reibungscoefficient ist hier $= 0,075$, folglich die Reibung $= 0,075 \quad 1500 = 112,5$ Pfund; ferner beträgt der Reibungshalbmesser

$$= \frac{2}{3}\left[1 + 0,3\left(\frac{r}{r_1}\right)^2\right] r = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 12}(1 + 0,3 \cdot \tfrac{1}{4}) = \frac{1,075}{9}$$

$= 0,1194$ Fuß, folglich die Geschwindigkeit der Reibung $v = 0,105 \cdot 100 \cdot 0,1194 = 1,254$ Fuß, und endlich die Arbeit, welche durch die Reibung an diesem Zapfen pr. Secunde verzehrt wird, $Fv = 112,5 \;.\; 1,254 = 141$ Fußpfund

$$= \frac{141}{480} = 0,294 \text{ Pferdekräfte.}$$

Die **wälzende Reibung** P ist dem Drucke Q der Walze CDE, Fig 232, gegen die Bahn AOB und natürlich dem Hebelarm $ON = a$ umgekehrt proportional; es ist

$P = \frac{f}{a} Q$, wobei f den durch Versuche auszumittelnden Hebelarm OE von Q in Hinsicht auf den Stützpunkt O bezeichnet.

Fig. 232.

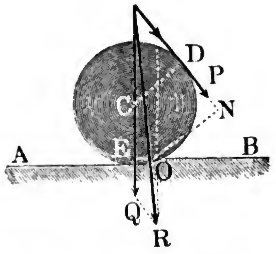
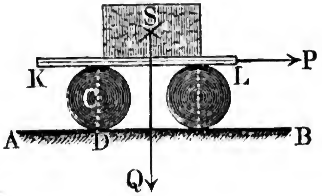


Fig. 233.



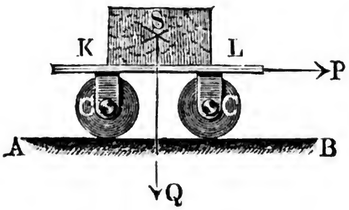
Wirkt die Kraft P vertical am Umfang der Walze, so ist $a = r$, der Halbmesser CD der Walze; wirkt sie dagegen horizontal, und zwar im Scheitel der Walze, so ist $a = 2r$, der Durchmesser der Walze. Giebt man a in Zollen, so ist für glatte hölzerne und eiserne Walzen bei dergleichen Unterlagen, $f = 0,02$ bis $0,03$ Zoll, daher

$$P = 0,02 \frac{Q}{a} \text{ bis } 0,03 \frac{Q}{a}.$$

Wird eine Last Q auf Walzen horizontal fortgeschafft, wie Fig. 233 darstellt, so ist die erforderliche Kraft:

$P = (f + f_1)\frac{Q}{2r}$, wobei f der Reibung zwischen den Walzen und der Basis AB, und f_1 der Reibung zwischen den Walzen und der Tragpfoste KL angehört.

Fig. 234.



Wird dagegen dieselbe Last auf einem Wagen KL horizontal fortgezogen, wie Fig. 234 vor Augen führt, so ist

$$P = \frac{f\,Q}{r} + \varphi\,\frac{r_1}{r}\,Q = \left(\frac{f + \varphi\, r_1}{r}\right)Q,$$

wobei r den Halbmesser der Räder, r_1 den ihrer Axen C, C, und φ den Coefficienten der Reibung zwischen Axe und Nabe oder Zapfenlager bezeichnen.

§. 17. **Reibung der Seile und Ketten.** Wird ein gespanntes Seil um ein festliegendes Prisma ABC, Fig. 235, gelegt, so ist das Verhältniß der Kraft P zur Last Q bestimmt durch die Gleichung:

$$P = \left(1 + 2\,\varphi\,\sin.\frac{\alpha}{2}\right)^n Q,$$

wobei n die Anzahl und α die Größe der Ablenkungswinkel bezeichnet. Dieselbe Formel gilt auch für den Fall, wenn sich eine Kette um einen Cylinder legt, wobei aber α den Ablenkungswinkel an jedem Kettengliede bezeichnet, der aus der Länge l eines Kettengliedes und aus dem Halbmesser r des Cylinders durch die Formel $\sin.\frac{\alpha}{2} = \frac{l}{2r}$ bestimmt wird.

Fig. 235.

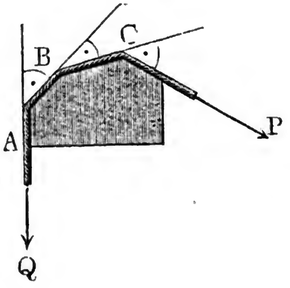
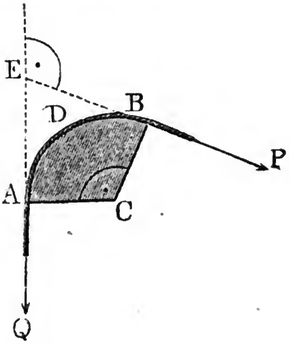


Fig. 236.



Für ein um einen festliegenden Cylinder liegendes Seil ADB, Fig. 236, ist, wenn β den mit Seil bedeckten

Bogen für den Halbmesser 1 bezeichnet:

$$P = e^{\varphi\beta} Q, \text{ folglich } Q = \frac{P}{e^{\varphi\beta}},$$

wo $e = 2{,}71828$ ist, umgekehrt folgt:

$$\beta = \frac{1}{\varphi} \cdot log.\, nat. \left(\frac{P}{Q}\right) = \frac{2{,}3026}{\varphi} \ (log.\, P - log.\, Q).$$

Nimmt man $\varphi = 1/3$, so ist für:

$\beta = \frac{\pi}{2}$, oder $= 1/4$ Umwickelung, $P = 1{,}69\ Q$,
$= \pi$ » $1/2$ » , $P = 2{,}85\ Q$,
$= 2\pi$ » 1 » , $P = 8{,}12\ Q$,
$= 4\pi$ » 2 » , $P = 65{,}94\ Q$.

Kommt es darauf an, die Bewegung zu verhindern, oder die Beschleunigung aufzuheben, so hat man Q als Kraft und P als Last anzusehen.

Wird eine gespannte Kette um eine um ihre Axe drehbare Trommel oder Scheibe gelegt, so hat man die auf den Kraftpunkt reducirte Kettengliederreibung: $F = \varphi \frac{r}{a} Q$, wenn r den Halbmesser der Kettenglieder oder Kettenbolzen, sowie a den Halbmesser der Trommel bezeichnet.

Findet bloß ein Auf- oder ein Abwickeln Statt, so ist hiernach die Kraft $P = \left(1 + \varphi \frac{r}{a}\right) Q$, findet aber beides zugleich Statt, so hat man $P = \left(1 + \varphi \frac{r}{a}\right)^2 Q$, annähernd $= \left(1 + 2\varphi \frac{r}{a}\right) Q$, wozu aber noch die auf den Kraftpunkt reducirte Zapfenreibung kommt.

§. 18. Steifigkeit der Seile. Der Steifigkeitswiderstand der Seile, oder die Kraft, welche nöthig ist, um ein Seil über eine Scheibe oder Trommel zu wickeln, hängt vorzüglich von der Spannung Q des Seiles, von der Art und der Stärke d des Seiles und von dem Scheibenhalbmesser a ab. Nach den Versuchen von Coulomb ist dieser Widerstand zu setzen, für neue Kloben- und Haspelseile aus Hanf, und bei Zugrundelegung des Pfund- und Zollmaaßes:

$S = \frac{d^{1,7}}{a} (13{,}31 + 0{,}295\ Q)$ Neupfund, und für gebrauchte:

$S_1 = \frac{d^{1,4}}{a} (6{,}39 + 0{,}141\ Q)$ Neu- oder Zollpfund.

Bei gepichten Seilen ist diese Kraft im Mittel noch um ein Sechstel, und bei nassen Seilen ist sie im Mittel ein Zwölftel größer.

In der Praxis kann man von folgenden Tabellen Gebrauch machen.

I. Steifigkeit neuer Hanfseile für den Rollenhalbmesser $a = 1$ Zoll.

Seilstärke d in Viertelzollen	Seilspannung in Neupfunden										
	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
1	1	4	7	10	13	15	18	21	24	27	29
2	4	13	22	31	40	50	59	68	77	86	95
3	8	26	44	62	80	99	117	134	153	171	189
4	13	43	72	102	131	161	190	220	249	279	308
5	19	63	106	149	192	235	278	320	364	407	450
6	27	85	144	203	262	320	379	437	497	555	614

II. Steifigkeit gebrauchter Seile für den Rollenhalbmesser $a = 1$ Zoll.

Seilstärke d in Viertelzollen	Seilspannung in Neupfunden										
	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
2	2	8	13	18	24	29	34	40	45	51	56
3	4	14	23	33	42	51	61	70	80	89	99
4	6	20	35	49	63	77	91	105	119	133	147
5	9	28	47	67	86	105	124	144	163	182	201
6	11	36	61	86	111	136	161	185	210	235	260

Für Drahtseile kann man nach des Verfassers Versuchen setzen:

$$S = K + \frac{\alpha Q}{a},$$

wo K und α Erfahrungsconstanten bezeichnen.

Für ein Seil von 8 Linien Dicke, welches aus 16 Drähten von $1\frac{1}{2}$ Linien Dicke bestand und wovon jeder laufende Fuß 0,64 Pfund wog, wurde

$$S = 0{,}98 + 0{,}0910 \frac{Q}{a} \text{ Neupfund gefunden.}$$

Hiernach ist folgende, für den praktischen Gebrauch nützliche Tabelle berechnet worden:

III. Steifigkeitswiderstände eines Drahtseiles.

Rollen-halbmesser a in Zollen	Seilspannung Q in Neupfunden							
	0	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500
12	1,0	4,7	8,5	12,3	16,1	19,9	23,7	27,5
24	1,0	2,8	4,7	6,6	8,5	10,4	12,3	14,2
36	1,0	2,2	3,4	4,7	6,0	7,2	8,5	9,8
48	1,0	1,9	2,8	3,8	4,7	5,6	6,6	7,5

Beispiele. 1) Welche Kraft ist nöthig, um eine Last $Q = 900$ Pfund mittels eines um eine feste Rolle liegenden Hanfseiles zu heben, wenn der Halbmesser der Rolle, $a = 3$ Zoll und die Stärke des Seiles, $d = \frac{1}{2}$ Zoll beträgt. Nach Tafel II. beträgt für $d = \frac{2}{4}$ und $a = 1$, $S = 51$ Pfund; da aber hier $a = 3$ ist, so hat man $S = \frac{51}{a} = \frac{51}{3} = 17$ Pfund und daher die Kraft $P = Q + S = 917$ Pfund zu setzen, wobei jedoch die Zapfenreibung noch außer Acht gelassen ist.

2) Welchen Widerstand verursacht das Umlegen eines mit 2000 Pfund Kraft gespannten Drahtseiles um eine Seilscheibe von 4 Fuß Durchmesser? Nach der letzten Tabelle III. ist für $a = 2$ Fuß $= 24$ Zoll und $Q = 2000$ Pfund, $S = 8,5$ Pfund.

§. 19. **Absolute Elasticität und Festigkeit.** (Zug- und Druckfestigkeit.) Der Elasticitätsmodul E ist diejenige Kraft, welche einen prismatischen Körper AB, Fig. 237 I. und II., von 1 Quadratzoll Querschnitt um seine anfängliche Länge ausdehnt oder zusammendrückt. Ist P die ausdehnende oder zusammendrückende Kraft, F der Querschnitt und l die Länge des Körpers, sowie λ die durch diese Kraft bewirkte Verlängerung oder Verkürzung des Körpers, so hat man:

Fig. 237.



$$1)\quad P = \frac{\lambda}{l} FE, \quad 2)\ \lambda = \frac{P}{FE} l.$$

Die Leistung oder das Arbeitsquantum, welches der Ausdehnung λ entspricht, ist

$$3)\quad L = \frac{P\lambda}{2} = \frac{P^2 l}{2FE} = \frac{FE}{2l}\lambda^2.$$

Der **Tragmodul** T ist diejenige Kraft, welche den Körper bis zur Elasticitätsgrenze ausdehnt oder zusammendrückt, und es sind die **Festigkeitsmodel** K und K_1 diejenigen, welche ein **Zerreißen** oder **Zerdrücken** des Körpers hervorbringen. Für den Querschnitt F des Körpers hat man die **Tragkraft**:

$$P = FT, \text{ umgekehrt } F = \frac{P}{T},$$

die Kraft zum **Zerreißen** oder **Zerdrücken**:

$$P_1 = FK \text{ oder } P_1 = FK_1, \text{ umgekehrt}$$
$$F = \frac{P_1}{K} \text{ oder } F = \frac{P_1}{K_1}.$$

Damit die Baumaterialien auf die Dauer vor dem Zerreißen oder Zerdrücken gesichert sind, berechnet man die Querschnitte derselben mittels eines sogenannten **Sicherheitsmodul**:

$$\frac{T}{m} = \tfrac{1}{3}\,T \text{ bis } \tfrac{1}{2}\,T, \text{ oder}$$
$$\frac{K}{n} = \tfrac{1}{10}\,K \text{ bis } \tfrac{1}{6}\,K, \text{ indem man}$$
$$F = \frac{P}{\frac{1}{m}T} \text{ oder } F = \frac{P}{\frac{1}{n}K} \text{ setzt.}$$

Für Metalle nimmt man gewöhnlich $n = 6$, für Holz und Steine $n = 10$, für Hanfseile mindestens $n = 3$ und für Mauerwerk $n = 20$ an.

Kommt zur Kraft P noch das Gewicht G des Körpers hinzu, so hat man

$$F = \frac{P + G}{T} \text{ zu setzen.}$$

Ist der Körper **prismatisch** und seine Länge $= l$ (Zoll), und wiegt die Raumeinheit (ein Cubikzoll) desselben $= \gamma$, so hat man

$$G = Fl\gamma, \text{ und daher}$$
$$F = \frac{P}{T - l\gamma}.$$

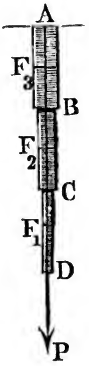
Die Ausdehnung oder Zusammendrückung des Körpers durch sein **eigenes Gewicht** ist

$$\frac{\lambda}{l} = \tfrac{1}{2}\frac{G}{FE} = \tfrac{1}{2}\frac{l\gamma}{E},$$

also im Ganzen

$$= \frac{P + \tfrac{1}{2}G}{FE}.$$

Fig. 238.



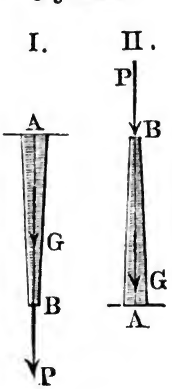
Besteht ein Körper, Fig. 238, aus mehreren prismatischen Stücken AB, BC, CD von gleicher Länge l, so ist zur Bestimmung der Querschnitte $F_1, F_2, F_3 \ldots F_\nu$ derselben die Formel

$$F_\nu = \frac{P}{T}\left(\frac{T}{T - l\gamma}\right)^\nu$$

in Anwendung zu bringen.

Bei einem Körper AB von gleichem Widerstande, Fig. 239 I. und II., ist $\nu = \infty$, und, wenn $F_0 = \frac{P}{T}$ den

Fig. 239.



ersten Querschnitt des Körpers, l dessen ganze Länge und e die Grundzahl 2,71828 der natürlichen Logarithmen bezeichnet,

$$F_\nu = F_0 e^{\frac{l\gamma}{T}}, \text{ oder}$$

$$Log. F_\nu = Log. F_0 + 0{,}4343 \frac{l\gamma}{T}.$$

Das Gewicht dieses Körpers ist

$$G = \left(e^{\frac{l\gamma}{T}} - 1\right) P = (F_\nu - F_0)\frac{P}{F_0}.$$

Die Erfahrungsmodel E, T, K nimmt man aus einer der folgenden Tabellen I. und II., wovon die erstere eine Zug- und die letztere eine Druckkraft in der Axenrichtung des Körpers voraussetzt. Wenn im letzteren Falle die Länge des Körpers ungefähr das Zehnfache der Dicke desselben übertrifft, so ist es möglich, daß die Druckkraft eine Biegung des Körpers hervorbringt, und deshalb die Formel $P = FK$ nicht anwendbar, oder wenigstens zu ergänzen (s. §. 26).

In einer dritten Tabelle (III.) sind die zulässigen Zugkräfte gußeiserner und schmiedeeiserner Stäbe oder Säulen von den gewöhnlichen Querschnittsdimensionen angegeben, wobei noch eine zwei bis zweiundeinhalbfache Sicherheit vorausgesetzt ist. Dieser Tabelle zu Folge ist z. B. die Tragkraft eines schmiedeeisernen Stabes von $3\frac{1}{2}$ Zoll Breite und $3\frac{1}{2}$ Zoll Dicke, = 122500 Pfund, und dagegen die eines runden gußeisernen Stabes von 5 Zoll Durchmesser, = 68732 Pfund. Umgekehrt ist die nöthige Stärke eines solchen Stabes für eine Zugkraft von 120 Centnern

$$= 12000 \text{ Pfund}, = 2 \text{ Zoll} + \tfrac{1}{4} \cdot \frac{1004}{2921} = 2{,}09 \text{ Zoll}.$$

Die vierte Tabelle (IV.) giebt die Zug- und Druckkräfte eiserner und hölzerner Stäbe oder Säulen von gegebenen Querschnitten in Centnern an, wonach z. B. eine hölzerne Hängesäule von 3 Zoll Breite und 2 Zoll Dicke oder 6 Quadratzoll Querschnitt, eine Last von 54 Centner und dagegen eine kurze cylindrische Tragsäule aus Gußeisen, bei 3 Zoll Dicke oder 7,07 Quadratzoll Querschnitt, eine Last von $630 + 0{,}07 \,.\, 90 = 636$ Centner zu tragen vermag.

Tabelle I.

Die Model der absoluten Elasticität und Festigkeit beim Zug.

Namen der Körper	Ausdehnung $\sigma = \frac{\lambda}{l}$ bei der Elasticitätsgrenze	Elasticitätsmodul E	Tragmodul $T = \sigma E$	Arbeitsmodul der Elasticitätsgrenze $A = \frac{1}{2} \sigma T$	Festigkeitsmodul K des Zerreißens
		Neu- oder Zollpfund			
Gußeisen . .	$\frac{1}{1500}$ = 0,000667	13'500000	9000	3,0	16000
Schmiedeeisen in Stäben .	$\frac{1}{1500}$ = 0,000667	27'000000	18000	6,0	56000
in Drähten .	$\frac{1}{1000}$ = 0,001000	30'000000	30000	15,0	90000
in Blech .	$\frac{1}{1250}$ = 0,000800	25'000000	20000	8,0	45000
Deutscher Stahl, gehärtet u. angelassen . . .	$\frac{1}{835}$ = 0,001200	28'000000	33600	20,0	112000
Feiner Gußstahl gehärtet . .	$\frac{1}{450}$ = 0,00222	41'000000	91000	101,0	140000
Kupfer, gehämmert	$\frac{1}{4000}$ = 0,000250	15'000000	3750	0,47	32500
Kupferblech .	$\frac{1}{3650}$ = 0,000274	15'000000	4110	0,563	29000
Kupferdraht .	$\frac{1}{1000}$ = 0,001000	16'500000	16500	8,25	58000
Zink, geschmolzen	$\frac{1}{4150}$ = 0,000241	13'000000	3130	0,377	7200
Messing . . .	$\frac{1}{1320}$ = 0,000758	8'800000	6670	2,53	17000
Messingdraht .	$\frac{1}{742}$ = 0,001350	13'500000	18220	12,3	68000
Blei	$\frac{1}{477}$ = 0,002100	685000	14400	15,1	1780
Bleidraht . .	$\frac{1}{1500}$ = 0,000667	960000	6400	2,13	3000
Glockengut .	$\frac{1}{1590}$ = 0,000629	4'400000	2770	0,807	32000
Holz in der Faserrichtung .	$\frac{1}{600}$ = 0,001667	1'500000	2500	2,08	10000
Holz in radialer Richtung zu d. Jahresringen .	—	200000	—	—	650

Tabelle I.

Die Model der absoluten Elasticität und Festigkeit beim Zug.

Namen der Körper	Ausdehnung $\sigma = \frac{\lambda}{l}$ bei der Elasticitätsgrenze	Elasticitätsmodul E	Tragmodul $T = \sigma E$	Arbeitsmodul der Elasticitätsgrenze $A = \frac{1}{2} \sigma T$	Festigkeitsmodul K des Zerreißens
		Neu- oder Zollpfund			
Holz in tangentialer Richtung zu den Jahresringen . . .	—	125000	—	—	700
Hanfseile					
unter 1 Z. dick	—	—	—	—	8400
1 bis 3 Z. dick	—	—	—	—	7500
über 3 Z. dick	—	—	—	—	4700
Drahtseile . .	—	—	—	—	45000
Kettentaue . .	—	—	—	—	50000
Lederriemen .	—	10000	—	·	4000

Die Kraft zum Abscheeren und Lochen des Eisens ist der Zugfestigkeit oder Kraft K zum Zerreißen gleichzusetzen.

Tabelle II.

Die Model der absoluten Elasticität und Festigkeit beim Druck.

Namen der Körper	Zusammendrückung $\sigma_1 = \frac{\lambda_1}{l}$ bei der Elasticitätsgrenze	Elasticitätsmodul E	Tragmodul $T_1 = \sigma_1 E$	Arbeitsmodul der Elasticitätsgrenze $A_1 = \frac{1}{2} \sigma_1 T$	Festigkeitsmodul K_1 d. Zerdrückens
Gußeisen . .	$\frac{1}{750} = 0{,}001333$	13'500000	18000	12	100000
Schmiedeeisen .	$\frac{1}{1500} = 0{,}000667$	27'000000	18000	6	30000
Kupfer . . .	$\frac{1}{4000} = 0{,}00025$	15'000000	3750	0,47	56000
Messing . .	—	—	—	—	10000
Blei	—	—	—	—	7000
Holz in d. Richtung d. Fasern	—	—	—	—	6500
Basalt . . .	—	—	—	—	27000
Gneiß u. Granit	—	—	—	—	8000
Kalkstein . .	—	—	—	—	5000
Sandstein . .	—	—	—	—	4000
Ziegelstein . .	—	—	—	—	800
Mörtel . . .	—	—	—	—	500

Tabelle III.

Die Zugkräfte, welche eiserne Stäbe von quadratischen und kreisförmigen Querschnitten in der Richtung ihrer Axe auf die Dauer auszuhalten vermögen.

Seitenlänge der quadratischen, sowie Durchmesser der kreisförmigen Querschnitte	Gußeiserne Stäbe $\frac{1}{m} T = 3500$ Pfund		Schmiedeeiserne Stäbe $\frac{1}{m} T = 10000$ Pfund	
	mit quadratischen Querschnitten	mit kreisförmigen Querschnitten	mit quadratischen Querschnitten	mit kreisförmigen Querschnitten
1/8	55	43	156	123
1/4	219	172	625	491
1/2	875	687	2500	1963
3/4	1969	1546	5625	4418
1	3500	2749	10000	7854
1 1/4	5469	4295	15625	12272
1 1/2	7875	6185	22500	17671
1 3/4	10719	8419	30625	24053
2	14000	10996	40000	31416
2 1/4	17719	13917	50625	39761
2 1/2	21875	17181	62500	49087
2 3/4	26469	20789	75624	59396
3	31500	24740	90000	70686
3 1/4	36969	29035	105625	82958
3 1/2	42875	33674	122500	96211
3 3/4	49219	38656	140625	110439
4	56000	43983	160000	125664
4 1/4	63219	49652	180625	141863
4 1/2	70875	55665	202500	159043
4 3/4	78969	62022	225625	177205
5	87500	68723	250000	196350
5 1/4	96469	75766	275625	216475
5 1/2	105875	83149	302500	237583
5 3/4	115719	90885	330625	259672
6	126000	98960	360000	282743
6 1/2	147875	116141	422500	331831
7	171500	134696	490000	384845
7 1/2	196875	154625	562500	441787
8	224000	175929	642000	502655
8 1/2	252875	198607	722500	567450
9	283500	222660	810000	636172
9 1/2	315875	248088	902500	708822
10	350000	274889	1000000	785398

Tabelle IV.

Die Zug- und Druckkräfte, welche eiserne und hölzerne Säulen von verschiedenen Querschnitten in der Richtung ihrer Axe auf die Dauer auszuhalten vermögen.

Querschnitt F in Quadratzollen	Zugkraft in Centnern.			Druckkraft in Centnern.		
	Gußeisen $\frac{1}{m}T = 35$	Schmiedeeisen $\frac{1}{m}T = 100$	Holz $\frac{1}{m}T = 9$	Gußeisen $\frac{1}{m}T = 90$	Schmiedeeisen $\frac{1}{m}T = 80$	Holz $\frac{1}{m}T = 6{,}50$
1	35	100	9	90	80	6,5
2	70	200	18	180	160	13,0
3	105	300	27	270	240	19,5
4	140	400	36	360	320	26,0
5	175	500	45	450	400	32,5
6	210	600	54	540	480	39,0
7	245	700	63	630	560	45,5
8	280	800	72	720	640	52,0
9	315	900	81	810	720	58,5
10	350	1000	90	900	800	65,0
11	385	1100	99	990	880	71,5
12	420	1200	108	1080	960	78,0
13	455	1300	117	1170	1040	84,5
14	490	1400	126	1260	1120	91,0
15	525	1500	135	1350	1200	97,5
16	560	1600	144	1440	1280	104,0
17	595	1700	153	1530	1360	110,5
18	630	1800	162	1620	1440	117,0
19	665	1900	171	1710	1520	123,5
20	700	2000	180	1800	1600	130,0
21	735	2100	189	1890	1680	136,5
22	770	2200	198	1980	1760	143,0
23	805	2300	207	2070	1840	149,5
24	840	2400	216	2160	1920	156,0
25	875	2500	225	2250	2000	163,5
26	910	2600	234	2340	2080	170,0
27	945	2700	243	2430	2160	176,5
28	980	2800	252	2520	2240	183,0
29	1015	2900	261	2610	2320	189,5
30	1050	3000	270	2700	2400	195,0
31	1085	3100	279	2790	2480	201,5
32	1120	3200	288	2880	2560	208,0
33	1155	3300	297	2970	2640	214,5
34	1190	3400	306	3060	2720	221,0
35	1225	3500	315	3150	2800	227,5
36	1260	3600	324	3240	2880	234,0

Beispiele. 1) Welche Last kann ein Drahtseil tragen, welches aus 16 Drähten von je $1\frac{1}{2}$ Linie Dicke besteht, wenn sechsfache Sicherheit vorausgesetzt wird. Es ist hier

$$F = \frac{16}{144} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{144} \text{ Quadr.-Zoll,}$$

und nimmt man aus der Tabelle I. $\frac{K}{n} = \frac{K}{6} = 15000$ Pfund, so erhält man

$$P = \frac{9 \cdot \pi}{144} \cdot 15000 = 2945 \text{ Pfund.}$$

2) Welchen Querschnitt muß ein eisernes Gestänge erhalten, das bei 1000 Fuß Länge eine Last von 75000 Pfund zu tragen hat? Nehmen wir hier $\frac{T}{m} = 10000$ an, und setzen wir das Gewicht von einem Cubikzoll Schmiedeeisen $= 0{,}275$ Pfund, so erhalten wir $75000 + 12 \;\, 1000 \cdot 0{,}275\, F = 10000\, F$, daher

$$F = \frac{75000}{10000 - 3300} = \frac{750}{67} = 11{,}2 \text{ Quadratzoll.}$$

Die Verlängerung, welche dieses Gestänge durch die Last $P = 75000$ Pfund erleidet, ist, da der Elasticitätsmodul des Schmiedeeisens, $E = 27000000$ Pfund beträgt,

$$\lambda = \frac{Pl}{FE} = \frac{75000 \cdot 12000}{27000000 \cdot 11{,}2} = \frac{100}{33{,}6} = 3 \text{ Zoll.}$$

Wegen des Gestänggewichtes fällt aber diese Verlängerung noch um

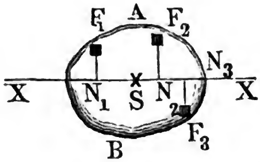
$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Gl}{FE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}275\, Fl^2}{EF} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}275 \cdot \frac{12000^2}{27000000}$$

$$= 0{,}275 \cdot \frac{8}{3} = 0{,}73 \text{ Zoll}$$ größer, im Ganzen also 3,73 Zoll aus.

§. 20. Das Maass der Biegungsmomente. Das **Biegungsmoment** eines prismatischen Balkens wird gemessen durch das Aggregat

$W = F_1 y_1^2 + F_2 y_2^2 + F_3 y_3^2 + \cdots$, wo $F_1, F_2, F_3 \ldots$ die Theile seines Querschnittes $AB = F$, Fig. 240, und y_1, y_2, y_3 u. s. w. die Abstände $F_1N_1, F_2N_2 \ldots$ derselben von der durch den Schwerpunkt S der ganzen Fläche gehenden neutralen Axe XX bezeichnen.

Fig. 240.



Ist W_1, das Maaß des Biegungsmomentes einer Fläche AB, Fig. 241 (a. f. S.), in Hinsicht auf eine Axe X_1X_1, und d der Abstand SO des Schwerpunktes S der Fläche von dieser Axe, so hat man das Maaß des Biegungsmomentes derselben in Hinsicht auf die Parallelaxe XX durch S:

$$W = W_1 - Fd^2.$$

Sind W_1 und W_2, die Maaße der Biegungsmomente einer Fläche AB, Fig. 242, in Hinsicht auf zwei rechtwinkelig gegen einander stehende Axen CX und CY, so ist das Maaß des Drehungsmomentes:

$$W_0 = W_1 + W_2,$$

Fig. 241

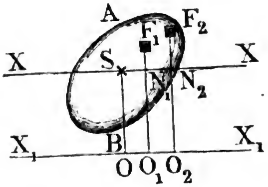
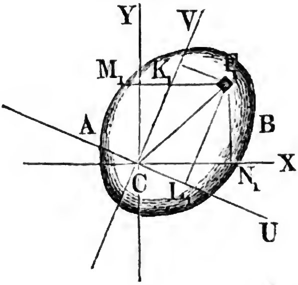


Fig. 242.



wofern dasselbe die Summe der Producte $F_1 z_1^2$, $F_2 z_2^2 \ldots$ aus den Flächenelementen F_1, $F_2 \ldots$ und den Quadraten der Entfernungen $CF_1 = z_1$, $CF_2 = z_2 \ldots$ dieser Elemente vom Axpunkte C bezeichnet.

Hiernach ist auch

$$V_1 + V_2 = W_1 + W_2,$$

wenn V_1 und V_2 die Maaße der Biegungsmomente der Fläche in Hinsicht auf zwei andere orthogonale Axen CU und CV angeben.

Für ein Rechteck $ABBA$, Fig. 243, von der Breite $AB = b$ und der Höhe $AA = h$, ist $W = \frac{bh^3}{12}$.

Für ein Dreieck ABC, Fig. 244, mit der Grundlinie

Fig. 243.

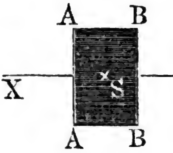


Fig. 244.

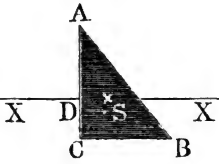
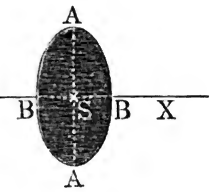


Fig. 245.



$BC = b$ und Höhe $AC = h$, ist in Hinsicht auf die neutrale Axe XX durch den Schwerpunkt S:

$$W = \frac{bh^3}{36}.$$

Für eine Ellipse $ABAB$, Fig. 245, mit den Halbaxen $SA = a$ und $SB = b$, wovon die letztere in die neutrale Axe XX fällt, ist

$$W = \frac{\pi b a^3}{4};$$

folglich für den Kreis vom Halbmesser r:

$$W = \frac{\pi r^4}{4}.$$

Für einen Kreisring, dessen Halbmesser durch r und r_1 bezeichnet werden, hat man

$$W = \frac{\pi}{4}(r^4 - r_1^4),$$

oder, wenn man das Verhältniß $\frac{r_1}{r} = \nu$ setzt,

$$W = (1 - \nu^4)\frac{\pi r^4}{4} = 0{,}7854\,(1 - \nu^4)\,r^4.$$

Für ein hohles Rechteck, Fig. 246, dessen äußere Di-

Fig. 246.

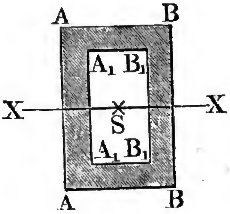
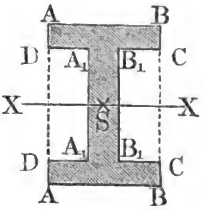


Fig. 247.



mensionen $AB = b$ und $AA = BB = h$, und innere Dimensionen $A_1B_1 = b_1$ und $A_1A_1 = B_1B_1 = h_1$ sind, ist

$$W = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{12},$$

oder, wenn $\frac{b_1}{b} = \frac{h_1}{h} = \nu$ wäre,

$$W = (1 - \nu^4)\frac{bh^3}{12}.$$

Ebenso ist für ein Rechteck mit hohlen Flanken, wie Fig. 247,

$$W = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{12},$$

wenn die äußere Breite $AB = b$ und Höhe $AA = BB = h$, ferner die Summe der Tiefen der Höhlen: $DA_1 + CB_1 = b_1$ und die Höhe $CC = DD$ derselben $= h_1$ gesetzt werden.

Ist $\frac{h_1}{h} = \mu$ und $\frac{b_1}{b} = \nu$, so hat man

$$W_1 = (1 - \mu^3\nu)\,\frac{bh^3}{12}.$$

Für eine Parabelfläche ABC, Fig. 248 (a. f. S.), von der Basis $AC = b$ und Höhe $BC = a$ ist in Hinsicht auf die Axe X_1X_1 durch AC:

$$W_1 = \tfrac{2}{3}\,ab\,\frac{a^2}{5} = \frac{Fa^2}{5},$$

und in Hinsicht auf die zweite Axe $Y_1 Y_1$ durch den Scheitel A:

$$W_2 = {}^2\!/_3\, a b \cdot \frac{3 b^2}{7} = {}^3\!/_7\, F b^2,$$

wo $F = {}^2\!/_3\, ab$, den Inhalt der Fläche bezeichnet.

In Hinsicht auf die erste Axe XX durch den Schwerpunkt ist dagegen

$$W = [{}^1\!/_5 - ({}^3\!/_8)^2]\, F a^2 = {}^{19}\!/_{320}\, F a^2,$$

Fig. 248.

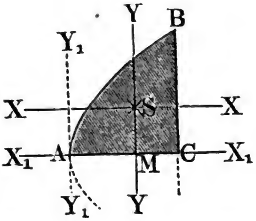
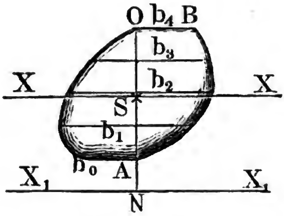


Fig. 249.



und in Hinsicht auf die zweite Axe YY:

$$W_2 = [{}^3\!/_7 - ({}^3\!/_5)^2]\, F b^2 = {}^{12}\!/_{175}\, F b^2.$$

Mittels der Simpson'schen Regel bestimmt sich das Maaß des Biegungsmomentes einer Fläche AB, Fig. 249, in Hinsicht auf irgend eine Axe $X_1 X_1$, durch die Formel

$$W_1 = \frac{h}{12}\,(b_0 h_0^2 + 4\, b_1 h_1^2 + 2\, b_2 h_2^2 + 4\, b_3 h_3^2 + b_4 h_4^2),$$

wo h die constante Höhe AO und b_0, b_1, b_2 ... die verschiedenen Breiten der Fläche in den Axenabständen h_0, h_1, h_2 ... bezeichnen.

Hieraus bestimmt sich das Moment in Hinsicht auf die neutrale Axe XX durch den Schwerpunkt S mittels der Formel

$$W = W_1 - F d^2.$$

§. 21. Die elastische Linie. Für die von der neutralen Axe AOB, Fig. 250, eines gebogenen Balkens gebildete elastische Linie hat man, wenn P die biegende Kraft, l die Länge AB des ganzen Balkens, x die Abscisse AM, y die Ordinate MO und r den Krümmungshalbmesser KO eines Elementes O derselben bezeichnet:

$$WE = Pxr.$$

Hiernach ist der Krümmungshalbmesser

$$r = \frac{WE}{Px};$$

der Tangentenwinkel

$$\alpha = \frac{P(l^2 - x^2)}{2\, WE};$$

die Ordinate

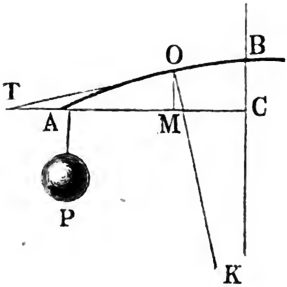
$$y = \frac{Px}{2\, WE}\left(l^2 - \frac{x^2}{3}\right),$$

und daher die Bogenhöhe

$$BC = a = \frac{Pl^3}{3\,WE}.$$

Die Leistung oder Arbeit, bei welcher der Körper um einen Bogen von der Höhe a gekrümmt wird, ist:

Fig 250.



$$L = \tfrac{1}{2} Pa = \frac{P^2 l^3}{6\,WE}.$$

Ist die Last Q auf AB gleichförmig vertheilt und trägt jede Längeneinheit des Balkens $= q$, ist also $Q = lq$, so hat man:

$$r = \frac{2\,WE}{q\,x^2},$$

$$a = \frac{q\,(l^3 - x^3)}{6\,WE}$$

und

$$y = \frac{q\,x}{6\,WE}\left(l^3 - \frac{x^3}{4}\right);$$

daher

$$a = \frac{Q\,l^3}{8\,WE}, \text{ und } L = \frac{17\,Q^2 l^3}{768\,WE}.$$

Ruht der Balken an beiden Enden auf, so hat man im ersten Falle, wo die Last in der Mitte des Balkens wirkt,

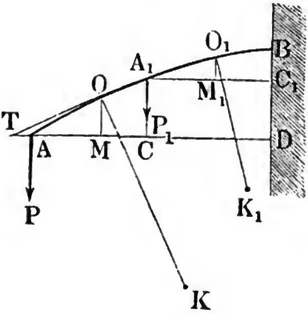
$$a = \frac{Pl^3}{48\,WE}, \text{ und } L = \frac{P^2\,l^3}{96\,WE}$$

und im zweiten Falle, wo die Belastung gleichförmig vertheilt ist,

$$a = \frac{5}{8}\,\frac{Q\,l^3}{48\,WE}, \text{ und } L = \frac{5}{8}\cdot\frac{Q^2 l^3}{96\,WE}.$$

Wird ein Balken von zwei Kräften P und P_1 gebogen, so bildet die neutrale Axe desselben eine zusammengesetzte elastische Linie AA_1B, Fig. 251. Bezeichnet x die Abscisse AM eines Punktes O des ersten Theiles AA_1, so ist für den Krümmungshalbmesser an dieser Stelle:

Fig. 251.



$$KO = r = \frac{WE}{Px};$$

bezeichnet l die Länge des ersten Stückes und dagegen x_1 die Abscisse A_1M_1 eines Punktes O_1 des zweiten Theiles A_1B, so wird der entsprechende Krümmungshalbmesser durch die Forme'

$$K_1\,O_1 = r_1$$

$$= \frac{WE}{P(l+x_1)+P_1x}.$$

bestimmt.

Bezeichnet β den Neigungswinkel der elastischen Linie in A_1, so ist ferner der Neigungswinkel derselben in O:

$$\angle\, OTM = \alpha = \beta + \frac{P(l^2 - x^2)}{2\,WE}.$$

sowie die Ordinate

$$MO = y = \beta x + \frac{P(l^2 x - \frac{1}{3} x^3)}{2\,WE},$$

folglich die Bogenhöhe

$$CA_1 = a = \beta l + \frac{Pl^3}{3\,WE}$$

Ist ferner der Neigungswinkel der elastischen Linie in B, $= \beta_1$, so hat man den Neigungswinkel derselben in irgend einem Punkte O_1:

$$\alpha_1 = \beta_1 + \frac{\frac{1}{2}(P + P_1)(l_1^2 - x_1^2) + Pl(l_1 - x_1)}{WE},$$

sowie

$$\beta = \beta_1 + \frac{\frac{1}{2}(P + P_1) l_1^2 + Pll_1}{WE}$$

und die Ordinate von O_1:

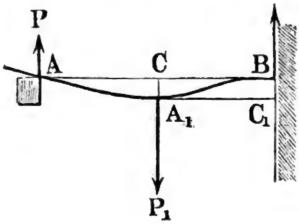
$$M_1 O_1 = y_1 = \beta_1 x_1 + \frac{\frac{1}{2}(P + P_1)(l_1^2 - \frac{1}{3} x_1^2) x_1 + Pl(l_1 - \frac{1}{2} x_1) x_1}{WE},$$

daher die Bogenhöhe:

$$C_1 B = a_1 = \beta_1 l_1 + \frac{2(P + P_1) l_1^3 + 3 Pll_1^2}{6\,WE}.$$

Wird der Balken AB, Fig. 252, an einem Ende B horizontal festgehalten, während er am anderen Ende A frei aufliegt, und in der Mitte A_1 ein Gewicht P_1 trägt, so ist $\beta_1 = 0$ und $l = l_1$, folglich

Fig. 252.



$$\beta = \frac{(3P + P_1) l^2}{2\,WE},$$

die Ordinate in A_1:

$$CA_1 = a = \beta l + \frac{Pl^3}{3\,WE} = \frac{(11 P + 3 P_1) l^3}{6\,WE},$$

und die in B:

$$C_1 B = a_1 = \frac{(5P + 2P_1) l^3}{6\,WE}.$$

Liegen beide Endpunkte A und B in gleicher Höhe, so ist $a + a_1 = 0$, wonach $P = -\frac{5}{16} P_1$ folgt.

Das Biegungsmoment für A_1 ist

$Pl = -\frac{5}{16} P_1 l$, und das für B:

$P_1 l + 2 Pl = \frac{3}{8} P_1 l = \frac{6}{16} P_1 l$, also größer.

Legt man das Ende A um eine gewisse Höhe a_2 über B, so hat man $a + a_1 = a_2$, wonach

$$P = \frac{6\,WE a_2}{16\, l^3} - \frac{5}{16} P_1 \text{ folgt.}$$

Sollen die Biegungsmomente in Hinsicht auf A_1 und B einander entgegengesetzt und gleich groß sein so ist $P = -\frac{P_1}{3}$ und daher

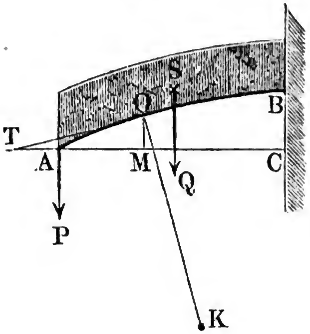
$$a_2 = -\frac{Pl^3}{18WE}$$

zu machen, also die Unterlage von A um $0,0555\ \frac{Pl^3}{WE}$ höher zu legen als der feste Endpunkt B.

Das Biegungsmoment in A_1 und B ist dann $= \pm \frac{P_1 l}{3}$.

Ist die Last P_1 auf die ganze Balkenlänge $AB = l$, Fig. 253, gleichmäßig vertheilt, und zwar $P_1 = Q = ql$, wo q die Belastung pr. Längeneinheit bezeichnet, so hat man den Krümmungshalbmesser der von der neutralen Axe desselben gebildeten elastischen Linie

Fig. 253.



$$KO = r = \frac{WE}{Px + \frac{1}{2}qx^2},$$

ferner den Tangentenwinkel

$$\angle OTM = \alpha = \frac{P(l^2 - x^2)}{2WE} + \frac{q(l^3 - x^3)}{6WE},$$

und die Ordinate

$$MO = y = \frac{P(l^2 - \frac{1}{3}x^2)x}{2WE} + \frac{q(l^3 - \frac{1}{4}x^3)x}{6WE}$$
$$= \frac{4P(3l^2 - x^2)x + q(4l^3 - x^3)x}{24WE}.$$

Für $x = l$ giebt y die Bogenhöhe

$$CB = a = \frac{(8P + 3Q)l^3}{24WE}.$$

Soll $a =$ Null sein, so hat man

$$P = -\frac{3}{8}Q;$$

das Biegungsmoment in Hinsicht auf B ist $= \frac{1}{8}Ql$, und in Hinsicht auf irgend einen anderen Punkt O:

$$Px + \frac{1}{2}qx^2 = -\frac{3}{8}Qx + \frac{1}{2}qx^2.$$

Letzteres ist ein Maximum, und zwar $= -\frac{9}{128}Ql$, für $x = \frac{3}{8}l$.

Das Biegungsmoment $Px + \frac{1}{2}qx^2$ ist überhaupt ein Maximum für $x = -\frac{P}{q}$, und zwar $= -\frac{P^2}{2q}$; wogegen es für $x = l$, $= Pl + \frac{Ql}{2}$ ausfällt. Diese Momente sind einander entgegengesetzt und gleich, für $P^2 - 2PQ = Q^2$, d. i. für

$$P = -(\sqrt{2} - 1)Q = -0,4142\,Q,$$

und zwar

$$= \pm \frac{(\sqrt{2}-1)^2 \, Q^2}{2q} = \pm \frac{(\sqrt{2}-1)^2 Ql}{2} = \pm\, 0{,}08578\, Ql,$$

also kleiner als das Moment $\frac{1}{8}\, Ql = 0{,}125\, Ql$, wo $a = 0$ ist.

Für dieses kleinere Biegungsmoment ist das Ende A um

$$a = 0{,}3136 \frac{Ql^3}{24\, WE} = 0{,}01307 \frac{Ql^3}{WE}$$

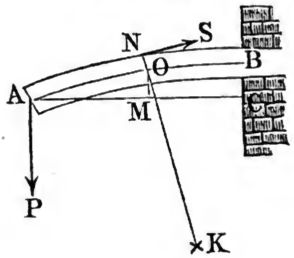
über den festen Punkt B zu legen.

§. 22. Relative Festigkeit. Die Längenspannung S (pr. Flächeneinheit) in dem Abstande $NO = e$ von der neutralen Axe AOB, Fig. 254, ist durch die Proportion $\frac{S}{E} = \frac{e}{r}$ und folglich mittels der Formel

$$S = \frac{Ee}{r} = \frac{Pxe}{W}$$

bestimmt.

Fig. 254.



Dieselbe fällt im größten Abstande (e) von der neutralen Axe und am festgehaltenen Punkte B, wo $x = l$ ist, am größten, und zwar $S = \frac{Ple}{W}$ aus.

Umgekehrt ist

$$Pl = \frac{WS}{e},$$

und setzt man für S den Tragmodul T ein, so folgt die Tragkraft des prismatischen Balkens

$$P = \frac{WT}{le}.$$

Für den Balken mit rectangulärem Querschnitte (Fig. 243) ist $e = \frac{h}{2}$ und die Tragkraft

$$P = \frac{bh^2}{l} \frac{T}{6}.$$

Für den cylindrischen Balken ist $e = r$ und die Tragkraft

$$P = \frac{\pi r^3}{l} \frac{T}{4} = 0{,}7854 \frac{r^3 T}{l}.$$

Für die hohlen und gerippten Balken (Fig. 246 und Fig. 247) ist $e = \frac{h}{2}$, daher die Tragkraft

$$P = \frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{hl} \cdot \frac{T}{6} = (1 - \mu^3 \nu) \frac{bh^2}{l} \frac{T}{6},$$

sowie für den röhrenförmigen Balken

$$P = \frac{\pi (r^4 - r_1^4)}{rl} \frac{T}{4} = \pi\, (1 - \mu^4) \frac{r^3}{l} \frac{T}{4}$$
$$= 0{,}7854\, (1 - \mu^4) \frac{r^3 T}{l}.$$

Für einen Balken, dessen Querschnitt die aus zwei gleichen Trapezen bestehende Gestalt $ABCB$, Fig. 255 hat, ist

$$W = \frac{(3b + b_1)h^3}{48}, \text{ und } P = \frac{(3b + b_1)h^2}{4l}\frac{T}{6},$$

wobei h die ganze Höhe $AA = BB$, b die äußere Breite AB und b_1 die innere Breite CD bezeichnet.

Für einen Balken, dessen Querschnitt ADB, Fig. 256, von

Fig. 255.

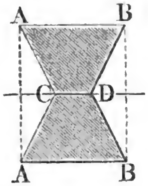
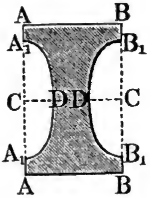


Fig. 256.



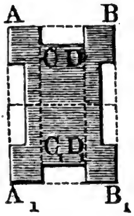
einem mit elliptischen Seitenhöhlungen versehenen Rechteck gebildet wird, ist

$$W = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi b_1 a_1^3}{4} \text{ und } P = \frac{bh^3 - 3\pi b_1 a_1^3}{h} \cdot \frac{T}{6},$$

wobei b und h Breite und Höhe des äußeren Rechteckes, sowie a_1 und b_1 die Halbaxen CA_1 und CD der halbelliptischen Ausschnitte bezeichnen.

Bei einem Balken mit Rippen besteht der Querschnitt ABB_1A_1, Fig. 257, aus einem Rechtecke CDD_1C_1 und aus zwei an den Seiten ausgehöhlten Rechtecken ACC_1A_1 und BDD_1B_1 (wie Fig. 247); es ist daher für denselben

Fig. 257.



$$W = \frac{bh^3 - b_1h_1^3 + b_2h_2^3}{12}$$

und

$$P = \frac{bh^3 - b_1h_1^3 + b_2h_2^3}{hl}\frac{T}{6},$$

wobei b_2 und h_2 die Breite $CD = C_1D_1$ und Höhe $CC_1 = DD_1$ des Mittelstückes bezeichnen, und b, h, b_1 und h_1 die Bedeutungen wie oben und in Fig. 247 zu §. 20 haben.

Für einen Balken, dessen Querschnitt ein regelmäßiges Polygon bildet, wie ABD, Fig. 258 I. und II. (a. f. S.), ist

$$W = \frac{F}{4}\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right),$$

und $F = \frac{1}{2}nhs$, wobei s die Seitenlänge $AB = BD$, h die Höhe CN eines Theildreieckes und n die Anzahl der Seiten des Polygones bezeichnet.

Ferner ist für die Stellung I.

$$P = \frac{n\,s}{l}\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right)\frac{T}{8}$$

und für die Stellung II.

$$P = \frac{n\,h\,s}{r\,l}\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right)\frac{T}{8},$$

wobei $r = \sqrt{h^2 + \frac{s^2}{4}}$, den Halbmesser $CA = CB$ des umschriebenen Kreises bezeichnet.

Ein Balken hat dann die größte Tragkraft (P), wenn sein

Fig. 258.

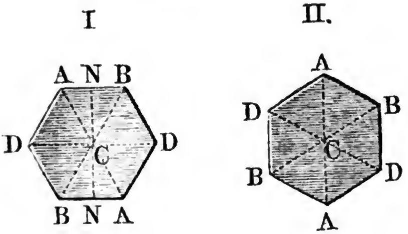
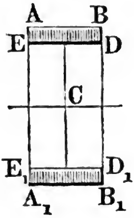


Fig. 259.



Querschnitt aus zwei Rechtecken wie $ABDE$ und $A_1B_1D_1E_1$, Fig. 259, besteht, welche in der Richtung der Kraft möglichst weit von einander abstehen. Für denselben ist

$$W = \frac{b\,(h^3 - h_1^3)}{12} \text{ und } P = \frac{b\,(h^3 - h_1^3)}{h\,l}\frac{T}{6},$$

wobei b die Breite AB, h die äußere Höhe $AA_1 = BB_1$ und h_1 die innere Höhe $DD_1 = EE_1$ bezeichnet.

Da $b\,(h - h_1) = F$, so ist auch

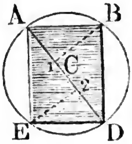
$$W = \frac{F}{12}(h^2 + h\,h_1 + h_1^2),$$

oder annähernd, bei einem großen Abstande zwischen beiden Rechtecken:

$$W = \frac{F h^2}{4} \text{ und } P = \frac{F}{l}\left(\frac{h}{2}\right) T.$$

Der rectanguläre Querschnitt $ABDE$, Fig. 260, des aus einem Baumstamme zu bildenden Balkens erhält die Breite

Fig. 260.



$$AB = b = d\sqrt{1/3} = 0{,}5774\,d,$$

und die Höhe

$$BD = h = d\sqrt{2/3} = b\sqrt{2} = 0{,}8165\,d = 1{,}4142\,b,$$

und seine vier Eckpunkte werden gefunden, wenn man den Durchmesser AD in drei gleiche Theile theilt, und in den Theilpunkten (1) und (2) Perpendikel $1\,B$ und $2\,E$ errichtet

Die Tragkraft dieses Balkens ist um 35 Procent kleiner als die des runden Stammes. Um diesen Verlust zu vermindern, läßt man dem Balken die abgerundeten Kanten.

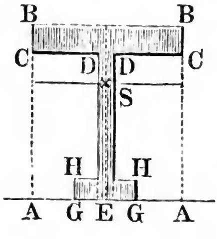
§. 23. Tragkraft des Gusseisens. In der Formel für die Tragkraft P ist der Sicherheit wegen für T der kleinste, also z. B. bei gußeisernen Balken der Modul T des Zerreißens einzusetzen, auch gewährt es hier eine namhafte Materialersparniß, wenn man bei Anwendung von Gußeisen den Balken auf der Seite der Ausdehnung eine kleinere Höhe giebt als auf der Seite der Compression. Sind T und T_1 die Tragmodel der Ausdehnung und der Compression, sowie e und e_1 die entsprechenden größten Abstände der Querschnittselemente von der neutralen Axe, so hat man

$$\frac{T}{e} = \frac{T_1}{e_1} \text{ oder } \frac{e_1}{e} = \frac{T_1}{T}, \text{ d. i. } = 2 \text{ zu machen.}$$

Ein gußeiserner Balken mit triangulärem Querschnitte (s. Fig. 244) ist so zu legen, daß die Spitze C auf die Seite der Compression und die Basis auf die der Ausdehnung, also bei einem an einem Ende festgehaltenen Balken, oben, und bei einem an beiden Enden aufliegenden Balken, unten zu liegen kommt. Es ist dann $e_1 = 2e$, und wird daher die Tragfähigkeit dieses Balkens auf beiden Seiten der neutralen Axe gleich viel in Anspruch genommen.

Ein gußeiserner Träger mit Tförmigem Querschnitte $BBGG$, Fig. 261, ist so aufzulegen, daß die breitere Rippe BDB der Ausdehnung und die schmalere Rippe HEH der Zusammendrückung ausgesetzt wird. Bezeichnet h die Höhe AB, b die Breite $BB = CC$, h_1 die Höhe AC und b_1 die doppelte Tiefe $2\,CD$, sowie h_2 die Höhe GH und b_2 die doppelte Breite der unteren Rippen HE, HE, so hat man in Hinsicht auf die Axe AA den Abstand

Fig. 261.



$$\overline{ES} = e_1 = \frac{1}{2}\,\frac{bh^2 - b_1 h_1^2 + b_2 h_2^2}{bh - b_1 h_1 + b_2 h_2},$$

und

$$W_1 = \frac{1}{3}(bh^3 - b_1 h_1^3 + b_2 h_2^3).$$

Da ferner $F = bh - b_1 h_1 + b_2 h_2$ ist, so lassen sich nun auch W und P mittels der Formeln

$$W = W_1 - F e_1^2 \text{ und } P = \frac{W}{e_1 l} T_1 \text{ berechnen.}$$

Führt man $e_1 = \frac{2}{3} h$ ein, und setzt man

$$\frac{h_1}{h} = \mu_1,\ \frac{h_2}{h} = \mu_2,\ \frac{b_1}{b} = \nu_1 \text{ und } \frac{b_2}{b} = \nu_2,$$

so erhält man folgende Gleichung zur Bestimmung der neutralen Axe:

$$(4 - 3\,\mu_1)\,\mu_1 \nu_1 - (4 - 3\,\mu_2)\,\mu_2 \nu_2 = 1.$$

Hiernach ist

$$\nu_2 = \frac{(4 - 3\mu_1)\mu_1\nu_1 - 1}{(4 - 3\mu_2)\mu_2},$$

$$e_1 = \frac{h}{2} \cdot \frac{1 - \mu_1^2\nu_1 + \mu_2^2\nu_2}{1 - \mu_1\nu_1 + \mu_2\nu_2}, F = bh(1 - \mu_1\nu_1 + \mu_2\nu_2)$$

und

$$W_1 = \frac{1}{3}bh^3(1 - \mu_1^3\nu_1 + \mu_2^3\nu_2),$$

Z. B. für $\mu_1 = 0{,}85$, $\mu_2 = 0{,}10$ und $\nu_1 = 0{,}9$, folgt $\nu_2 = 0{,}295$, annähernd $= 0{,}3$, $e_1 = \frac{2}{3}h$, $F = 0{,}2645\, bh$,

$W_1 = 0{,}1492\, bh^3$, $W = 0{,}03160\, bh^3$ und

$$P = 0{,}0474 \frac{bh^2}{l} T_1, \text{ folglich}$$

$$\frac{P}{F} = 0{,}1792 \frac{h^2 T_1}{l},$$

wo für T_1 der Tragmodul für Druck einzusetzen ist.

Läßt man die Compressionsrippe weg, wie Fig. 262 darstellt, so hat man μ_2 sowie $h_2 =$ Null, und es ist $(4 - 3\mu_1)\mu_1\nu_1 = 1$; hiernach

$$\nu_1 = \frac{1}{(4 - 3\mu_1)\mu_1}, \quad e_1 = \frac{h}{2} \frac{1 - \mu_1^2\nu_1}{1 - \mu_1\nu_1},$$

$$F = bh(1 - \mu_1\nu_1) \text{ und } W_1 = \frac{1}{3}bh^3(1 - \mu_1^3\nu_1).$$

Fig. 262.

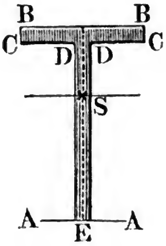
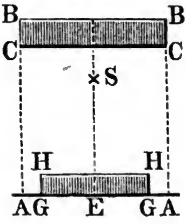


Fig. 263.



Für $\mu_1 = \frac{11}{12}$, folgt $\nu_1 = \frac{48}{55}$, annähernd $= \frac{7}{8}$, ferner $e_1 = \frac{2}{3}h$, $F = 0{,}2\, bh$, $W_1 = 0{,}1093\, bh^3$, $W = 0{,}02038\, bh^3$, und

$$P = 0{,}03057 \frac{bh^2}{l} T_1, \text{ folglich } \frac{P}{F} = 0{,}1528 \frac{h^2 T_1}{l}.$$

Für ein aus zwei getrennten Rechtecken $BBCC$ und $GGHH$, Fig. 263, bestehendes Querprofil ist $\nu_1 = 1$, daher

$$\nu_2 = \frac{(4 - 3\mu_1)\mu_1 - 1}{(4 - 3\mu_2)\mu_2}, \quad e_1 = \frac{h}{2}\left(\frac{1 - \mu_1^2 + \mu_2^2\nu_2}{1 - \mu_1 + \mu_2\nu_2}\right),$$

$$F = bh(1 - \mu_1 + \mu_2\nu_2) \text{ und}$$

$$W_1 = \frac{1}{3}bh^3(1 - \mu_1^3 + \mu_2^3\nu_2).$$

Z. B. $\mu_1 = 0{,}85$ und $\mu_2 = 0{,}10$ giebt $\nu_2 = 0{,}6283$,

$e_1 = \frac{2}{3}h$, $F = 0{,}2128\, bh$, $W_1 = 0{,}1288\, bh^3$,

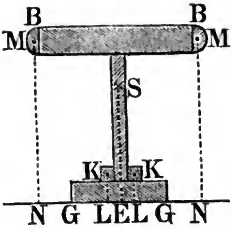
$$W = 0{,}03425\, b h^3 \text{ und } P = 0{,}05137 \frac{bh^2}{l} T_1, \text{ folglich}$$

$$\frac{P}{F} = 0{,}241 \frac{h^2 T_1}{l}.$$

Da das Gewicht des Trägers dem Querschnitte F desselben proportional ist, so trägt ein Balken bei gleichem Gewichte um so mehr, je größer das Verhältniß $\frac{P}{F}$ ist, und man muß daher auch das letzte Querprofil den beiden ersteren, und unter diesen das erste dem zweiten vorziehen.

Kleinere Theile F_1, F_2 des Querschnittes kann man bei Bestimmung von W und P dadurch annähernd in Betracht ziehen, daß man die Inhalte derselben mit den Quadraten der Abstände ihrer Mittelpunkte von der angenommenen Axe multiplicirt und die erhaltenen Producte zu dem gefundenen Werthe W des Haupttheiles addirt.

Fig. 264.



Setzt man z. B. an den Tförmigen Querschnitt in Fig. 261 die Rechtecke K, K und die Halbkreise M, M an, wobei derselbe die in Fig. 264 abgebildete Form annimmt, so hat man zu dem oben gefundenen W noch zu addiren: $F_1 . \overline{KL}^2 + F_2 . \overline{MN}^2$. Bezeichnet a_1 die Höhe und d_1 die Breite der Rechtecke K, K, so hat man

$$F_1 = 2\, a_1 d_1 \text{ und } \overline{KL} = h_2 + \frac{a_1}{2}, \text{ auch ist}$$

$$F_2 = \frac{\pi (h - h_1)^2}{4} \text{ und } \overline{MN} = \frac{h + h_1}{2},$$

daher im Ganzen

$$W_1 = \tfrac{1}{3}(b h^3 - b_1 h_1^3 + b_2 h_2^3) + 2\, a_1 d_1 \left(h_2 + \frac{a_1}{2}\right)^2 + \frac{\pi (h - h_1)^2}{4} . \left(\frac{h + h_1}{2}\right)^2$$

zu setzen. Auch ändert sich hierbei der Ausdruck für e_1 in folgenden um:

$$e_1 = \frac{\tfrac{1}{3}(bh^2 - b_1 h_1^2 + b_2 h_2^2) + 2 a_1 d_1 \left(h_2 + \frac{a_1}{2}\right) + \frac{\pi (h - h_1)^2}{4} \left(\frac{h + h_1}{2}\right)}{bh - b_1 h_1 + b_2 h_2 + 2\, a_1 d_1 + \frac{\pi}{4}(h - h_1)^2}.$$

§. 24. **Tragkraft eiserner und hölzerner Träger bei verschiedenen Unterstützungen.** Folgende Tabelle enthält die durch Biegungs- und Brechungsversuche ermittelten Werthe von E, T und K für Körper, welche in Hinsicht auf die neutrale Axe symmetrisch geformt sind.

Namen des Körpers	Elasticitäts-modul E in Neupfund	Tragmodul T in Neupfund	Festigkeits-modul K in Neupfund
Gußeisen . .	14'000000	9500	44000
Schmiedeeisen	20'000000	17000	32000
Laubholz . .	1'300000	3000	9500
Nadelholz .	2'000000	4000	12000

Um mittels der Formeln für P die Kräfte bestimmen zu können, welche Balken oder andere Träger mit Sicherheit und auf längere Dauer tragen können, setzt man für T nur einen Theil von diesen Versuchswerthen T oder K, und zwar

1) für Gußeisen $\frac{T}{m} = \frac{3T}{4}$ oder $\frac{K}{6}$,

2) für Schmiedeeisen $\frac{T}{m} = \frac{T}{2}$ oder $\frac{K}{4}$, und

3) für Holz $\frac{T}{m} = \frac{T}{3}$ oder $\frac{K}{10}$ ein.

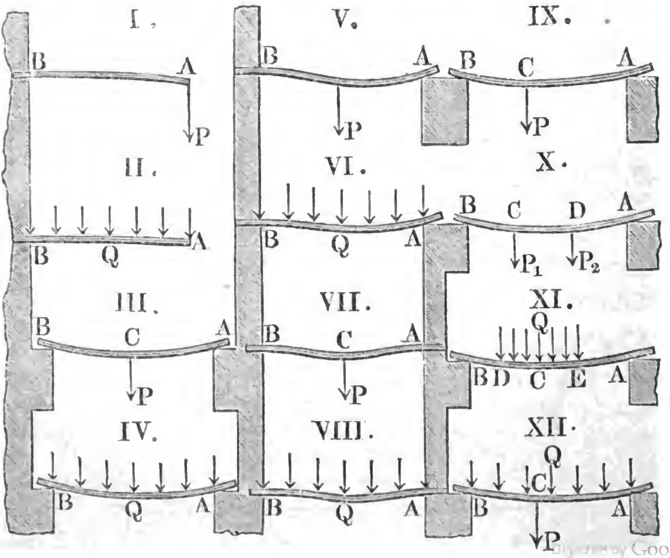
Man kann hiernach setzen, im Mittel

für Gußeisen $\frac{1}{m} T = 7000$ Pfund,

für Schmiedeeisen $\frac{1}{m} T = 9000$ „

und für Holz $\frac{1}{m} T = 1000$ „

Fig. 265.



Bei Berechnung der Tragkraft von activen Maschinentheilen muß man wegen der steten Bewegung und Abnutzung noch mehr Sicherheit geben und daher $\frac{1}{m} T$ noch kleiner annehmen.

Folgende Tabelle enthält die Tragkraft P eines an einem Ende A belasteten und am anderen Ende B festgehaltenen Balkens AB, Fig. 265 I., bei verschiedenen Querschnitten und verschiedenen Stoffen.

Querschnitts-form	Gußeisen $\frac{1}{m} T = 7000$ Neupfund	Schmiedeeisen $\frac{1}{m} T = 9000$ Neupfund	Holz $\frac{1}{m} T = 1000$ Neupfund
Beliebige Form $P = \frac{WT}{le}$	$P = 7000 \frac{W}{le}$ $\frac{W}{e} = \frac{Pl}{7000}$	$P = 9000 \frac{W}{le}$ $\frac{W}{e} = \frac{Pl}{9000}$	$P = 1000 \frac{W}{le}$ $\frac{W}{e} = \frac{Pl}{1000}$.
Rechteck, $e = \frac{h}{2}, b = \nu h,$ $F = bh = \nu h^2$ $W = \frac{bh^3}{12}$ $= \frac{\nu h^4}{12}$ $P = \frac{bh^2}{l} \cdot \frac{T}{6}$ $= \frac{\nu h^3}{l} \cdot \frac{T}{6}$	$P = 1167 \frac{bh^2}{l}$ $= 1167 \frac{\nu h^3}{l}$ $h = 0{,}0293 \sqrt[2]{\frac{Pl}{b}}$ $= 0{,}0950 \sqrt[3]{\frac{Pl}{\nu}}$	$P = 1500 \frac{bh^2}{l}$ $= 1500 \frac{\nu h^3}{l}$ $h = 0{,}0258 \sqrt[2]{\frac{Pl}{b}}$ $= 0{,}0874 \sqrt[3]{\frac{Pl}{\nu}}$	$P = 167 \frac{bh^2}{l}$ $= 167 \frac{\nu h^3}{l},$ $h = 0{,}0775 \sqrt[2]{\frac{Pl}{b}}$ $= 0{,}1817 \sqrt[3]{\frac{Pl}{\nu}}$
Kreis, $e = \frac{d}{2}$ $F = \frac{\pi d^2}{4}$ $W = \frac{\pi d^4}{64}$ $P = \frac{\pi d^3}{l} \frac{T}{32}$	$P = 687 \frac{d^3}{l}$ $d = 0{,}1133 \sqrt[3]{Pl}$	$P = 884 \frac{d^3}{l}$ $d = 0{,}1043 \sqrt[3]{Pl}$	$P = 98 \frac{d^3}{l},$ $d = 0{,}217 \sqrt[3]{Pl}$

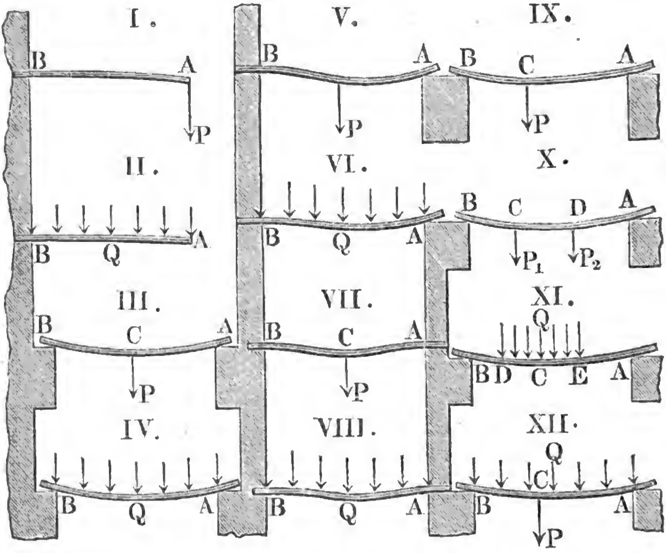
Mit Hülfe dieser Tabelle kann man nicht allein die Tragkraft P eines Balkens aus den Dimensionen, sondern auch eine der letzteren aus der Tragkraft und den übrigen Dimensionen oder ihren Verhältnissen zu einander berechnen.

Bei einer anderen Auflagerung, Befestigung, Belastungsweise u. s. w. sind die Coefficienten der in dieser Tabelle enthaltenen Formeln noch mit gewissen constanten Faktoren zu multipliciren.

Für den in Fig. 266, II. abgebildeten Fall, bei einer auf den ganzen Balken gleichförmig vertheilten Last ist in obige Tabelle einzusetzen statt $P, \frac{1}{2}Q$, für den in Fig. 266, III. dargestellten Fall, wo der Balken an beiden Enden aufruht und in der Mitte belastet ist, hat man ferner statt $P, \frac{1}{4}P$ einzusetzen, und für den Fall in Fig. 266 IV. mit vertheilter Last statt $P, \frac{1}{8}Q$.

Ferner hat man für den Fall in Fig. 266 V., wo der Balken an einem Ende aufliegt und am anderen festgeklemmt ist, statt $P, \frac{3}{16}P$, für den Fall in Fig. 266, VI., wo die Last Q vertheilt ist, statt $P, \frac{1}{8}Q$, sowie für den Fall in Fig. 266, VII., wo beide Enden eingeklemmt sind und die Last in der Mitte P

Fig. 266.



hängt, statt $P, \frac{1}{8}P$, und endlich für den Fall in Fig. 266, VIII. bei vertheilter Last Q, statt $P, \frac{1}{12}Q$ zu setzen.

Wirkt die Last P nicht in der Mitte des an beiden Enden aufliegenden Balkens, sondern ist der Angriffspunkt C von den Stützen A und B um l_1 und l_2 entfernt, wie Fig. 266, IX. vor Augen führt, so hat man statt Pl, $\frac{P l_1 l_2}{l}$ in die Grundformel $Pl = \frac{WT}{e}$, und also auch in die Formeln der obigen Tabelle einzuführen.

Wird ein Balken, wie Fig. 266, X., durch zwei Kräfte P_1 und P_2 belastet, deren Angriffspunkte C und D von dem Stütz-

punkte A um l_1 und l_2 abstehen, so trägt der Stützpunkt B von der Last $P = P_1 + P_2$ den Theil $R_2 = \frac{P_1 l_1 + P_2 l_2}{l}$, so daß für den Stützpunkt A der Theil $R_1 = P_1 + P_2 - R_2$ übrig bleibt.

Für das Balkenstück DA ist nun $R_1 l_2 = \frac{W_1 T}{e}$, sowie für das Balkenstück CB, $R_2 (l - l_1) = \frac{W_2 T}{e}$; daher hat man auch bei Beurtheilung der Tragkraft des Balkens mittelst der obigen Tabelle statt Pl das größere von den beiden Momenten $R_1 l_2$ und $R_2 (l - l_1)$ einzusetzen.

Für den in Fig. 266 XI. dargestellten Fall, wo der Balken auf eine gewisse Länge $DE = c$ belastet ist und der Mittelpunkt C der Last Q von den Stützpunkten A und B um l_1 und l_2 absteht, hat man das Tragmoment $\frac{Q l_1 l_2}{l}\left(1 - \frac{c}{2l}\right)$ statt Pl in Rechnung zu bringen.

Bei Vereinigung der Fälle I. und II. ist statt Pl, $Pl + \frac{Ql}{2}$ einzusetzen; ist endlich, wie in XII., der an beiden Enden aufliegende Balken mit zwei Kräften P und Q belastet, wovon die erstere in einem Punkte C angreift, der von den Stützpunkten A und B um l_1 und l_2 abweicht, und die andere gleichmäßig vertheilt ist auf dem Balken, z. B. in dem bloßen Gewichte desselben besteht, so hat man die beiden Drücke in A und B:

$$R_1 = \frac{Pl_2}{l} + \frac{Q}{2} \text{ und } R_2 = \frac{Pl_1}{l} + \frac{Q}{2}.$$

Ist $AC = l_1$ der größere Abstand, also $l_1 > l_2$, so hat man das statt Pl einzusetzende Tragmoment entweder

$$= \left(P\frac{l_2}{l} + \frac{Q}{2}\right)^2 \frac{l}{2Q} \text{ oder } = \left(P + \frac{Q}{2}\right)\frac{l_1 l_2}{l},$$

und zwar ersteres für $\frac{P}{Q} < \frac{l_1 - l_2}{2 l_2}$, und letzteres für $\frac{P}{Q} > \frac{l_1 - l_2}{2 l_2}$.

Für $l_1 = l_2 = \frac{1}{2} l$ ist statt Pl, $\left(P + \frac{Q}{2}\right)\frac{l}{4}$ einzuführen.

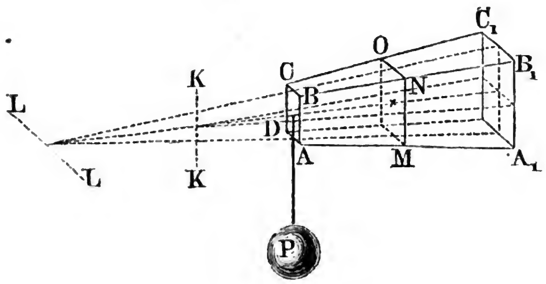
§. 25. **Körper von gleichem Widerstande.** Die schwächste Stelle eines Trägers ist diejenige, wo derselbe die größte Spannung S hat.

Für den an einem Ende belasteten und am anderen Ende festgehaltenen prismatischen Balken ist $S = \frac{Pxe}{W}$, folglich am größten für $x = l$, d. i. an dem festen Endpunkte. Hier ist also auch die schwächste Stelle des Balkens. Hat hingegen der Körper ABD die Keil- oder Obeliskenform, wie Fig. 267 (a. f. S.), so steht die schwächste Stelle MNO von der freien Endfläche $ABCD$ um

$$x = \left(\sqrt{1 + \frac{8d}{c}} - 1\right)\frac{c}{4}$$

ab, wenn c den Abstand der Durchschnittslinie KK der Seitenflächen, und d den Abstand der Durchschnittslinie LL zwischen

Fig. 267.



der Ober- und Unterfläche von der rectangulären Endfläche $ABCD$ bezeichnen. Ist b die Breite BC und h die Höhe AB dieser Fläche, so hat man die Breite des Querschnittes an der schwächsten Stelle:

$$NO = u = b\left(1 + \frac{x}{c}\right)$$

und die Höhe desselben

$$MN = v = h\left(1 + \frac{x}{d}\right),$$

folglich die Tragkraft des Balkens:

$$P = \frac{bh^2}{x}\left(1 + \frac{x}{c}\right)\left(1 + \frac{x}{d}\right)^2 \frac{T}{6}.$$

Für $c = d$ ist der Körper eine abgekürzte Pyramide, wo $x = \frac{c}{2}$ und $P = (3/2)^3 \frac{bh^2}{c}\frac{T}{3} = 27/8 \frac{bh^2}{c} \cdot \frac{T}{3}$ ausfällt.

Für $c = \infty$ ist der Körper ein Keil von unveränderlicher Breite b, wo $x = d$ und $P = 2^2 \frac{bh^2}{d}\frac{T}{6} = 4\frac{bh^2}{d}\frac{T}{6}$ ausfällt.

Für $d = \infty$ ist der Körper ein Keil von constanter Höhe h, wo $x = l$ die Länge des Körpers, und $P = \left(1 + \frac{l}{c}\right)\frac{bh^2}{l}\frac{T}{6}$ $= \frac{b_1 h^2}{l} \cdot \frac{T}{6}$, wenn b_1 die Breite $B_1 C_1$ an der Befestigungsstelle bezeichnet.

Bei einem Körper von gleichem Widerstande ist die Spannung $S = \frac{Pxe}{W}$ auf der ganzen Länge des Körpers constant. Hat der Körper rectanguläre Querschnitte von der Breite u und Höhe v, so ist $\frac{W}{e} = \frac{uv^2}{6}$ und daher

$\frac{uv^2}{x}$ constant, also auch $= \frac{bh^2}{l}$, wenn l die Länge, b die Breite und h die Höhe des Balkens an dem Befestigungspunkte bezeichnen. Bei constanter Breite $u = b$ ist $\frac{v^2}{h^2} = \frac{x}{l}$, daher der verticale Durchschnitt des Körpers eine Parabel ABC, wie Fig. 268, I. Die Tragkraft dieses parabolischen Balkens ist wie die eines prismatischen:

$$P = \frac{bh^2}{l} \frac{T}{6}$$

Diese Formel gilt auch für den Körper Fig. 268, II., bei welchem eine der Begrenzungsflächen AMB und AOC eine beliebige Form hat, und nur die Höhe $MO = v$ dem Gesetze $\frac{v^2}{h^2} = \frac{x}{l}$ unterworfen ist. Auch kann man die krummen Begrenzungsflächen durch ebene Flächen AC und BD, Fig. 269. ersetzen, wenn man die Höhe am freien Ende

$AD = h_0 = h\sqrt{1/8} = 0,3536\, h$

und die an dem festen Ende

$BC = h_1 = 3\, h_0 = 1,0607\, h$

Fig. 268.

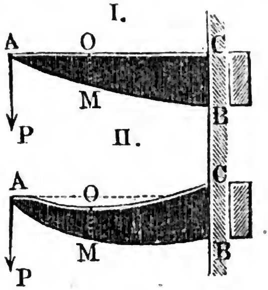
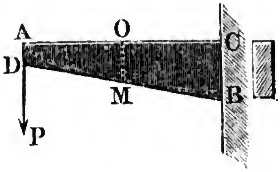


Fig. 269.



macht, wobei h die der Formel $P = \frac{bh^2}{l} \frac{T}{6}$ entsprechende Höhe bezeichnet. Der Balken wird dadurch nur um 6 Procent voluminöser als der parabolische Balken.

Dieselben Formeln und Regeln sind auch auf den an beider Enden unterstützten Balken AB, Fig. 270, I. (a. f. S.), anzuwenden. Steht der Lastpunkt C von den Stützpunkten A und B um l_1 und $l_2 = l - l_1$ ab, so hat man hier die größte Höhe $CD = h$ durch die Formel

$$P = \frac{l}{l_1 l_2} bh^2 \frac{T}{6} \text{ (s. §. 24, IX.) zu bestimmen.}$$

Uebrigens ist für die veränderliche Höhe auf einer Seite des Lastpunktes:

$$\frac{v_1^2}{h^2} = \frac{x_1}{l_1}, \text{ und auf der anderen: } \frac{v_2^2}{h^2} = \frac{x_2}{l_2},$$

wobei x_1 und x_2 die Abscissen AM und BN und v_1 und v_2 die entsprechenden Ordinaten MO und NU bezeichnen.

Bei Anwendung ebener Begrenzungsflächen, wie Fig. 270, II., ist die mittlere Höhe $CD_1 = 1{,}0607\,h$ und jede der Endhöhen $AE = BF = 0{,}3536\,h$ zu machen.

Bei Anwendung einer constanten Höhe ($v = h$) gilt die Formel $\frac{u}{b} = \frac{x}{l}$, und es erhält der Balken die Form eines Keiles mit verticaler Schärfe.

Sind die Querschnitte des Balkens ähnliche Rechtecke, so ist $\frac{u}{v} = \frac{b}{h}$, und $\frac{u^3}{b^3} = \frac{v^3}{h^3} = \frac{x}{l}$, übrigens aber bleibt $P = \frac{bh^2}{l}\,\frac{T}{6}$, wenn b die Breite CC und h die Höhe BC des Balkens ABC, Fig. 271, I., an der Befestigungsstelle, sowie l die Länge AL desselben bezeichnet.

Fig. 270.

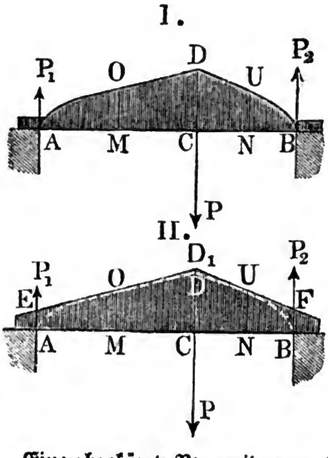
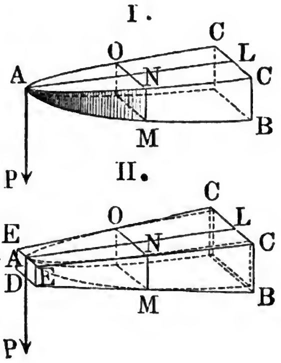


Fig. 271.



Eine abgekürzte Pyramide von gleicher Tragkraft wie Fig. 271, II. erhält die Querschnittsdimensionen am freien Ende $EE = b_0 = 0{,}5291\,b$ und $AD = h_0 = 0{,}5291\,h$, und an dem festen Ende: $CC = b_1 = 1{,}0583\,b$ und $BC = h_1 = 1{,}0583\,h$. Das Volumen oder Gewicht dieses pyramidalen Balkens ist um beinahe 9 Prct. größer als das des ersteren Körpers von gleichem Widerstande.

Soll der Körper kreisförmige Querschnitte erhalten, wie Fig. 272, I., so hat man für den veränderlichen Durchmesser $\overline{OO} = z$ desselben die Gleichung $\frac{z^3}{d^3} = \frac{x}{l}$, und $P = \frac{\pi d^3}{l} \cdot \frac{T}{32}$, wenn d den Durchmesser BB am festen Ende bezeichnet. Bei Anwendung eines abgekürzten Kegels ABB, Fig. 272, II., mache man den Durchmesser am freien Ende: $\overline{DD} = d_0 = 0{,}5291\,d$, und den am festen Ende: $\overline{BB} = d_1 = 1{,}0583\,d$.

Wird der Balken von Q gleichmäßig belastet, so ist

$S = \frac{Qx^2 e}{l\,W}$, daher $\frac{W}{e\,x^2}$ constant zu machen, also bei rectangulären Querschnitten: $\frac{u\,v^2}{x^2} = \frac{b\,h^2}{l^2}$ zu setzen. Erhält der Körper eine constante Breite $u = b$, so hat man $\frac{v}{x} = \frac{h}{l}$, und es bildet der Körper einen Keil mit horizontaler Schneide.

Liegt der Balken AA, Fig. 273, I., von constanter Breite

Fig. 272.

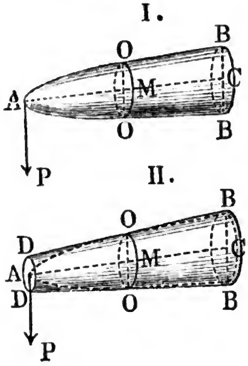
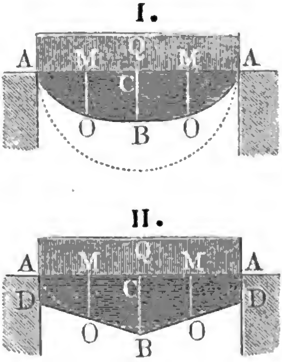


Fig. 273.



b und mit gleichförmig vertheilter Last Q an beiden Enden frei auf, so bestimmt sich die mittlere Höhe $BC = h$ durch die Formel

$$Q = \frac{8\,b\,h^2}{l} \cdot \frac{T}{6},$$

und es ist $\frac{v^2}{h^2} = 1 - \left(\frac{2\,x}{l}\right)^2$, wenn v die Höhe MO des Balkens im Abstande $CM = x$ vom Mittelpunkte desselben bezeichnet.

Soll der Körper statt der elliptischen Begrenzung ABA zwei ebene Begrenzungsflächen erhalten, wie Fig. 273, II., so hat man die Höhe an den Enden

$$AD = h_0 = h\,\sqrt{1/_3} = 0{,}5774\,h$$

und die Höhe in der Mitte

$$BC = h_1 = 2h\,\sqrt{1/_3} = 1{,}1548\,h$$

zu machen. Das Volumen des Balkens fällt dann um $10^1/_4$ Procent größer aus als bei dem elliptischen Balken.

§. 26. Tragkraft der Säulen. Die Tragkraft der Standsäulen durch die einfache Formel $P = FT$ zu bestimmen, ist nur dann zulässig, wenn diese Säulen eine kleine Länge haben, welche die kleinste Dicke derselben nicht vielfach übertrifft; für längere Säulen, welche sich bei der geringsten excentrischen Wirkung der Kraft biegen; setzt man gewöhnlich

$$P = \frac{FT}{1 + \mu\left(\frac{l}{h}\right)^2},$$

wo μ eine Erfahrungszahl, l die Länge und h die kleinste Dicke der Säule bezeichnet.

Für Holz ist $\mu = \frac{1}{250} = 0{,}004$, für Gußeisen ist $\mu = \frac{1}{400} = 0{,}0025$, für Schmiedeeisen dagegen $\mu = \frac{1}{3000} = 0{,}000333$ anzunehmen; führt man für Holz $T = 650$, für Gußeisen $T = 9000$ und für Schmiedeeisen $T = 8000$ Pfund ein, so erhält man hiernach pr. Quadratzoll Querschnitt:

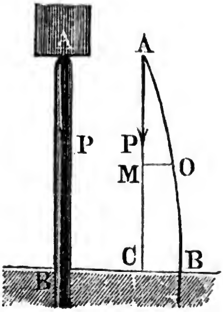
für $\frac{l}{d} =$	0	10	20	30	40	50
die Tragkraft bei Holzsäulen	6,5	4,64	2,50	1,41	0,88	0,59 Ctr.
bei Säulen von Gußeisen . .	90	72,0	45,0	27,7	18,0	12,4 »
bei Säulen von Schmiedeeisen	80	77,4	70,6	61,5	52,2	43,6 »

Die theoretische Entwickelung giebt für die Kraft, welche die an einem Ende B festgehaltene prismatische Säule AB, Fig. 274 I,. II., biegt und zerknickt:

$$P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 WE.$$

Fig. 274.

I. II.



Bildet die Säule einen massiven Cylinder, so hat man

$$P = \frac{\pi^3}{256}\frac{d^4 E}{l^2} = 0{,}1211 \frac{d^4 E}{l^2},$$

und bildet dieselbe einen hohlen Cylinder, dessen Durchmesser d und d_1 sind, so gilt die Formel

$$P = \frac{\pi^3}{256}\frac{(d^4 - d_1^4) E}{l^2}$$
$$= 0{,}1211 \frac{(d^4 - d_1^4) E}{l^2}.$$

Für eine parallelepipedische Säule, deren Querschnittsdimensionen b und h sind hat man, wenn $h < b$ ist,

$$P = \frac{\pi^2}{48}\frac{bh^3}{l^2}E = 0{,}2056 \frac{bh^3}{l^2}E.$$

Es wächst also die Tragkraft dieser Säulen umgekehrt wie das Quadrat der Länge (l) und direct wie die Breite (b), sowie auch wie der Cubus der Dicke (d) derselben.

Ist die Säule *ABD*, Fig. 275 I., II., III., an beiden Enden drehbar, wie z. B. die Kurbelstange eines Krummzapfenmechanismus, so hat man in den vorstehenden Formeln statt l, $\frac{1}{2}\,l$ einzusetzen, und es fällt daher die Tragkraft P viermal so groß aus, als im ersten Falle von Fig. 274.

Wird endlich die Säule an beiden Enden festgehalten, wie z. B. Fig. 276 I., III. darstellt, so ist die Tragkraft nahe zwölfmal so groß, als im ersten Falle.

Unter der Voraussetzung, daß die Säule einen Körper von

Fig. 275.

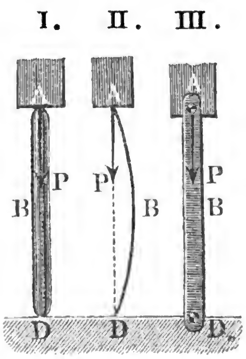
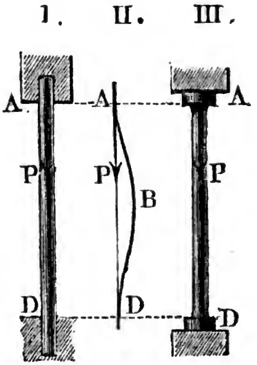


Fig. 276.



gleichem Widerstande bilde, wobei sie im ersten Falle vom festen Ende nach dem freien Ende, und im zweiten Falle von der Mitte nach beiden Enden zu allmälig an Dicke abnimmt, hat man, wenn der größte Querschnitt derselben gleich ist dem Querschnitte der prismatischen Säule, die Tragkraft Dreiviertel von der der letzteren, also z. B. für eine cylindrische Säule

$$P = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^3}{256} \, \frac{d^4 E}{l^2} = 0{,}0908 \, \frac{d^4 E}{l^2} \text{ zu setzen.}$$

Für das freie Ende der Säule ist $P = F_1 T = \frac{\pi d_1^2}{4} T$, wobei F_1 den Querschnitt, oder d_1 den Durchmesser an dieser Stelle bezeichnet. Wenn nun $d_1 = \sqrt{\frac{4P}{\pi T}} = 1{,}128 \sqrt{\frac{P}{T}}$ kleiner ausfällt als $d = \sqrt[4]{\frac{4}{3} \, \frac{256\, P l^2}{\pi^3 E}} = 1{,}822 \sqrt[4]{\frac{P l^2}{E}}$, so soll die Stärke der Säule allmälig von d auf d_1 abnehmen; außerdem ist dagegen der Säule durchgängig die Stärke d_1 zu geben.

Die Ergebnisse der Versuche von Hodgkinson über das Zerknicken von prismatischen Säulen, welche an beiden Enden festgehalten werden, enthält folgende Tabelle.

Die Querschnittsdimensionen sind in Zollen, die Längen in Fußen zu geben.

Form und Stoff der Säulen	Gußeiserne Säulen mit kreisförmigem Querschnitte $F = \frac{\pi d^2}{4}$	Schmiedeeiserne Säulen mit kreisförmigem Querschnitte $F = \frac{\pi d^2}{4}$	Hölzerne Säule mit quadratischem Querschnitte, $F = h^2$	
			aus trockener Eiche	aus trockener Fichte
Tragkraft P in Zoll-od. Neupfd.	$94700 \frac{d^{3,55}}{l^{1,7}}$	$284400 \frac{d^{3,55}}{l^2}$	$23570 \frac{h^4}{l^2}$	$16840 \frac{h^4}{l^2}$

Bei sechsfacher Sicherheit läßt sich hiernach für gußeiserne Säulen, wenn man d und l in Zollen giebt,

$$P = 10800 \frac{d^{3,55}}{l^{1,7}} \text{ Centner, und}$$

$$d = 0{,}0731 \, (P l^{1,7})^{\frac{1}{3,55}} \text{ Zoll,}$$

ferner für schmiedeeiserne Säulen

$$P = 68300 \frac{d^{3,55}}{l^2} \text{ Centner, und}$$

$$d = 0{,}0435 \, (P l^2)^{\frac{1}{3,55}} \text{ Zoll,}$$

dagegen bei zehnfacher Sicherheit, für Säulen aus Eichenholz

$$P = 3394 \left(\frac{h}{l}\right)^2 F = 3394 \frac{h^4}{l^2} = 5762 \frac{d^4}{l^2} \text{ Centner und}$$

$$h = 0{,}131 \, (P l^2)^{1/4} \text{ sowie } d = 0{,}115 \, (P l^2)^{1/4} \text{ Zoll,}$$

sowie für Säulen aus Fichtenholz dagegen

$$P = 2425 \cdot \frac{h^4}{l^2} = 4117 \frac{d^4}{l^2} \text{ Centner, und}$$

$$h = 0{,}1425 \, (P l^2)^{1/4} \text{ sowie } d = 0{,}125 \, (P l^2)^{1/4} \text{ Zoll setzen.}$$

Ist bei guß- und schmiedeeisernen Säulen $\frac{l}{d} < 20$, und bei hölzernen Säulen $\frac{l}{d} < 30$, so hat man statt der obigen Formeln die einfachere Formel $P = FT$ in Anwendung zu bringen.

Steht die Säule an beiden Enden frei auf, so hat man P dreimal so klein anzunehmen, und ist sie an einem Ende frei und am anderen fest, muß man P zwölfmal so klein annehmen, als in den vorstehenden Formeln.

Beispiel. Wenn eine gußeiserne Säule von 25 Fuß Länge eine Last von 50 Centner tragen soll, so ist die nöthige Stärke derselben:

$$d = 0{,}0731 \, . \, (50 \, . \, 300^{1,7})^{0,2817} = 3{,}38 \text{ Zoll.}$$

Eine Fichtenholzsäule von gleicher Länge müßte die Stärke

$$d = 0{,}1425 \, . \sqrt[4]{50} \, . \sqrt{300} = 6{,}56 \text{ Zoll erhalten.}$$

§. 27. Torsionsfestigkeit. Der einfachste Fall der Torsion oder Drehungsfestigkeit findet dann statt, wenn ein Körper ABC, Fig. 277, an einem Ende B festgehalten und am anderen Ende A von einem Kräftepaare $(P, -P)$ ergriffen wird. Ist Pa das Moment des Kräftepaares, α^0 der entsprechende Torsionswinkel ACO, l die Länge AB des Körpers, und W das Maaß des Torsionsmomentes, und zwar $= F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + F_3 z_3^2 + \cdots$, wenn $F_1, F_2, F_3 \ldots$ die Elemente des Querschnittes AA, sowie $z_1, z_2, z_3 \ldots$ die Entfernungen derselben von dem Mittelpunkte C des ersteren bezeichnen (s. §. 20, S. 374), so hat man

$$Pa = \frac{\alpha W E}{2l}.$$

Ist der Querschnitt ein Kreis vom Durchmesser d, so hat man

$$W = \frac{\pi d^4}{32}, \text{ daher } Pa = \frac{\alpha \pi d^4 E}{64 l}.$$

Für einen rectangulären Querschnitt, dessen Seiten b und h sind, ist dagegen

$$W = \frac{bh(b^2 + h^2)}{12},$$

daher

$$Pa = \frac{\alpha bh(b^2 + h^2)E}{24 l}.$$

Diese Formeln finden vorzüglich bei Wellen wie z. B. AB, Fig. 278, ihre Anwendung. Wirkt die Kraft P am Hebelarme

Fig. 277.

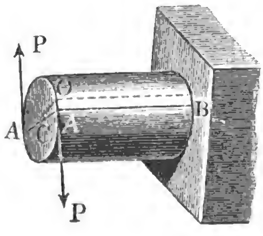
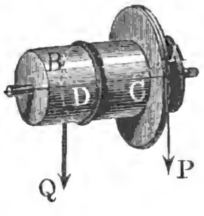


Fig. 278.



$CA = a$ und die Last Q am Hebelarme $DB = r$, so gilt die Formel

$$Pa = Qr = \frac{\alpha W E}{2l}.$$

Für Körper mit kreisförmigen Querschnitten ist

$$Pa = 0{,}03687\,\alpha \frac{d^4 E}{l} = 0{,}0006436\,\alpha^0 \frac{d^4 E}{l},$$

und für solche mit quadratischen Querschnitten:

$$Pa = 0{,}0526\,\alpha \frac{b^4 E}{l} = 0{,}0009180\,\alpha^0 \frac{b^4 E}{l} \text{ zu setzen.}$$

Hiernach ist für Wellen	aus Gußeisen	aus Stahl= oder Schmiedeeisen
mit kreisrundem Querschnitte .	$Pa = 8830 \frac{\alpha^0 d^4}{l}$	$Pa = 18220 \frac{\alpha^0 d^4}{l}$
mit quadratischem Querschnitte .	$Pa = 12200 \frac{\alpha^0 b^4}{l}$	$Pa = 25700 \frac{\alpha^0 b^4}{l}$

ferner für Wellen	aus Messing	aus Holz
mit kreisrundem Querschnitte .	$Pa = 14500 \frac{\alpha^0 d^4}{l}$	$Pa = 883 \frac{\alpha^0 d^4}{l}$
mit quadratischem Querschnitte .	$Pa = 20600 \frac{\alpha^0 b^4}{l}$	$Pa = 1310 \frac{\alpha^0 b^4}{l}$

Das Kraftmoment zum Abwürgen einer Welle ist durch die Formel

$$Pa = \frac{W}{e}\sqrt{\frac{TE}{2}} \text{ bestimmt.}$$

Für eine massive cylindrische Welle ist $e = \frac{d}{2}$, und

$$Pa = \frac{\pi d^3}{16}\sqrt{\frac{TE}{2}};$$

für eine hohle cylindrische Welle mit den Halbmessern r und r_1:

$$Pa = \frac{\pi (d^4 - d_1^4)}{16\, d}\sqrt{\frac{TE}{2}},$$

und für einen Schaft mit quadratischem Querschnitte, wo $e = b\sqrt{1/2}$ ist, hat man

$$Pa = \frac{b^3}{6}\sqrt{TE}.$$

Nimmt man sechzehnfache Sicherheiten, so kann man setzen für Gußeisen:

$$Pa = 368\, d^3 = 443\, b^3 \text{ Zollpfund,}$$

also umgekehrt:

$$d = 0{,}1396 \sqrt[3]{Pa} \text{ und}$$
$$b = 0{,}1312 \sqrt[3]{Pa} \text{ Zoll;}$$

ferner für Schmiedeeisen und Stahl:

$$Pa = 1076\, d^3 = 1291\, b^3 \text{ Zollpfund,}$$

daher umgekehrt:

$$d = 0{,}0976 \sqrt[3]{Pa} \text{ und}$$
$$b = 0{,}0918 \sqrt[3]{Pa} \text{ Zoll,}$$

und für Holz

$$Pa = 75{,}6\, d^3 = 90{,}8\, b^3 \text{ Zollpfund,}$$

daher umgekehrt:

$$d = 0{,}237 \sqrt[3]{Pa} \text{ und}$$
$$b = 0{,}222 \sqrt[3]{Pa} \text{ Zoll.}$$

Die Coefficienten in diesen Formeln gelten nur für ruhende oder ganz langsam umlaufende Wellen; schnell umlaufenden Wellen giebt man doppelte bis vierfache Sicherheit; und Wellen, welche sehr rasch umlaufen und Stöße auszuhalten haben, erhalten sogar die achtfache Sicherheit oder die doppelte Stärke.

Beispiel. Wenn die Last Q der Radwelle in Fig. 278 30 Centner beträgt und an einem Hebelarme $DB = r = 4{,}5$ Fuß $= 54$ Zoll wirkt, so ist die erforderliche Stärke der Welle bei ganz langsamer Umdrehung, wofern dieselbe aus Holz besteht:

$$d = 0{,}237 \sqrt[3]{3000 \,.\, 54} = 12{,}90 \text{ Zoll;}$$

folglich, wenn man eine schnelle Umdrehungsbewegung voraussetzt:

$$d = 12{,}90 \sqrt[3]{4} = 20 \text{ Zoll.}$$

Hat diese Welle eine Länge von 10 Fuß, so ist die Torsion derselben:

$$\alpha^0 = \frac{Pal}{883\, d^4} = \frac{Qbl}{883 \,.\, d^4} = \frac{3000 \,.\, 54 \,.\, 120}{883 \,.\, 20^4} = 0{,}138^0$$
$$= 8 \text{ Minuten.}$$

§. 28. Zusammengesetzte Festigkeit.

1) Wenn die Zug- oder Druckkraft **nicht in der Axe** der Säule AB, Fig. 279 und Fig. 280, sondern nur parallel mit

Fig. 279.

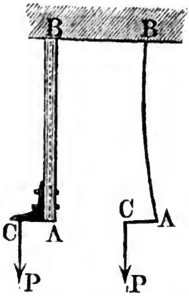
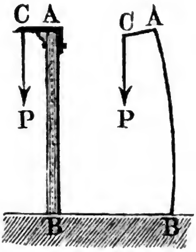


Fig. 280.



derselben wirkt, so ist die Tragkraft derselben:

$$P = \frac{FT}{1 + \frac{Fce}{W}},$$

wobei F, W, T und e die bekannten Bedeutungen haben und

c den Abstand CA der Kraft P von der Axe des Körpers bezeichnet.

Ist die Säule cylindrisch und d der Durchmesser derselben, so hat man

$$P = \frac{FT}{1 + \frac{8c}{d}} = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{T}{1 + \frac{8c}{d}};$$

ist sie parallelepipedisch und hat die Querschnittsdimensionen b und h, wobei h in die Richtung von c fällt, so nimmt der obige Ausdruck die Form

$$P = \frac{FT}{1 + \frac{6c}{h}} = \frac{bhT}{1 + \frac{6c}{h}} \text{ an.}$$

Wirkt die Kraft am Umfange des Körpers, so ist entweder $c = \frac{d}{2}$ oder $c = \frac{h}{2}$; daher im ersten Falle

$P = \frac{1}{5} FT$, im zweiten $P = \frac{1}{4} FT$.

2) Wirkt eine Kraft P schräg gegen die neutrale Axe des Körpers AB, Fig. 281 I. und II., so ist die Größe derselben durch den Ausdruck

$$P = \frac{FT}{\cos.\delta + \frac{Fle}{W} \sin.\delta}$$

zu bestimmen, in welchem δ den Winkel PAR bezeichnet, welchen die Kraftrichtung mit der Axe BA einschließt.

Hiernach ist

$$F = \frac{P}{T}\left(\cos.\delta + \frac{Fle}{W} \sin.\delta\right),$$

oder allgemeiner, wenn man für die Biegungsfestigkeit einen anderen Tragmodul T_1 annimmt als für die Zug- oder Druckfestigkeit:

$$F = P\left(\frac{\cos.\delta}{T} + \frac{Fle}{WT_1} \sin.\delta\right).$$

Diese Formel findet auch ihre Anwendung bei Untersuchung der Tragfähigkeit beliebig gestalteter Körper, z. B. AOB, Fig. 282, wobei man statt F nicht bloß den Querschnitt an

Fig. 281.

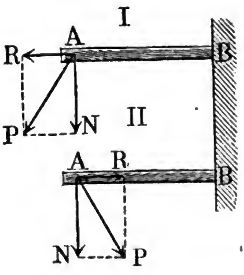
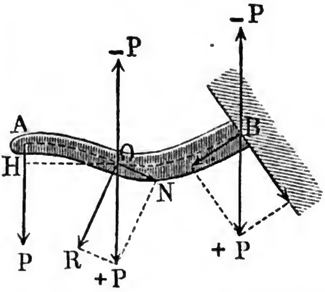


Fig. 282.



der festen Stelle B, sondern auch den Querschnitt an jeder anderen Stelle O einsetzen kann. Es ist hier die äußerste Faser O von zwei Kräften

$$S = \frac{Pxe}{W} \text{ und } N = \frac{P\cos.\delta}{F}$$

gespannt, wobei x den Normalabstand OH des Schwerpunktes O von der Kraftrichtung, und δ den Neigungswinkel der letzteren gegen die Normale ON des Querschnittes durch O bezeichnet. Daher folgt

$$T = S + N = P\left(\frac{ex}{W} + \frac{\cos.\delta}{F}\right) \text{ oder}$$

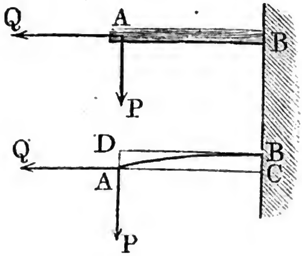
$$P = \frac{T}{\frac{ex}{W} + \frac{\cos.\delta}{F}} = \frac{FT}{\frac{Fex}{W} + \cos.\delta}, \text{ sowie}$$

$$F = \frac{P}{T}\left(\frac{Fex}{W} + \cos.\delta\right), \text{ oder allgemeiner,}$$

$$F = P\left(\frac{Fex}{WT_1} + \frac{\cos.\delta}{T}\right).$$

8) Wird ein Balken AB, Fig. 283, außer der Biegungskraft P, noch von einer Zugkraft Q ergriffen, so ist zu setzen:

Fig. 283.



$$Pl - Qa = \frac{P}{q} \cdot \frac{\varepsilon^{ql} - \varepsilon^{-ql}}{\varepsilon^{ql} + \varepsilon^{-ql}},$$

und

$$T = \frac{Q}{F} + \left(\frac{Pl - Qa}{W}\right)e,$$

wenn a die Bogenhöhe BC,

$$q = \sqrt{\frac{Q}{WE}}, \text{ und}$$

$\varepsilon = 2{,}71828\ldots$, die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet.

Ist $\frac{Q}{P}$ klein, so kann man

$$Pl - Qa = Pl\left(1 - \frac{Ql^2}{3WE}\right)$$

und daher

$$P = \left(1 - \frac{Q}{FT}\right)\left(1 + \frac{Ql^2}{3WE}\right)\frac{WT}{le},$$

ist dagegen $\frac{Q}{P}$ groß, so läßt sich

$$Pl - Qa = P\sqrt{\frac{WE}{Q}} \text{ und}$$

$$P = \left(1 - \frac{Q}{FT}\right)\sqrt{\frac{QW}{E}} \cdot \frac{T}{e} \text{ setzen.}$$

Im letzteren Falle ist P ein Maximum für $Q = \frac{FT}{3}$, und zwar

$$P = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{FWT}{3E}} \cdot \frac{T}{e}.$$

Für einen parallelepipedischen Balken, wo $F = bh$ und $W = \frac{bh^3}{12}$ ist, folgt daher

$$P = \frac{2}{9}\, b\, h \sqrt{\frac{T}{E}} \cdot T = \frac{2}{9}\, b\, h\, T \sqrt{\sigma}$$

Z. B. für Holz, wo nach der Tabelle I. auf Seite 369, $\sigma = \frac{1}{600}$ ist:

$$P = 0{,}009071\, b\, h\, T.$$

Ohne die Spannkraft Q wäre die Tragkraft: $P_0 = \frac{bh^2}{l} \cdot \frac{T}{6}$, folglich ist $\frac{P}{P_0} = 0{,}0544\, \frac{l}{h}$.

Wäre z. B. $\frac{l}{h} = 40$, so würde der mit der Zugkraft $Q = \frac{FT}{3}$ gespannte Balken $0{,}0544 \,.\, 40 = 2{,}176$ mal so viel tragen als der ungespannte.

4) Wird die Säule oder Welle BC, Fig. 284, von einem Umdrehungskräftepaare $(P, -P)$ und einer Zugkraft Q ergriffen, so ist die größte Spannung derselben:

$$S = T = \frac{Q}{F} + \frac{2}{E}\left(\frac{Pae}{W}\right)^2.$$

Für eine cylindrische Welle ist dann

$$F = \frac{Q}{T} + 4\pi \left(\frac{Pa}{FT_1}\right)^2,$$

und für eine vierkantige Welle mit quadratischer Basis:

$$F = \frac{Q}{T} + 18 \left(\frac{Pa}{FT_1}\right)^2,$$

wobei T den Tragmodul der Zug- und T_1 den der Torsionsfestigkeit bezeichnet.

5) Wird ein an dem Ende B befestigter Balken AB, Fig. 285, von einem Kräftepaare $(P, -P)$ und einer Biegungskraft Q ergriffen, so ist die größte Spannung desselben:

Fig. 284.

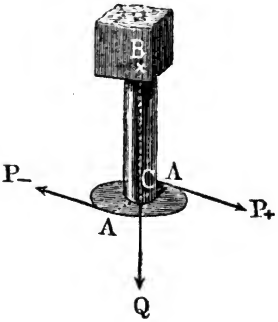
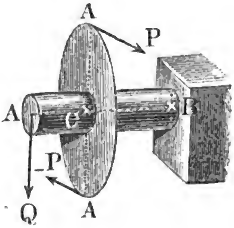


Fig. 285.



$$S = T = \frac{2}{E}\left(\frac{P a e_1}{W_1}\right)^2 + \frac{Q l e}{W},$$

und daher folgt für einen kreisförmigen Querschnitt, wo $F = \frac{\pi d^2}{4}$, $W_1 = 2W = \frac{\pi d^4}{32}$ und $e_1 = e = \frac{d}{2}$, der erforderliche Querschnitt:

$$F = 4\pi\left(\frac{Pa}{FT_1}\right)^2 + \frac{8Ql}{Td},$$

dagegen für einen quadratischen Querschnitt, wo $F = b^2$, $W_1 = 2W = \frac{b^4}{6}$ und $e_1 = e\sqrt{2} = b\sqrt{1/2}$ ist,

$$F = 18\left(\frac{Pa}{FT_1}\right)^2 + \frac{6Ql}{Tb}.$$

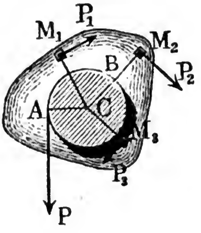
Wenn anstatt eines Kräftepaares $(P, -P)$ nur eine Torsionskraft P mit dem Momente Pa auf einen Balken oder eine Welle wirkt, so ist dieselbe in ein Paar $(P, -P)$ und eine Biegungskraft P zu zerlegen, und es muß daher auch dann der Körper durch zusammengesetzte Festigkeit widerstehen.

Viertes Kapitel.

---

§. 29. Umdrehungsbewegung. Ist die Winkelgeschwindigkeit eines sich um eine feste Axe C drehenden Körpers AB, Fig. 286, d. i. seine Geschwindigkeit ω im Abstande Eins von der Axe gegeben, so hat man die Geschwindigkeiten seiner Elemente $M_1, M_2 \cdots$, welche um $z_1, z_2 \cdots$ von der Axe entfernt sind: $v_1 = \omega z_1, v_2 = \omega z_2$ u. s. w.; und ist $\varkappa$ die Winkelacceleration, d. i. die Acceleration von ε, so hat man die Accelerationen dieser Elemente:

Fig. 286.



$$p_1 = \varkappa z_1,\ p_2 = \varkappa z_2$$

u. s. w., und die entsprechenden Trägheitskräfte:

$$P_1 = M_1 p_1 = \varkappa M_1 z_1,$$
$$P_2 = M_2 p_2 = \varkappa M_2 z_2$$

u. s. w., sowie die Momente derselben:

$$P_1 z_1 = \varkappa M_1 z_1^2,\ P_2 z_2 = \varkappa M_2 z_2^2 \text{ u. s. w.}$$

Wirkt die Umdrehungskraft P am Hebelarm $CA = a$, so ist folglich das Moment zur Erzeugung der Winkelacceleration $\varkappa$:

$$Pa = P_1 z_1 + P_2 z_2 + \cdots = \varkappa(M_1 z_1^2 + M_2 z_2^2 + \cdots) = \varkappa M k^2,$$

wo $Mk^2 = M_1 z_1^2 + M_2 z_2^2 + \cdots$ das Trägheitsmoment T des Körpers in Hinsicht auf die Umdrehungsaxe C bezeichnet. Auch hat man die mechanische Arbeit, welche zur Erzeugung der Winkelgeschwindigkeit ω nöthig ist:

$$A = \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 + \cdots = \frac{1}{2} \omega^2 M k^2.$$

Die auf irgend eine Entfernung $CB = b$ reducirte träge Umdrehungsmasse des Körpers ist $= \frac{Mk^2}{b^2}$

Der Trägheitshalbmesser, in dessen Endpunkt die ganze träge Masse vereinigt gedacht werden kann, ist

$$k = \sqrt{\frac{T}{M}}.$$

Ist $T = Mk^2$ das Trägheitsmoment eines Körpers in Hinsicht auf eine Schwerlinie oder durch den Schwerpunkt gehende Axe des Körpers und $T_1 = Mk_1^2$ das Trägheitsmoment desselben in Hinsicht auf eine Axe, welche im Abstande d mit der ersteren parallel läuft, so hat man

$$T_1 = T + Md^2 \text{ oder } k_1^2 = k^2 + d^2.$$

Jedenfalls ist $k^2 < k_1^2$ und daher auch das Trägheitsmoment in Hinsicht auf die Schwerlinie kleiner, als das in Hinsicht auf eine andere mit dieser Linie parallel laufende Axe.

Das Trägheitsmoment einer geraden Stange AA, Fig. 287, in Hinsicht auf eine Axe XX durch ihren Schwerpunkt S ist: $T = \frac{1}{3} Ma^2$, wobei M die Masse derselben

Fig. 287.

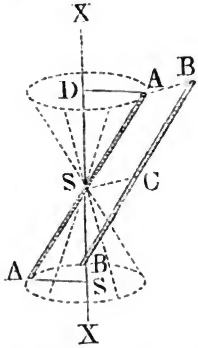
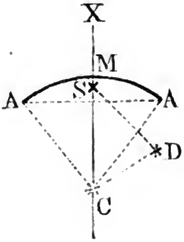


Fig. 288.



und a den Abstand AD ihres Endpunktes A von der Axe bezeichnet. Steht der Schwerpunkt C der Stange BB um $CS = d$ von der Umdrehungsaxe XX ab, so ist das Trägheitsmoment derselben:

$$T_1 = M(\frac{1}{3} a^2 + d^2).$$

Dreht sich ein Kreisbogen AA, Fig. 288, um eine Axe CX durch das Centrum C und die Mitte M, so ist das Trägheitsmoment desselben:

$$T = \frac{1}{2} M r^2 \left(1 - \frac{sin.\, 2\beta}{2\beta}\right),$$

wenn r den Halbmesser $CA = CM$, und β den halben Centriwinkel ACM bezeichnet.

Für den Vollkreis ist $T = \frac{1}{2} M r^2$.

Dreht sich der Bogen AA in seiner Ebene um das Centrum C, so ist das Trägheitsmoment desselben: $T_1 = Mr^2$, dagegen das in Hinsicht auf den Schwerpunkt S

$$T = Mr^2 \left[1 - \left(\frac{sin.\,\beta}{\beta}\right)^2\right],$$

und das in Hinsicht auf einen Punkt D, welcher um $SD = d$ vom Schwerpunkte S absteht:

$$T_2 = M\left(r^2\left[1 - \left(\frac{sin.\,\beta}{\beta}\right)^2\right] + d^2\right).$$

Für ein rectanguläres Blech $ABBA$, Fig. 289, ist in Hinsicht auf die Axe XX, welche durch den Schwerpunkt S desselben geht und mit der Seite $AB = h$ parallel läuft:

$$T = \frac{1}{3} M \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} M b^2,$$

wobei b die Breite $AA = BB$ bezeichnet.

In Hinsicht auf eine rechtwinkelig gegen die Fläche stehende Axe durch S ist:

$$T = \frac{1}{3} M \left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{12} M (b^2 + h^2) = \frac{1}{12} M c^2$$
$$= \frac{1}{3} M \left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

wo dann c die Diagonale des Parallelogramms bezeichnet. Letztere Formel gilt natürlich auch für ein Parallelepiped, welches das Rechteck $ABBA$ zur Grundfläche hat und sich um die Axe durch S umdreht.

Fig. 289.

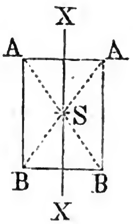
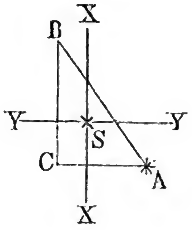


Fig. 290.



Für ein Blech oder eine dünne Platte in Form eines rechtwinkeligen Dreieckes ABC, Fig. 290, ist, wenn a und b die Katheten CB und CA desselben bezeichnen, in Hinsicht auf die Axen XX und YY, welche durch den Schwerpunkt S desselben und parallel mit den Katheten CB und CA laufen:

$$T_1 = \frac{Mb^2}{18} \text{ und } T_2 = \frac{Ma^2}{18}.$$

Dreht sich das Dreieck oder das Prisma mit dreiseitiger Basis ABC um die Axe S, welche rechtwinkelig auf der Ebene ABC steht, so ist:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{M(a^2 + b^2)}{18} = \frac{Mc^2}{18},$$

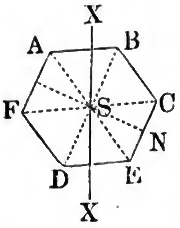
wenn c die Hypotenuse des Dreieckes ABC bezeichnet.

Für eine Axe durch A ist

$$T = \frac{M}{2}\left(b^2 + \frac{a^2}{3}\right) = \frac{M}{3}\,(b^2 + \tfrac{1}{2}\,c^2).$$

Dreht sich ein regelmäßiges Polygon, Fig. 291, um eine Schwerlinie XX, so ist für dasselbe

Fig. 291.



$$T = \frac{M}{4}\left(r^2 - \frac{s^2}{6}\right);$$

dreht es sich dagegen um eine Schwerlinie S, welche winkelrecht auf der Fläche steht, so ist für dasselbe:

$$T = \tfrac{1}{3}\,M\left(\frac{r^2}{2} + h^2\right),$$

wobei r den Halbmesser $SA = SB$, s die Seitenlänge $AB = BC$ und h die Dreieckshöhe SN bezeichnet. Diese Formel gilt auch für ein Prisma mit der Grundfläche ACD, wenn sich dasselbe um seine geometrische Axe dreht.

Für einen geraden Cylinder AB, Fig. 292, welcher sich um seine geometrische Axe XX dreht, ist $T = \tfrac{1}{2}\,Mr^2$,

Fig. 292.

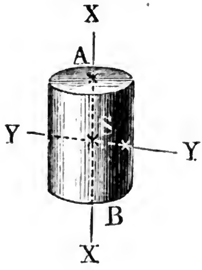
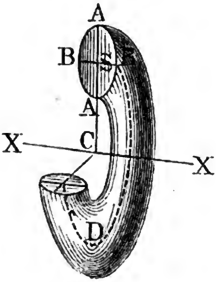


Fig. 293.



und für einen hohlen Cylinder, z. B. eine Röhre, einen Reifen u. s. w.:

$$T = \tfrac{1}{2}\,M\,(r_1^2 + r_2^2) = M\left(r^2 + \frac{b^2}{4}\right),$$

wenn r_1 und r_2 die äußeren und inneren Halbmesser, so wie $r = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$ den mittleren Halbmesser, und $b = r_1 - r_2$, die Wanddicke bezeichnen.

In Hinsicht auf eine Axe YY, welche rechtwinkelig zur geometrischen Axe steht, ist für den massiven Cylinder AB,

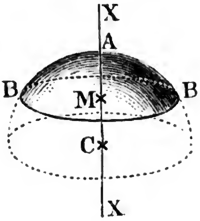
(Fig. 292), $T_1 = M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right)$, wo l die Länge des Cylinders bezeichnet.

Für einen Kreisring mit elliptischem Querschnitte $ABBA$, Fig. 293, welcher sich um seine geometrische Axe XX dreht, ist

$$T = M(r^2 + \tfrac{3}{4} a^2),$$

wobei r die Entfernung CS des Mittelpunktes S von der Axe XX und a die Halbaxe SA des elliptischen Querschnitts bezeichnet.

Fig. 294.



Das Trägheitsmoment eines Kugelsegmentes BAB, Fig. 294, welches sich um seine geometrische Axe XX dreht, ist:

$$T = \tfrac{2}{3} Mh\left(r - \frac{5}{12} h + \frac{1}{90} \frac{h^2}{r - \tfrac{1}{3} h}\right),$$

wobei r den Halbmesser CA und h die Höhe MA desselben angiebt.

Für die Vollkugel ist:

$$T = \tfrac{2}{5} Mr^2.$$

Für einen parabolischen Balancier oder Waagbalken, Fig. 295, hat man:

$$T = \tfrac{1}{5} M\left[\tfrac{8}{7} l^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2\right],$$

wenn l die halbe Länge SA und h die Höhe BB dieses prismatischen Körpers mit horizontaler Drehungsaxe XX bezeichnet.

Fig. 295.

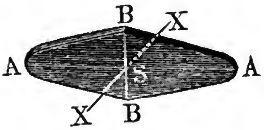
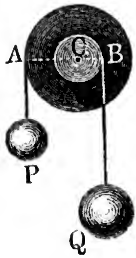


Fig. 296.



Wenn an einer Radwelle ACB, Fig. 296, die Gewichte P und Q mittels der Hebelarme $CA = a$ und $CB = b$ wirken und das Trägheitsmoment dieser Maschine $Mk^2 = \frac{Gk^2}{g}$ ist, so hat man die Beschleunigung, mit welcher P sinkt:

$$p = \frac{Pa - Qb}{Pa^2 + Qb^2 + Gk^2} \cdot ga,$$

und die, mit welcher Q steigt:

$$q = \frac{Pa - Qb}{Pa^2 + Qb^2 + Gk^2} \cdot gb,$$

ferner die Spannung des Seiles von P, $S = P\left(1 - \frac{p}{g}\right)$ und die des Seiles von Q, $S_1 = Q\left(1 + \frac{q}{g}\right)$.

Beispiel. Das Rad einer Radwelle hat den Halbmesser $a = 10$ Zoll und das Gewicht $G_1 = 16$ Pfund, die Welle derselben hat den Halbmesser $b = 3$ Zoll und das Gewicht $G_2 = 12$ Pfund; wenn nun an ersteres ein Gewicht $P = 30$ Pfund und an letztere ein Gewicht $Q = 80$ Pfund angehangen wird, welche Bewegung wird die Radwelle annehmen? Es ist die bewegende Kraft $= P - \frac{b}{a} Q = 30 - {}^3\!/_{10} \cdot 80 = 6$ Pfund, und es sind die auf den Kraftpunkt reducirten Massen:

$\frac{P}{g} = \frac{30}{g}$, ferner $\frac{{}^1\!/_2 G_1}{g} = \frac{8}{g}$, $\frac{b^2}{a^2} \frac{Q}{g} = \frac{9}{100} \cdot \frac{80}{g} = \frac{7{,}2}{g}$ und $\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{G_2}{2g} = \frac{9}{100} \cdot \frac{6}{g} = \frac{0{,}54}{g}$ Pfund; daher folgt die Beschleunigung des Kraftpunktes oder des sinkenden Gewichtes P:

$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \frac{6\,g}{30 + 8 + 7{,}2 + 0{,}54} = \frac{6\,g}{45{,}74} = \frac{6\,.\,31{,}25}{45{,}74} = 4{,}10$ Fuß. Dagegen die des Lastpunktes oder steigenden Gewichtes Q, $q = \frac{b}{a} p = 0{,}3\,.\,4{,}10 = 1{,}23$ Fuß. Dieselben Werthe geben auch die obigen Formeln für p und q, wenn man darin $Gk^2 = {}^1\!/_2\, G_1 a^2 + {}^1\!/_2\, G_2 b^2$ substituirt. Die Seilspannungen sind $S = (1 - 0{,}131)\,.\,30 = 26{,}07$ Pfd., und $S_1 = (1 + 0{,}0393)\,.\,80 = 83{,}144$ Pfd.

Nach 10 Sec. hat P die Geschwindigkeit $v = pt = 4{,}10\,.\,10 = 41$ Fuß, Q aber die Geschwindigkeit $w = 0{,}3\,.\,41 = 12{,}3$ Fuß erlangt, und letzteres ist um $s = {}^1\!/_2\, w\, t = {}^1\!/_2 \cdot 12{,}3 \cdot 10 = 61{,}5$ Fuß gestiegen.

§. 30. Centrifugalkraft. Die Centrifugalkraft eines in einer krummen Linie laufenden Körpers ist:

$P = \frac{v^2}{r} M = \frac{v^2}{gr} G$, wenn v die Geschwindigkeit, M die Masse, G das Gewicht des Körpers, und r den Krümmungshalbmesser seiner Bahn bezeichnet.

Auch ist $P : G = 2 \,.\, \frac{v^2}{2g} : r$, d. i. die Centrifugalkraft verhält sich zum Gewichte des Körpers, wie die doppelte Geschwindigkeitshöhe zum Krümmungshalbmesser der Bahn.

Ist ω die Winkelgeschwindigkeit, so hat man auch:

$$P = \omega^2 M r.$$

Bezeichnet t die Umdrehungszeit eines im Kreise umlaufenden Körpers, so gilt die Formel:

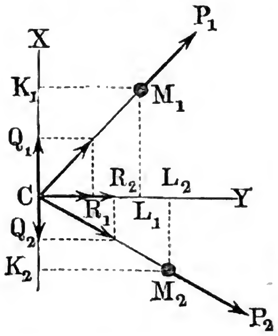
$$P = \frac{4\,\pi^2}{g\,t^2}\,G r = 1{,}2633\,\frac{G\,r}{t^2}.$$

Ist endlich u die Anzahl der Umdrehungen des Körpers pr. Minute, so folgt:

$$P = \frac{4\,\pi^2}{g}\left(\frac{u}{60}\right)^2 G r = 0{,}0003509\,u^2\,G r.$$

Die Centrifugalkräfte $P_1 = \omega^2 M_1 r_1$, $P_2 = \omega^2 M_2 r_2$ u. s. w. der Massentheile $M_1, M_2 \cdots$ eines Körpers, welche in einer zur Umdrehungsaxe C, Fig. 297, normal stehenden Ebene liegen, lassen sich nach den Axenrichtungen CX und CY in die Seitenkräfte:

Fig. 297.



$$Q_1 = \omega^2 M_1 x_1,$$
$$Q_2 = \omega^2 M_2 x_2 \cdots,$$
$$R_1 = \omega^2 M_1 y_1,$$
$$R_2 = \omega^2 M_2 y_2 \cdots$$

zerlegen, wobei $x_1, x_2 \cdots$ die Coordinaten CK_1, $CK_2 \cdots$, sowie y_1, $y_2 \cdots$ die Coordinaten CL_1, $C\,L_2 \cdots$ der Massentheile bezeichnen, deren Entfernungen von C, $CM_1 = r_1$, $C\,M_2 = r_2 \cdots$ sind. Es resultiren folglich aus sämmtlichen Centrifugalkräften die Kräfte

$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots = \omega^2(M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots)$$
$$= \omega^2\,x\,(M_1 + M_2 + \cdots) \text{ und}$$
$$R = R_1 + R_2 + \cdots = \omega^2\,(M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots)$$
$$= \omega^2\,y\,(M_1 + M_2 + \cdots),$$

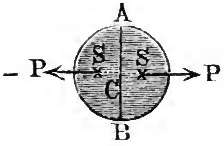
wenn x und y die Coordinaten des Schwerpunktes der Masse sind. Die Mittelkraft ist

$$P = \sqrt{Q^2 + R^2} = \omega^2 r\,(M_1 + M_2 + \cdots) = \omega^2\,M r,$$

wenn M die ganze Masse und r den Abstand des Schwerpunktes derselben von der Umdrehungsaxe C bezeichnet. Diese Formel ist bei Bestimmung der Centrifugalkraft von Platten und von geraden Prismen, deren Grundflächen rechtwinkelig stehen auf der geraden Umdrehungsaxe, in Anwendung zu bringen.

Die Centrifugalkräfte von den beiden Hälften eines sich um seine geometrische Axe drehenden Cylinders AB, Fig. 298, sind

Fig. 298.



$$P = \omega^2 M.\frac{4r}{3\pi} = \frac{2\,\omega^2}{3\,g}.r^3 h\gamma,$$

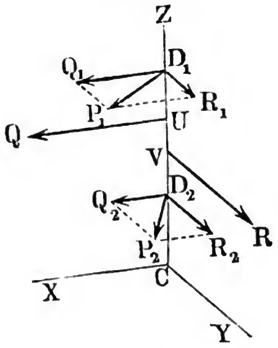
wenn r und h den Halbmesser und die Höhe, und γ die Dichtigkeit des Cylinders be-

zeichnen. Soll der Körper durch die Centrifugalkraft zerbersten, so hat man $2hrK = \frac{2\omega^2}{3g} r^3 h \gamma$, folglich:

$$\omega = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{3gK}{\gamma}} \text{ oder } u = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30}{\pi r}\sqrt{\frac{3gK}{\gamma}}.$$

Im Allgemeinen geben die Centrifugalkräfte $P_1, P_2 \cdots$ eines Körpers, welcher sich um eine Axe CZ, Fig. 299, dreht,

Fig 299.



zwei Systeme von Parallelkräften, nämlich

$$Q_1 = \omega^2 M_1 x_1,$$
$$Q_2 = \omega^2 M_2 x_2 \cdots,$$

in der Coordinatebene XZ und

$$R_1 = \omega^2 M_1 y_1,$$
$$R_2 = \omega^2 M_2 y_2 \cdots,$$

in der Coordinatebene YZ, welche sich auf die zwei Kräfte:

$$Q = \omega^2 (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots)$$

und

$$R = \omega^2 (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots)$$

zurückführen lassen, deren Momente

$$Qu = \omega^2 (M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots)$$

und

$$Rv = \omega^2 (M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots)$$

sind, wobei $z_1, z_2 \cdots$ die Abstände der Massentheile $M_1, M_2 \cdots$ von der Coordinatebene XY, sowie u und v die Abstände CU und CV der Kräfte Q und R von eben dieser Ebene bezeichnen.

Es folgen hiernach diese Abstände:

$$u = \frac{M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots}{M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots} \text{ und}$$

$$v = \frac{M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots}{M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots}.$$

Eine Vereinigung dieser Kräfte Q und R zu einer einzigen ist nur dann möglich, wenn $u = v$ ausfällt. Ist der Körper symmetrisch in Hinsicht auf eine Normalebene zur Umdrehungsaxe, so ist für je zwei Massentheile $M_2 = M_1$, $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ und $z_2 = -z_1$, daher $u = v = 0$, und es resultirt folglich eine Mittelkraft $P = \omega^2 Mr$.

Hat der rotirende Körper eine Symmetrieebene XZ, welche durch die Umdrehungsaxe geht, so ist $M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots$ = Null, und daher $P = Q = \omega^2 Mx$. Ist überdies noch der Körper symmetrisch in Hinsicht auf eine Ebene, welche auf XZ rechtwinkelig steht und mit der Umdrehungsaxe parallel läuft, so hat man

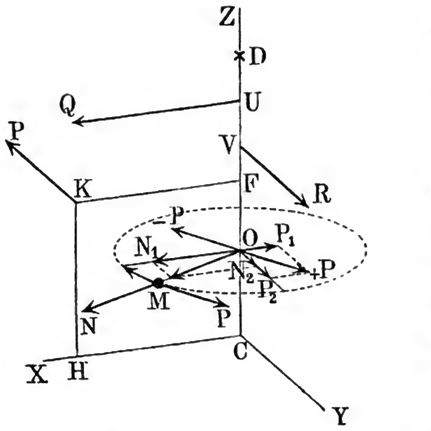
$$M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 = M_1 (x_1 + x_2) z_1 = M_1 a z_1$$

u. s. w., und daher $u = \frac{M_1 z_1 + M_2 z_2 + \cdots}{M_1 + M_2 + \cdots}$ = dem Ab-

stande des Schwerpunktes des Körpers von der Grundebene XY. Es ist also auch dann die ganze Masse des Körpers im Schwerpunkte vereinigt anzunehmen.

Dreht sich ein Körper ungleichförmig um eine Axe CZ, Fig. 300, so übt jeder Massentheil M desselben durch seine Trägheit zwei Kräfte aus; die aus der Winkelgeschwindigkeit ω hervorgehende Normal- oder Centrifugalkraft $N = \omega^2 M r$ und die der Winkelacceleration $\varkappa$ entsprechende Tangentialkraft $P = \varkappa Mr$. Jene Kraft giebt die Componenten $N_1 = \omega^2 Mx$ u. $N_2 = \omega^2 My$,

Fig. 300.



und diese läßt sich in die Componenten $P_1 = \varkappa My$, $P_2 = \varkappa Mx$ und in ein Kräftepaar zerlegen, dessen Moment $\varkappa M r^2$ ist. Sind nun $M_1, M_2 \cdots$ die Massentheile, $r_1, r_2 \ldots$ ihre Entfernungen von der Umdrehungsaxe CZ, $x_1, x_2 \cdot$ sowie $y_1, y_2 \cdots$ ihre Coordinaten in den Umdrehungsebenen, und $z_1, z_2 \cdots$ ihre Coordinaten in der Umdrehungsaxe, so hat man die Mittelkraft in der Ebene XZ:

$$Q = \omega^2 (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots) - \varkappa (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots),$$

und die in der Ebene YZ:

$$R = \omega^2 (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots) + \varkappa (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots);$$

ferner die Coordinaten oder Hebelarme derselben:

$$CU = u = \frac{\omega^2(M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots) - \varkappa(M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots)}{\omega^2(M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots) - \varkappa(M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots)}$$

und

$$CV = v = \frac{\omega^2(M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots) + \varkappa(M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots)}{\omega^2(M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots) + \varkappa(M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots)}.$$

Endlich ist das Moment des resultirenden Kräftepaares:

$$Pa = \varkappa (M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + \cdots).$$

Wird die Axe in C und in einem Punkte D festgehalten, welcher um l von C absteht, so sind die Kräfte, welche D aufnimmt:

$$X_1 = \frac{Qu}{l} \text{ und } Y_1 = \frac{Rv}{l},$$

und folglich diejenigen, welche C aufnimmt:

$$X = Q - X_1 = \frac{Q(l-u)}{l} \text{ und } Y = R - Y_1 = \frac{R(l-v)}{l}.$$

Die resultirenden Mittelkräfte (Zapfendrücke) sind endlich:

$$S_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2} = \frac{\sqrt{(Qu)^2 + (Rv)^2}}{l}$$

und

$$S = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{\sqrt{[Q(l-u)]^2 + [R(l-v)]^2}}{l}.$$

Erfolgt die Umdrehung des Körpers um CZ nicht durch ein Kräftepaar, sondern durch eine Einzelkraft, so kommen zu diesen Axendrücken auch noch die Drücke, welche aus dieser Kraft hervorgehen. Auch ist noch das Gewicht des Körpers bei Bestimmung der Axendrücke in Betracht zu ziehen.

Ist $M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots = 0$ und $M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots = 0$, sowie $M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots = 0$ und $M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots = 0$, so halten sich sämmtliche Trägheitskräfte gegenseitig das Gleichgewicht, ohne einen Druck auf die durch den Schwerpunkt des Körpers gehende Umdrehungsaxe auszuüben, und es ist daher die letztere eine sogenannte freie Axe. Jeder Körper hat mindestens drei freie Axen. Bei einem von sechs Rechtecken begrenzten Parallelepiped laufen die drei freien Axen durch die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Flächen; bei einem Rotationskörper ist die Rotationsaxe und jede durch den Schwerpunkt rechtwinkelig gegen diese Axe laufende Gerade eine freie Axe.

In dem Augenblicke, wenn der Körper aus der Ruhe in Bewegung oder aus der Bewegung in Ruhe übergeht, ist $\omega =$ Null, daher:

$$Q = -\varkappa(M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots) = -\varkappa y(M_1 + M_2 + \cdots),$$
$$R = \varkappa(M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots) = \varkappa x(M_1 + M_2 + \cdots),$$
$$Qu = -\varkappa(M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots) \text{ und}$$
$$Rv = \varkappa(M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots).$$

Ist XZ Symmetrieebene, so fallen Q und $Qu =$ Null aus, und fordert man noch, daß die Umdrehungskraft P durch die übrigbleibende Trägheitskraft R aufgehoben werde, so muß dieselbe in einem Punkte K angreifen, dessen Coordinaten $CH = FK = a$ und $CF = HK = b$ durch die Formeln:

$$a = \frac{M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + \cdots}{M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots} \text{ und}$$

$$b = \frac{M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots}{M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots}$$

bestimmt sind.

Der durch a und b bestimmte Punkt ist der Mittelpunkt des Stoßes

§. 31. Anwendung der Differenzial- und Integralrechnung auf die Bestimmung des Schwerpunktes und der Trägheitsmomente.

1) Der Schwerpunkt S einer ebenen Curve AOB, Fig. 301, ist bestimmt durch die Coordinaten

$$AM = u = \frac{\int x\,ds}{s} \text{ und } AN = MS = v = \frac{\int y\,ds}{s},$$

wobei x und y die Coordinaten AC und CB, sowie s die Länge des Bogens AOB bezeichnen.

Fig. 301.

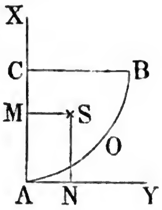
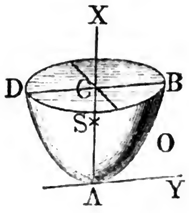


Fig. 302.



2) Der Schwerpunkt S der ebenen Fläche $AOBC = F$ ist bestimmt durch die Coordinaten

$$u = \frac{\int xy\,dx}{F} = \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx} \text{ und } v = \frac{\int y^2\,dx}{2F} = \frac{\int y^2\,dx}{2\int y\,dx}.$$

3) Das Trägheitsmoment des Bogens AOB in Hinsicht auf die Axe AY ist $T_1 = \int x^2\,ds$, und in Hinsicht auf die Axe AX: $T_2 = \int y^2\,ds$.

4) Das Trägheitsmoment der ebenen Fläche $AOBC = F$ in Hinsicht auf die Axe AY ist $T_1 = \int x^2 y\,dx$, und in Hinsicht auf die Axe AX: $T_2 = \frac{1}{3}\int y^3\,dx$.

5) Der Inhalt der Rotationsfläche ABD, Fig. 302, deren Erzeugungslinie AOB die Coordinaten x und y und die Länge s hat, ist $F = 2\pi\int y\,ds$, und der des von dieser Fläche umgrenzten Rotationskörpers: $V = \pi\int y^2\,dx$.

6) Der Abstand des Schwerpunktes der Rotationsfläche vom Scheitel A ist:

$$AS = u = \frac{2\pi\int xy\,ds}{F} = \frac{\int xy\,ds}{\int y\,ds},$$

und der des Rotationskörpers:

$$u_1 = \frac{\pi\int xy^2\,dx}{V} = \frac{\int xy^2\,dx}{\int y^2\,dx}.$$

7) Das Trägheitsmoment der Rotationsfläche in Hinsicht auf AX:

$$T = 2\pi \int y^3\, d s,$$

und das des Rotationskörpers:

$$T_1 = \frac{\pi}{2} \int y^4\, d x.$$

8) Das Trägheitsmoment der Rotationsfläche in Hinsicht auf eine Axe AY rechtwinkelig zu AX,

$$T = \pi \int y(y^2 + 2x^2)\, d s,$$

und das des Rotationskörpers in Hinsicht auf AY:

$$T_1 = \pi \int y^2(x^2 + \tfrac{1}{4} y^2)\, d x.$$

9) Beschreibt ein Punkt im Abstande Eins von der Umdrehungsaxe in der Zeit t den Weg φ, so ist die Winkelgeschwindigkeit des rotirenden Körpers: $\omega = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$,

sowie die Winkelacceleration $\varkappa = \frac{\partial \omega}{\partial t}$.

Ist $T = Mr^2$ das Trägheitsmoment des Körpers, so folgt das Kraftmoment zur Erzeugung der Acceleration $\varkappa$:

$$Pa = \varkappa T = \frac{\partial \omega}{\partial t} M r^2.$$

Beispiel. Da die Gleichung der Parabel $y^2 = a x$, folglich $2 y \partial y = a \partial x$ ist, so hat man die Coordinaten des Schwerpunktes der Parabelfläche ABC (Fig. 303).

Fig. 303.

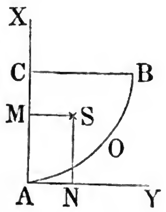
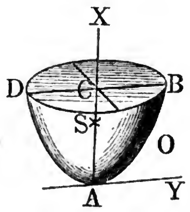


Fig. 304.



$$u = \frac{\int x y \partial x}{\int y \partial x} = \frac{\int y^4 \partial y}{a \int y^2 \partial y} = \frac{3 y^5}{5 a y^3} = \tfrac{3}{5} \frac{y^2}{a} = \tfrac{3}{5} x$$

und

$$v = \frac{\int y^2 \partial x}{2 \int y \partial x} = \frac{\int y^3 \partial y}{2 \int y^2 \partial y} = \frac{3 y^4}{8 y^3} = \tfrac{3}{8} y.$$

Ferner ist das Trägheitsmoment dieser Fläche in Hinsicht auf AY:

$$T = \int x^2 y \partial x = 2 \int \frac{y^6 \partial y}{a^3} = \frac{2 y^7}{7 a^3}$$

$$= \tfrac{3}{7} \cdot \tfrac{2}{3} x y \cdot x^2 = \tfrac{3}{7} F x^2,$$

wenn man den Inhalt der Fläche: $\tfrac{2}{3} x y = F$ setzt. In Hinsicht auf die Axe AX ist dagegen

$$T_1 = \frac{1}{3}\int y^3 \partial x = \frac{2}{3}\int \frac{y^4 \partial y}{a} = \frac{2y^5}{15a}$$
$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} x y \cdot y^2 = \frac{1}{5} F y^2.$$

Für das Rotationsparaboloid, Fig. 304, ist der Abstand des Schwerpunktes S vom Scheitel

$$AS = u = \frac{\int x y^2 \partial x}{\int y^2 \partial x} = \frac{\int a x^2 \partial x}{\int a x \partial x} = \frac{2}{3} x,$$

ferner das Volumen

$$V = \pi \int y^2 \partial x = \pi \int a x \partial x = \frac{\pi a x^2}{2} = \frac{\pi y^2 x}{2} = \frac{F x}{2},$$

wenn F den Inhalt der ebenen Begrenzungsfläche BD bezeichnet.

Das Trägheitsmoment dieses Körpers in Hinsicht auf seine geometrische Axe AX ist

$$T = \frac{\pi}{2}\int y^4 \partial x = \frac{\pi}{2}\int \frac{2 y^5 \partial y}{a} = \frac{\pi y^6}{6a}$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi y^2 x}{2} y^2 = \frac{1}{3} V y^2,$$

und das Trägheitsmoment in Hinsicht auf eine Axe AY, welche rechtwinkelig auf AX steht,

$$T_1 = \pi \int y^2 (x^2 + \tfrac{1}{4} y^2) \partial x = \pi \int (a x^3 + \tfrac{1}{4} a^2 x^2) \partial x$$
$$= \pi \left(\frac{a x^4}{4} + \frac{a^2 x^3}{12}\right) = \frac{\pi a x^3}{4}\left(x + \frac{a}{3}\right)$$
$$= V \cdot \frac{x}{2}\left(x + \frac{a}{3}\right).$$

§. 32. **Fallen in vorgeschriebenen Wegen.** Die Beschleunigung eines auf einer schiefen Ebene herabgleitenden Körpers ist ohne Rücksicht auf Reibung:

$p = g \sin. \alpha$, mit Rücksicht auf Reibung aber:

$p = g (\sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha)$, wenn α den Neigungswinkel und φ den Reibungscoefficienten bezeichnet (vergl. S. 355).

Die Acceleration eines von einer schiefen Ebene herabrollenden Körpers ist, wenn $T = M a^2$ das Trägheitsmoment und r den Wälzungshalbmesser des Körpers bezeichnet:

$p = \dfrac{g \sin. \alpha}{1 + \dfrac{a^2}{r^2}}$. Z. B. für eine herabwälzende Kugel, wo

$$a^2 = \frac{2}{5} r^2, \quad p = \frac{5}{7} g \sin. \alpha.$$

Ist c die Anfangs- und v die Endgeschwindigkeit eines ohne Reibung von einer schiefen Ebene herabgleitenden Körpers, und ist h die Verticalprojection des Fallweges, so gilt die Formel:

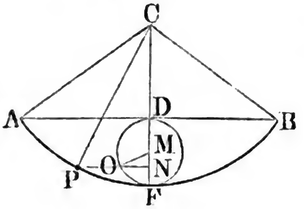
$$\frac{v^2 - c^2}{2g} = h.$$

Die Zeit eines Pendelschwunges, d. i. die Zeit, in welcher ein materieller Punkt einen Bogen AFB, Fig. 305 (a. f. S.), fallend und steigend durchläuft, ist, wenn h die Fall- oder Steighöhe FD und r den Schwingungsradius $CA = CB$ bezeichnet:

$$t=\pi\sqrt{\frac{r}{g}}\left[1+(\tfrac{1}{2})^2\frac{h}{2r}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{h}{2r}\right)^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\cdot\left(\frac{h}{2r}\right)^3+\cdots\right].$$

Bei mäßigen Ausschlägen ist

Fig. 305.



$$t=\pi\sqrt{\frac{r}{g}}\left(1+\frac{h}{8r}\right),$$

und bei kleinen sogar

$$t=\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

$$=0{,}5620\sqrt{r} \text{ Fuß}$$

zu setzen.

Für ein Secundenpendel hat man $t=1$, folglich

$$r=\frac{g}{\pi^2}=38 \text{ Zoll}=0{,}9938 \text{ Meter}.$$

Die Zeit, innerhalb welcher das Pendel einen Bogen AP durchfällt, dessen Verticalprojection $DN=DF-NF=h-h_1$ ist, giebt die Formel:

$$t=\left(\varphi+\frac{h}{8r}(\varphi+sin.\,\varphi)+\cdots\right)\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}},$$

wo φ^0 den Centriwinkel DMO bezeichnet, der durch die Formel

$$cos.\,\varphi=\frac{2h_1-h}{h}$$ bestimmt ist. Uebrigens ergeben sich die Fallhöhen h und h_1 aus den Elongationswinkeln $ACF=\alpha$ und $PCF=\alpha_1$ durch die Formeln:

$$h=r(1-cos.\,\alpha),\ h_1=r(1-cos.\,\alpha_1),$$

weshalb auch ist

$$cos.\,\varphi=2\left(\frac{1-cos.\,\alpha_1}{1-cos.\,\alpha}\right)-1=2\left(\frac{sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha_1}{sin.\,\tfrac{1}{2}\alpha}\right)^2-1.$$

Die Länge r desjenigen einfachen Pendels, welches mit dem zusammengesetzten gleiche Schwingungsdauer hat, ist gleich dem Abstande des **Schwingungspunktes** von der Umdrehungsaxe, und zu setzen:

$$r=\frac{Mk^2}{Ms}=\frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}}.$$

Hiernach ist z. B. für eine schwere Linie oder für einen Stab, welcher sich um einen seiner Endpunkte schwingt, bei der Länge l:

$$r=\frac{\tfrac{1}{3}Ml^2}{\tfrac{1}{2}Ml}=\tfrac{2}{3}l, \text{ daher } t=\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}.$$

Der Aufhängungspunkt und der Schwingungspunkt eines materiellen Pendels sind **wechselseitig**; d. h. die Schwingungszeit ist dieselbe, man mag das Pendel in dem einen oder in dem anderen aufhängen. Hierauf beruht die Theorie der **Reversionspendel**.

Die Schwingungszeit des **Cycloidenpendels** ist genau

$$t=\pi\sqrt{\frac{r}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{a}{g}},$$

wobei a den Halbmesser des Erzeugungskreises und $r = 4\,a$, den des Krümmungskreises am tiefsten Punkte der Schwingung bezeichnet. Diese Cycloide ist auch die Brachystochrone oder Curve der kürzesten Fallzeit.

§. 33. **Der Stoss.** Für den geraden Centralstoß zweier sich mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 in gleicher Richtung bewegenden Massen M_1 und M_2 ist die gemeinschaftliche Geschwindigkeit im Augenblicke des stärksten Zusammendrückens:

$$v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}.$$

Sind beide Massen unelastisch, so ist dies auch die Geschwindigkeit, mit der sie sich gemeinschaftlich nach dem Stoße fortbewegen.

Die lebendige Kraft, welche durch den Zusammenstoß unelastischer Körper verloren geht, ist:

$$K = M_1 (c_1 - v)^2 + M_2 (v - c_2)^2,$$

und der entsprechende Verlust an Arbeitsvermögen.

$$L = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2\,g} \cdot \frac{G_1\,G_2}{G_1 + G_2}.$$

Sind v_1 und v_2 die veränderlichen, jedoch gleichzeitigen Geschwindigkeiten während des Stoßes, so gilt die allgemeine Regel:

$$M_1 (c_1 - v_1) = M_2 (v_2 - c_2) \text{ oder } M_1 c_1 + M_2 c_2 = M_1 v_1 + M_2 v_2.$$

Ist überdies der Stoß vollkommen elastisch, so hat man auch:

$$M_1 (c_1^2 - v_1^2) = M_2 (v_2^2 - c_2^2) \text{ oder}$$
$$M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2 = M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2.$$

Aus beiden Gleichungen resultirt der Geschwindigkeitsverlust des stoßenden Körpers:

$$c_1 - v_1 = \frac{2\,M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}, \text{ und}$$

der Geschwindigkeitsgewinn des gestoßenen Körpers:

$$v_2 - c_2 = \frac{2\,M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}.$$

Sind die Körper unvollkommen elastisch, so nimmt der Factor 2 auf der rechten Seite einen Werth zwischen 1 und 2 an, und sind sie ganz unelastisch, so geht er in 1 über. Ist der eine Körper vor dem Stoße in Ruhe, so setze man $c_2 = 0$, und laufen die Körper einander entgegen, so ist c_2 negativ in Rechnung zu bringen.

Beim schiefen Centralstoße bleiben die Geschwindigkeiten parallel zur Berührungsfläche unverändert, wogegen die Geschwindigkeiten normal zur Berührungsfläche gerade so verändert werden wie beim geraden Centralstoß. Es ist deshalb erst eine Zerlegung der Geschwindigkeiten vor dem Stoße und dann eine Zusammensetzung der Geschwindigkeiten nach dem Stoße vorzunehmen, um die Größen und Richtungen der Geschwindigkeiten nach dem Stoße zu erhalten.

Die im Vorstehenden gegebenen Formeln gelten auch für

den Fall, wenn der eine oder andere der sich stoßenden Körper nicht frei ist, sondern es sich um eine feste Axe dreht. Es sind in diesem Falle die Geschwindigkeiten c_1, c_2, v_1 und v_2 auf die Lothpunkte A und B, Fig. 306, der von den Drehungsaxen C und D gegen die Stoßrichtung $\overline{PP}$ gefällten Perpendikel $CA = a_1$ und $DB = a_2$ zu beziehen, sowie auch die Massen M_1 und M_2 eben dahin zu reduciren. Sind T_1 und T_2 die Trägheitsmomente beider Körper in Hinsicht auf ihre Umdrehungsaxen, so hat man folglich

$$M_1 = \frac{T_1}{a_1^2} \text{ und } M_2 = \frac{T_2}{a_2^2} \text{ in Rechnung zu bringen.}$$

Ist der eine oder der andere der zum Stoße gelangenden Körper frei und geht die Stoßrichtung nicht durch den Schwerpunkt desselben, wie z. B. bei dem Körper BS in Fig. 307, so

Fig. 306.

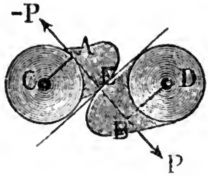
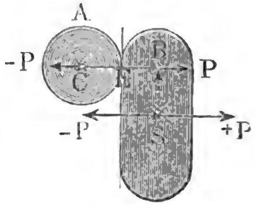


Fig. 307.



ist die Wirkung der Stoßkraft P eine doppelte; sie ist erstens dieselbe, als wenn die Stoßrichtung durch den Schwerpunkt S ginge, und zweitens dieselbe, als wenn der Körper im Schwerpunkte S festgehalten würde und sich daher nur um diesen drehen könnte; denn es läßt sich P in eine Kraft $+ P$ und in ein Kräftepaar $(P, - P)$ zerlegen. Deshalb nimmt denn auch der Körper nach dem Stoße eine zusammengesetzte Bewegung an, welche aus einem Fortschreiten des Schwerpunktes und aus einer Drehbewegung um diesen Punkt besteht.

Soll die Stoßkraft keine Reaction auf den um eine Axe drehbaren Körper ausüben, so muß sie durch den Schwingungspunkt des Körpers (Stoßpunkt) gehen, ihre Richtung also von der Umdrehungsaxe abstehen um

$$r = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}}.$$

Die Stoßkraft wirkt in vielen Fällen der Technik, z. B. beim Schmieden der Metalle, beim Einschlagen von Nägeln, Einrammen von Pfählen, Zerschlagen oder Zerreißen von Körpern u. s. w.

Für das Einrammen eines Pfahles hat man, wenn G das Gewicht des Rammbärs, G_1 das Gewicht des Pfahles, h die Fallhöhe des ersteren bezeichnet, die einem Schlage entsprechende Arbeit:

$$Ps = \frac{G^2 h}{G + G_1}.$$

Wenn nun der Pfahl bei den letzten n Schlägen um die Tiefe s, also im Mittel bei einem Schlage, um $\sigma = \frac{s}{n}$ eindringt, so hat man den Widerstand des Eindringens, und also auch die Tragkraft des Pfahles:

$$P = \frac{G^2}{G + G_1} \frac{h}{\sigma} = \frac{G^2}{G + G_1} \cdot \frac{nh}{s}.$$

Man giebt in der Anwendung 10= bis 100fache Sicherheit Genauer ist es:

$$P = \frac{Gh}{s + \left(\frac{l}{FE} + \frac{l_1}{F_1 E_1}\right) \frac{P}{2}}$$

$$= \frac{Gh}{s + \left(\frac{l}{FE} + \frac{l_1}{F_1 E_1}\right) \frac{Gh}{2s}}$$

zu setzen, wobei l, F und E, sowie l_1, F_1 und E_1 die Länge, den Querschnitt und den Elasticitätsmodul der Körper bezeichnen.

Um einen prismatischen Körper durch einen Schlag in der Axenrichtung desselben um λ zusammenzudrücken oder auszudehnen, hat man die Arbeit $\frac{P\lambda}{2} = \frac{P^2}{FE} \cdot \frac{l}{2}$ nöthig; soll aber diese durch ein Gewicht G verrichtet werden, welches von der Höhe h herabfällt, so hat man bei dem Gewichte G_1 des gestoßenen Körpers diese Arbeit $L = \frac{G^2}{G + G_1} h$; deshalb folgt die Kraft:

$$P = G \sqrt{\frac{FE}{G + G_1} \cdot \frac{2h}{l}},$$

ferner die Ausdehnung oder Zusammendrückung:

$$\lambda = G \sqrt{\frac{2hl}{(G + G_1) FE}}.$$

Setzt man $P = FT$, wo T den Tragmodul bezeichnet, so erhält man den Querschnitt F, bei welchem der prismatische Körper durch das Aufschlagen bis zur Elasticitätsgrenze ausgedehnt wird:

$$F = \frac{G^2 E}{(G + G_1) T^2} \cdot \frac{2h}{l} = \frac{G^2 h}{A (G + G_1) l},$$

wobei $A = \frac{T^2}{2E}$ den Arbeitsmodul der Elasticitätsgrenze (s. §. 19, Seite 366) bezeichnet.

Um einen an beiden Enden aufliegenden Balken durch eine Kraft in der Mitte so zu biegen, daß sich die Bogenhöhe a herausstellt, hat man die Arbeit $\frac{Pa}{2} = \frac{P^2 l^3}{96 WE}$ nöthig. Wird nun diese Biegung durch ein von der Höhe h herabfallendes Gewicht G verrichtet, so hat man die entsprechende Arbeit $\frac{G^2 h}{G + 1/2\, G_1}$

zu setzen, wenn G_1 das Gewicht des gebogenen Balkens bezeichnet. Hiernach ist dann:

$$P = G\sqrt{\frac{96\,WE}{G + \frac{1}{2}G_1}\cdot\frac{h}{l^3}},\ \text{ferner}$$

$$a = G\sqrt{\frac{h\,l^3}{24\,(G + \frac{1}{2}G_1)\,WE}}$$

und für das Biegen bis zur Elasticitätsgrenze ist

$$T = \frac{\frac{1}{4}Ple}{W} = G\sqrt{\frac{6\,E}{(G + \frac{1}{2}G_1)\,W}\cdot\frac{e^2 h}{l}},$$

wenn T den Tragmodul und e den Abstand der entferntesten Faser von der neutralen Axe bezeichnet.

Hiernach folgt die Fallhöhe

$$h = \frac{T^2}{6\,Ee^2}\cdot\frac{(G + \frac{1}{2}G_1)\,Wl}{G^2}$$

$$= \frac{A}{3}\,\frac{(G + \frac{1}{2}G_1)}{G^2}\,\frac{Wl}{e^2},$$

und zwar

$$= \frac{AV(G + \frac{1}{2}G_1)}{9\,G^2},$$

wenn der Balken eine parallelepipedische Form hat, wo

$$\frac{Wl}{e^2} = \frac{bhl}{3} = \frac{V}{3},$$

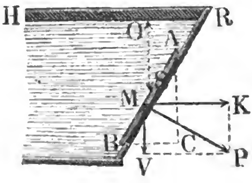
nämlich ein Drittel des Balkenvolumens ist.

Fünftes Capitel.

Hydraulik.

§. 34. Hydrostatischer Druck. Der Druck einer Flüssigkeit gegen eine ebene Fläche AB, Fig. 308, ist $P = Fh\gamma$, wo F den Inhalt dieser Fläche, h die Tiefe SO ihres Schwerpunktes unter der Oberfläche HR der Flüssigkeit und γ die Dichtigkeit der letzteren bezeichnet. Um den Verticaldruck oder den verticalen Componenten V dieser Kraft zu finden, ist statt F die Horizontalprojection CB der Fläche einzuführen, und um den Horizontaldruck K zu erhalten, muß man die Verticalprojection AC von F als Druckfläche ansehen.

Fig. 308.



Der **Mittel- oder Angriffspunkt** M des Wasserdruckes liegt unter dem Schwerpunkte S der gedrückten Fläche, sein Abstand vom Wasserspiegel ist:

$$RM = z = \frac{Fk^2}{Fs} = \frac{\text{Trägheitsmoment der Fläche}}{\text{statisches Moment derselben}}.$$

Für ein **Rechteck**, dessen eine Seite im Wasserspiegel liegt, ist z. B. $z = \frac{\frac{1}{3}Fa^2}{\frac{1}{2}Fa} = \frac{2}{3}a$, d. i. Zweidrittel der Höhe a desselben.

Der Druck des Wassers gegen eine **krumme Fläche** nach irgend einer Richtung ist:

$$P = (G_1 h_1 + G_2 h_2 + G_3 h_3 + \cdots)\gamma,$$

wo $h_1, h_2, h_3 \ldots$ die Druckhöhen und $G_1, G_2, G_3 \ldots$ die Projectionen der Flächenelemente, winkelrecht gegen die gegebene Richtung bezeichnen.

Der **Horizontaldruck** des Wassers gegen eine **krumme Fläche** nach irgend einer Richtung ist $P = Gh\gamma$, wo G die Verticalprojection dieser Fläche winkelrecht zur gegebenen Richtung, und h die Tiefe des Schwerpunktes dieser Projection unter dem Wasserspiegel ist.

Der **Verticaldruck** des Wassers gegen eine **krumme Fläche** ist gleich dem Gewichte einer über dieser Fläche stehenden und bis zur Oberfläche des Wassers reichenden Wassersäule.

Ist r der innere Halbmesser eines **kugelförmigen Gefäßes**, e die Dicke der Gefäßwand, $p = h\gamma$ der mittlere Druck des Wassers in diesem Gefäße auf jede Flächeneinheit, und T der Tragmodul des Gefäßstoffes, so hat man $e = \frac{pr}{2T}$.

Für eine **Röhre** oder ein **cylinderförmiges Gefäß** ist hingegen $e = \frac{pr}{T}$.

Allgemein ist für eine **doppelt gekrümmte Gefäßwand**

$$e = \frac{prr_1}{T(r + r_1)},$$

wenn r und r_1 den größten und kleinsten Krümmungshalbmesser derselben bezeichnen.

Der Sicherheit wegen nimmt man, wenn d die innere Weite der Röhre in Zollen und p den Druck in Atmosphären, jede zu 33 Fuß, bezeichnet, für Röhren aus:

Eisenblech	$e = 0{,}00086\,pd + 0{,}12$	Zoll,
Gußeisen	$e = 0{,}00238\,pd + 0{,}33$	»
Kupfer	$e = 0{,}00148\,pd + 0{,}16$	»
Blei	$e = 0{,}00507\,pd + 0{,}20$	»
Zink	$e = 0{,}00242\,pd + 0{,}16$	»
Holz	$e = 0{,}0323\,pd + 1{,}04$	»
natürlichem Stein .	$e = 0{,}0369\,pd + 1{,}15$	»
künstlichem Stein .	$e = 0{,}0538\,pd + 1{,}53$	» an.

Wenn das Wasser nicht bloß hydrostatisch, sondern auch durch **Stoß auf die Röhrenwand** drückt, indem ihm innerhalb der

Röhre plötzlich seine Geschwindigkeit v entzogen wird, so ist die Wandstärke nach der Formel

$$e = \frac{r\gamma}{T}\left(\sqrt{h^2 + \left(\frac{E}{2T}h_1\right)^2} + \frac{E}{2T}h_1\right),$$

wo h_1 die Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$, E den Elasticitäts- und T den Tragmodul des Röhrenmaterials bezeichnen.

Je nachdem $\frac{h}{h_1}$ größer oder kleiner als $\frac{E}{2T}$ ist, läßt sich annähernd

$$e = \frac{r\gamma}{T}\left(0{,}96h + 1{,}40\frac{E}{2T}h_1\right) = \left(0{,}96 + 1{,}40\frac{E}{2T}\frac{h_1}{h}\right)\frac{pr}{T},$$

oder

$$e = \frac{r\gamma}{T}\left(0{,}40h + 1{,}96\frac{E}{2T}h_1\right) = \left(0{,}40 + 1{,}96\frac{E}{2T}\frac{h_1}{h}\right)\frac{pr}{T}$$

setzen.

Für gußeiserne Röhren ist $\frac{E}{2T} = 750$, daher für $\frac{h}{h_1} > 750$,

$$e = 0{,}00228\left(1 + 1094\frac{h_1}{h}\right)pd + 0{,}33 \text{ Zoll},$$

und für $\frac{h}{h_1} < 750$,

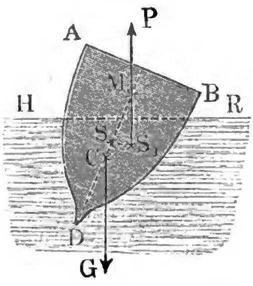
$$e = 0{,}000952\left(1 + 3675\frac{h_1}{h}\right)pd + 0{,}33 \text{ Zoll},$$

wo p den hydrostatischen Druck in Atmosphären bezeichnet.

§. 35. Gleichgewicht des Wassers mit anderen Körpern. Der Auftrieb oder die Kraft, mit welcher das Wasser einen eingetauchten Körper emportreibt, ist gleich dem Gewichte $G = V\gamma$ des verdrängten Wassers, also Volumen V des Körpers oder seines eingetauchten Theiles, mal Dichtigkeit γ des Wassers oder der Flüssigkeit; und sein Angriffspunkt ist der Schwerpunkt des verdrängten Wassers.

Ein Schiff oder anderer Körper ADB, Fig. 309, schwimmt mit Stabilität, wenn sein Metacentrum M über dem Schwerpunkte C des Körpers liegt, und das Maaß der Stabilität ist der Abstand $CM = c$ dieser Punkte von einander. Ist b die Breite des Schiffes im Niveau des Wasserspiegels, F der Inhalt des eingetauchten Schiffsquerschnittes und e die Höhe CS des Schwerpunktes S vom verdrängten Wasser über dem Schwerpunkte C vom Schiffe, so hat man:

Fig. 309.



$$c = \frac{b^3}{12F} + e$$

und die Stabilität des Schiffes bei dem Neigungswinkel φ,

$$s = \left(\frac{b^3}{12F} + e\right) G \varphi.$$

Ist G das Gewicht eines unter Wasser getauchten Körpers, P der Auftrieb des letzteren, γ die Dichtigkeit des Wassers oder der Flüssigkeit, γ_1 aber die des Körpers, so hat man $\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{G}{P}$, und hiernach auch das specifische Gewicht eines Körpers:

$$\varepsilon = \frac{\text{absolutes Gewicht}}{\text{Gewichtsverlust im Wasser}}.$$

Um specifische Gewichte unter Eins auszumitteln, verbindet man den leichten Körper mit einem schweren, und bestimmt sowohl den Auftrieb P der Verbindung, als auch den Gewichtsverlust P_1 des schweren Körpers. Es ist dann

$$\varepsilon = \frac{\text{absolutes Gewicht}}{P - P_1}.$$

Aus dem absoluten Gewichte G einer mechanischen Verbindung zweier Körper und aus den specifischen Gewichten ε, ε_1 und ε_2 des ganzen Körpers und der einzelnen Körper, ergeben sich die Gewichte dieser Körper durch die Formeln:

$$G_1 = G\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) : \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) \text{ und}$$

$$G_2 = G\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) : \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right).$$

In communicirenden Röhren verhalten sich die Höhen verschiedener Flüssigkeitssäulen, von der Trennungsfläche bis zu den Oberflächen gemessen, umgekehrt wie die specifischen Gewichte dieser Flüssigkeiten.

§. 36. Druck und Gleichgewicht der Luft.

Eine Atmosphäre giebt den mittleren Luftdruck durch die Höhe $k = 28$ pariser Zoll $= 29$ preußische Zoll $= 0{,}7580$ Meter einer Quecksilbersäule, bei Null Grad Wärme gemessen, an, welcher einer Wassersäule von

$k_1 = 31{,}73$ paris. Fuß $= 32{,}84$ preuß. Fuß $= 10{,}308$ Meter Höhe entspricht. Der Druck einer Atmosphäre auf ein Quadratcentimeter ist $p_0 = 1{,}0308$ Kilogramm, folglich auf ein Quadratmeter $= 10308$ Kilogramm, dagegen auf einen preuß. Quadratzoll

$p_0 = 14{,}103$ Pfund, und auf einen preuß. Quadratfuß $= 2030{,}8$ Pfund.

Setzt man $b = 0{,}7600$ Meter, so fallen alle diese Werthe um 0,264 Procent größer aus, wonach z. B. $p_0 = 1{,}0335$ Kilogramm pr. Quadratcentimeter folgt.

Folgende Tabelle I. giebt den Atmosphärendruck, gemessen durch die Höhe oder das Gewicht einer Flüssigkeitssäule in verschiedenen Landesmaaßen an.

Tabelle I.

Die Größe einer Atmosphäre in verschiedenen Landesmaaßen ausgedrückt.

1) Eine Atmosphäre, gemessen durch die Höhe einer Quecksilbersäule.

Pariser Zoll	Centimeter	Englische Zoll	Oesterreichische Zoll	Preußische Zoll	Baiersche Zoll	Sächsische Zoll	Badensche Zoll
28	75,80	29,84	28,77	28,98	31,16	32,12	30,32

2) Eine Atmosphäre, gemessen durch die Höhe einer Wassersäule.

Pariser Fuß	Meter	Englische Fuß	Oesterreichische Fuß	Preußische Fuß	Baiersche Fuß	Sächsische Fuß	Badensche Fuß
31,73	10,308	33,82	32,61	32,84	35,32	36,40	34,36

3) Eine Atmosphäre, gemessen durch den Druck auf einen Quadratzoll u. s. w.

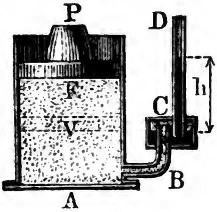
Kilogramm	Kilogramm pr. Quadratcentimeter.	Englische Pfund	Oesterreichische Pfund	Neupfund (Zollpfund)	Baiersche Pfund	Neupfund	Neupfund
7,554	1,0308	14,661	12,773	14,103	10,889	11,482	18,555

4) Eine Atmosphäre, gemessen durch den Druck auf einen Quadratfuß u. s. w.

Kilogramm	Kilogramm pr. Quadratmeter	Englische Pfund	Oesterreichische Pfund	Neupfund	Baiersche Pfund	Neupfund	Neupfund
1087,7	10308	2111,2	1839,3	2030,8	1568,0	1653,4	1855,5

Ein Piezometer BCD, Fig. 310, giebt den Druck P der in einem Gefäße AF eingeschlossenen Flüssigkeit durch die Höhe h einer Wasser- oder Quecksilbersäule an, und heißt ins Besondere ein Manometer, wenn die eingeschlossene Flüssigkeit luft- oder gasförmig ist. Aus dem Piezometerstande h und der Dichtigkeit γ der Piezometerfüllung folgt der Druck der Flüssigkeit auf die Flächeneinheit:

Fig. 310.



$p = h\gamma$, und folglich auf eine Fläche vom Inhalte F:

$$P = Fp = Fh\gamma.$$

Umgekehrt ist

$$p = \frac{P}{F} \text{ und } h = \frac{p}{\gamma} = \frac{P}{F\gamma}.$$

Ist h die Höhe einer Quecksilbersäule in preuß. Zollen, und p der Druck auf den preuß. Quadratzoll, so hat man auch den Druck der Flüssigkeit

$$\frac{h}{29} = \frac{p}{14,1} = \frac{P}{14,1F} \text{ Atmosphären.}$$

Es ist hiernach

$$h = 2,0567\, p \text{ preuß. Zoll, sowie}$$
$$p = 0,4862\, h \text{ Neupfund, und}$$
$$P = Fp = 0,4862\, Fh \text{ Neupfund, sowie}$$
$$h = 2,0567\, \frac{P}{F} \text{ Zoll.}$$

Um solche Reductionen des Druckes der Flüssigkeiten von Zoll auf Pfund und von Pfund auf Zoll u. s. w. leicht vollziehen zu können, ist folgende Tabelle II. zusammengestellt worden.

Tabelle II.

Tabelle zur Reduction des Druckes der Luft oder einer anderen Flüssigkeit.

Atmosphäre	Höhe der Quecksilbersäule in paris. Zoll	Höhe der Quecksilbersäule in Centimeter	Druck auf den preuß. Quadratzoll in Neupfund	Druck auf das Quadratcentimeter in Kilogramm
1	28	75,80	14,103	1,0308
0,03571	1	2,707	0,5037	0,03681
0,013193	0,3694	1	0,1861	0,01360
0,07092	1,9858	5,376	1	0,07309
0,9700	27,16	73,53	13,680	1

Ein offenes Piezometer oder Manometer giebt die Differenz h_1 zwischen dem Druck h der inneren Flüssigkeit und dem Druck der äußeren Atmosphäre k an; es ist daher

$h = k + h_1$ sowie

$p = 0{,}4862\ (k + h_1)$ Neupfund

zu setzen, und natürlich der äußere Luftdruck oder sogenannte Barometerstand (k) besonders zu bestimmen.

Nach dem Mariotte'schen Gesetze sind die Spannkräfte eines und desselben Luftquantums, bei unveränderter Temperatur den Dichtigkeiten direct und folglich den Volumen umgekehrt proportional. Sind p und p_1, oder h und h_1 die Spannungskräfte, γ und γ_1 die entsprechenden Dichtigkeiten und V und V_1 die Volumen eines und desselben Luftquantums, so hat man hiernach:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{h}{h_1} = \frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{V_1}{V}.$$

Die mechanische Arbeit A, welche nöthig ist, um ein Luftvolumen V aus der Spannung p in die Spannung p_1 zu versetzen, bestimmt sich durch die Formeln:

$$A = Vp\ log.\ nat. \left(\frac{p_1}{p}\right) = 2{,}3026\ Vp\ log. \left(\frac{p_1}{p}\right), \text{und}$$

$$A = V_1 p_1\ log. nat. \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right) = 2{,}3026\ V_1 p_1\ log. \left(\frac{V}{V_1}\right).$$

Eben so groß ist auch das Arbeitsvermögen, welches frei wird, wenn die höhere Spannung p_1 eines Luftvolumens V_1 in die tiefere Spannung p umgesetzt wird.

In einer höheren Luftsäule nimmt die Expansivkraft und Dichtigkeit von unten nach oben zu ab. Ist p und γ Spannung und Dichtigkeit der Luft an einer unteren, p_1 und γ_1 aber Spannung und Dichtigkeit an einer um s Fuß höheren Stelle, so hat man:

$$= \frac{\gamma}{\gamma_1} = e^{\frac{s\gamma}{p}}, \text{ wo } e = 2{,}71828, \text{ und daher}$$

$$= \frac{p}{\gamma}\ log.\ nat. \left(\frac{p}{p_1}\right) = 58604\ log. \left(\frac{h}{h_1}\right) \text{ Fuß,}$$

wenn h und h_1 die Barometerstände bezeichnen. Die Anwendung dieser Formel beim barometrischen Höhenmessen (s. oben Seite 272 u. s. w.).

Nach dem Gay-Lussac'schen Gesetze ist für ein und dasselbe Luftquantum bei den Temperaturen t und t_1, Dichtigkeiten γ und γ_1 und Volumen V und V_1:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{1 + 0{,}00367\, t_1}{1 + 0{,}00367\, t}.$$

Sind überdies noch die Spannungen p und p_1 oder h und h_1 ungleich, so hat man:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{1 + 0{,}00367\, t_1}{1 + 0{,}00367\, t} \cdot \frac{h}{h_1}.$$

Hierbei ist nun die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft bei t^0 (Centes.) Wärme und h Meter Barometerstand (Gewicht pr. Cubikmeter):

$$\gamma = \frac{1,2995}{1 + 0,00367\,t} \cdot \frac{h}{0,76} = \frac{1,710\,h}{1 + 0,00367\,t} \text{ Kilogramm,}$$

bei h paris. Zoll Barometerstand (Gewicht pr. Cubikfuß):

$$\gamma = \frac{0,002862\,h}{1 + 0,00367\,t} \text{ Neupfund,}$$

und bei h preuß. Zoll Barometerstand:

$$\gamma = \frac{0,002765\,h}{1 + 0,00367\,t} \text{ Neupfund;}$$

ferner bei dem Drucke p Kil. auf das Quadratcentimeter:

$$\gamma = \frac{1,2995}{1 + 0,00367\,t} \cdot \frac{p}{1,0336} = \frac{1,2572\,p}{1 + 0,00367\,t} \text{ Kilogramm,}$$

und bei dem Drucke p Neupfund auf den preuß. Quadratzoll:

$$\gamma = \frac{0,005688\,p}{1 + 0,00367\,t} \text{ Pfund (Gewicht pr. Cubikfuß).}$$

Beispiel. Ein Gebläse, welches pr. Secunde 10 Cubikfuß Luft von $^{11}/_{10}$ Atmosphären Spannung liefert, nimmt die theoretische Leistung

$L = 11 \,.\, 144 \,.\, 14,10\, Ln.\, 1,1 = 22337 \,.\, 0,09531 = 2129$ Fußpfund $= 4,43$ Pferdekräfte in Anspruch.

Bei einem geschlossenen oder Luftmanometer bestimmt sich die Spannung (h) der abgesperrten Luft durch die Formel

$$h = h_1 + \left(\frac{1 + 0,00367\,t_1}{1 + 0,00367\,t}\right)\left(\frac{l}{l - h_1}\right) b_1,$$

wo l die ganze Länge der verticalen Manometerröhre, h_1 die Höhe der Quecksilbersäule in derselben, sowie t die Temperatur des Quecksilbers bezeichnet, und wo b_1 den Barometerstand und t_1 die Temperatur der eingeschlossenen Luft angiebt, wenn das Instrument Null zeigt, also $h_1 = 0$ ist.

Es ist daher $(1 + 0,00367\,t_1)\, l b_1$ eine bestimmte Größe H, und einfacher

$$h = h_1 + \frac{H}{(1 + 0,00367\,t)(l - h_1)},$$

sowie umgekehrt

$$h_1 = \tfrac{1}{2}\left[h + l + \sqrt{(h + l)^2 + 4\left(\frac{H}{1 + 0,00367\,t} - hl\right)}\right]$$

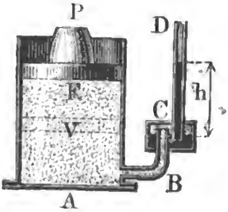
Wenn eine gewisse Luftmenge plötzlich aus dem Volumen V in das Volumen V_1, oder aus der Dichtigkeit γ in die Dichtigkeit $\gamma_1 = \frac{V}{V_1}\gamma$ gebracht wird, so erleidet auch die Temperatur derselben eine Aenderung, und zwar nach dem Wärmegesetze:

$$\frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t} = \left(\frac{V}{V_1}\right)^{\varkappa - 1} = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{\varkappa - 1} = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}},$$

worin t und t_1 die Temperaturen, sowie p und p_1 die Pressungen

der abgesperrten Luft vor und nach der plötzlichen Volumenveränderung bezeichnen, δ den Ausdehnungscoefficienten der Luft 0,00367 und $\varkappa = 1{,}41$, das Verhältniß der specifischen Wärme der Luft bei gleichem Drucke zu der bei gleichem Volumen bezeichnet.

Fig. 311.



Die mechanische Arbeit, welche erforderlich ist, um ein Luftvolumen V, Fig. 311, plötzlich aus der Pressung p in die Pressung p_1 zu versetzen, wobei natürlich auch die Temperatur t in eine andere, mittels der obigen Gleichung zu bestimmende Größe t_1 übergeht, giebt folgender Ausdruck an:

$$1)\quad A = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\left[\left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1\right] Vp$$

$$= \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right] V_1 p_1.$$

Da $\frac{p_1}{p} = \left(\frac{V}{V_1}\right)^{\varkappa}$, so folgt auch

$$2)\quad A = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\left[\left(\frac{V}{V_1}\right)^{\varkappa-1} - 1\right] Vp$$

$$= \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V}\right)^{\varkappa-1}\right] V_1 p_1.$$

Beispiel. Um ein gegebenes Luftquantum durch Verdichtung plötzlich auf die Hälfte seines Volumens zurückzuführen, also auf das Doppelte zu verdichten, ist die mechanische Arbeit

$$A = \frac{1{,}41}{0{,}41}\,(2^{0{,}41} - 1)\, Vp = 3{,}44 \,.\, 0{,}3287\; Vp = 1{,}1307\, Vp$$

nöthig. Z. B. für $V = 10$ Cubikfuß und $p = 14 \,.\, 144 = 2016$ Pfund, $A = 22800$ Fußpfund. Die Pressung der Luft ist nach der Zusammendrückung:

$$p_1 = 2^{1{,}41}\, p = 2{,}657\, p = 37{,}2 \text{ Pfund}$$

und die Temperatur:

$$t_1 = \frac{(1 + \delta t)\, 2^{0{,}41} - 1}{\delta} = \frac{0{,}3287}{0{,}00367} + 1{,}3287\, t$$

$$= 89^0{,}56 + 1{,}3287\, t,$$

z. B. für $t = 10^0$, $t_1 = 102^0{,}85$. Nach dem Mariotte'schen Gesetze, welches eine unveränderte Temperatur voraussetzt, ist $p_1 = 2p = 28$ Pfund, $t_1 = t = 10$ Grad und

$$A = Vp\, Log.\, nat. \left(\frac{p_1}{p}\right) = Vp\, Log.\, nat.\, 2$$

$$= 0{,}6931\, Vp = 0{,}6931 \,.\, 20160 = 13970 \text{ Fußpfund.}$$

§. 37. **Theoretischer Ausfluss des Wassers.** Ist h die Druckhöhe, d. i. die Tiefe der Mitte der Ausfluß-

mündung unter dem Wasserspiegel, und F der Inhalt der Ausflußmündung oder des Strahlquerschnittes, so hat man die theoretische **Ausflußgeschwindigkeit:**

$$v = \sqrt{2gh} = 7{,}906 \sqrt{h} \text{ Fuß},$$

und das **Ausflußquantum** pr. Secunde:

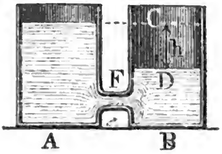
$$Q = Fv = F\sqrt{2gh}.$$

Es ist also die **Ausflußgeschwindigkeit** gleich der Endgeschwindigkeit eines Körpers, welcher von einer der Druckhöhe gleichen Höhe frei herabfällt, und das **Ausflußquantum** gleich dem Inhalte eines Prismas, welches den Querschnitt der Mündung oder des Strahles zur Basis, und die Ausflußgeschwindigkeit zur Höhe hat.

Ist die Oberfläche G des Wasserspiegels nicht mindestens 10mal so groß als der Querschnitt der Ausflußmündung, so muß man $v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2}}$ setzen.

Beim **Ausflusse des Wassers ins Wasser**, z. B. aus einem Gefäße A, Fig. 312, in ein Gefäß B hat man statt h den Niveauabstand CD der Wasserspiegel von einander einzuführen.

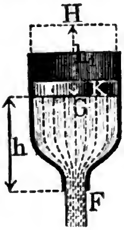
Fig. 312.



Ist ferner über dem Wasserspiegel des Ausflußgefäßes ein anderer Druck vorhanden als vor der Ausmündung, so hat man noch zu h die Differenz dieser Drücke zu addiren. Mündet z. B. die Ausflußöffnung in einem Raum aus, wo ein durch eine Wassersäule gemessener Luftdruck k_1 statt hat, während die Atmosphäre auf dem Wasserspiegel mit der Wasser-Barometerhöhe k drückt, so hat man $v = \sqrt{2g(h + k - k_1)}$ zu setzen.

Drückt ein Kolben K, Fig. 313, auf den Wasserspiegel G eines Ausflußgefäßes mit einer Kraft P, also auf jeden Quadratzoll derselben mit der Kraft $p = \frac{P}{G}$, die dem Drucke einer Wassersäule von der Höhe $h_1 = \frac{p}{\gamma} = \frac{P}{G\gamma}$ zu setzen ist, so hat man

Fig. 313.



$$v = \sqrt{2g(h + h_1)} = \sqrt{2g\left(h + \frac{p}{\gamma}\right)}$$
$$= \sqrt{2g\left(h + \frac{P}{G\gamma}\right)},$$

und wenn die Mündung F nicht sehr klein gegen G ist:

$$v = \sqrt{\frac{2g\left(h + \frac{p}{\gamma}\right)}{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2}}.$$

Umgekehrt ist

$$h + \frac{p}{\gamma} = \left[1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g},$$

sowie für einen anderen Querschnitt G_1, und die Höhe h_1 über der Mündung:

$$h_1 + \frac{p_1}{\gamma} = \left[1 - \left(\frac{F}{G_1}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g},$$

daher endlich die hydraulische Druckhöhe an irgend einer Stelle:

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} + h - h_1 + \left[\left(\frac{F}{G}\right)^2 - \left(\frac{F}{G_1}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}$$

= hydrostatischen Druckhöhe minus Differenz der Geschwindigkeitshöhen, entsprechend der Geschwindigkeit an eben dieser Stelle und der im Wasserspiegel.

Bei dem Ausfluß durch einen Wandeinschnitt ist die mittlere Geschwindigkeit $v = \frac{2}{3}\sqrt{2gh}$, wenn h die Tiefe der Ueberfallsschwelle oder unteren Kante des Einschnittes unter dem Wasserspiegel bezeichnet. Ist nun noch b die Breite dieser Abflußöffnung, so hat man das Ausflußquantum derselben:

$$Q = \frac{2}{3}\, b h \sqrt{2gh}.$$

Für den Ausfluß durch eine rectanguläre Seitenöffnung, deren horizontale Seitenkanten um die Tiefen h_1 und h_2 vom Wasserspiegel abstehen, ist:

$$v = \frac{2}{3}\sqrt{2g} \cdot \frac{h_1^{3/2} - h_3^{3/2}}{h_1 - h_2},$$

und annähernd, wenn man die Oeffnungshöhe $h_1 - h_2 = a$ und die mittlere Druckhöhe $\frac{h_1 + h_2}{2} = h$ einführt:

$$v = \left[1 - \frac{1}{96}\left(\frac{a}{h}\right)^2\right]\sqrt{2gh}.$$

Für den Ausfluß durch eine kreisrunde Mündung, deren Halbmesser $= r$ ist und deren Mittelpunkt um die Tiefe h unter dem Wasserspiegel liegt, ist:

$$v = \left[1 - \frac{1}{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 - \frac{5}{1024}\left(\frac{r}{h}\right)^4 - \cdots\right]\sqrt{2gh}.$$

§. 38. Contraction der Wasserstrahlen. Ist die Ausflußöffnung sehr glatt und genau abgerundet, wie z. B. in Fig. 313, so fließt das Wasser aus derselben in parallelen Fäden und mit einer Geschwindigkeit $v_1 = 0{,}96\, v$ bis $0{,}99\, v$ aus, welche nur um 4 bis 1 Procent kleiner ist als die theoretische Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$.

Hingegen durch eine Mündung in der dünnen ebenen Wand fließt das Wasser in convergenten, einen contrahirten

Wasserstrahl bildenden Fäden aus, und es ist der Querschnitt F_1 des Strahles in einiger Entfernung von der Mündung ungefähr nur $0{,}64\,F$ oder 64 Procent von dem der Mündung, also bei einer kreisförmigen Oeffnung, die kleinste Dicke des Strahles nur 0,8 von der Weite der Mündung. Man nennt das Verhältniß $\frac{F_1}{F}$ zwischen dem Querschnitte des Wasserstrahles und dem der Mündung, den Contractionscoefficienten und bezeichnet es durch α, hat also hier ungefähr $\alpha = 0{,}64$. Hiervon ist noch der Geschwindigkeitscoefficient φ, d. i. das Verhältniß der effectiven Geschwindigkeit v_1 zu der theoretischen Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$, und der Ausflußcoefficient μ, nämlich das Verhältniß der effectiven Ausflußmenge Q_1 zur theoretischen, $Q = F\sqrt{2gh}$ zu unterscheiden. Man hat also:

$$\alpha = \frac{F_1}{F},\ \varphi = \frac{v_1}{v} = \frac{v_1}{\sqrt{2gh}} \text{ und } \mu = \frac{F_1 v_1}{F v} = \alpha\varphi.$$

Endlich ist noch der Widerstandscoefficient ζ, nämlich das Verhältniß der verlorenen Geschwindigkeitshöhe $\left(\frac{v^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}\right)$ zur effectiven Geschwindigkeitshöhe $\frac{v_1^2}{2g}$ in Betracht zu ziehen. Da $v_1 = \varphi v$, also $v = \frac{v_1}{\varphi}$, so hat man auch $\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1$, sowie umgekehrt, $\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta}}$.

Für den Ausfluß durch Mündungen in der dünnen ebenen Wand ist im Mittel bei kleinen Ausflußgeschwindigkeiten zu setzen:

$$\alpha = 0{,}64; \qquad \varphi = 0{,}97,$$
$$\mu = 0{,}621 \quad \text{und} \quad \zeta = 0{,}063.$$

Uebrigens sind diese Coefficienten bei verschiedenen Druckhöhen und verschiedenen Mündungen nicht genau dieselben, namentlich sind die Ausflußcoefficienten für kleine Mündungen und für kleine Druckhöhen größer als 0,621. Bei Mündungen in der dünnen convergenten Wand fallen α und μ größer, dagegen bei solchen in der dünnen divergenten Wand, kleiner aus als bei denen in der dünnen ebenen Wand.

Am genauesten kennt man durch Poncelet und Lesbros die Ausflußcoefficienten für rectanguläre Seitenmündungen von 2 Decimeter (ungefähr 8 Zoll) Breite und 0 bis 2 Decimeter Höhe. Dieselben sind in folgender Tabelle zusammengestellt, und letztere setzt voraus:

1) Daß das Wasser vor der Mündungswand ziemlich in Ruhe befindlich, diese Wand also gegen die Mündung sehr groß sei.

2) Daß die Druckhöhe bis Mitte der Mündung und nicht unmittelbar in der Mündungsebene, sondern einige Fuß oberhalb derselben gemessen worden sei.

I.

Tabelle der Ausflußcoefficienten für rectanguläre Mündungen in der dünnen Wand.

Wasserstand üb. der oberen Kante der Mündung.	Die Ausflußcoefficienten für die Oeffnungshöhen von					
	8 Zoll.	4 Zoll.	2 Zoll.	1½ Zll.	1 Zoll.	½ Zoll.
Zoll.						
½	0,567	0,592	0,605	0,620	0,643	0,690
¾	0,570	0,595	0,612	0,625	0,644	0,684
1	0,573	0,598	0,616	0,627	0,646	0,679
1½	0,580	0,602	0,620	0,632	0,647	0,673
2	0,583	0,605	0,624	0,633	0,647	0,671
3	0,587	0,608	0,628	0,634	0,645	0,664
4	0,590	0,610	0,629	0,633	0,643	0,661
5	0,592	0,612	0,629	0,633	0,643	0,659
6	0,594	0,613	0,630	0,632	0,640	0,655
8	0,596	0,614	0,630	0,631	0,639	0,653
10	0,597	0,615	0,630	0,631	0,638	0,651
Fuß.						
1	0,598	0,615	0,629	0,631	0,637	0,648
1¼	0,600	0,616	0,628	0,630	0,635	0,645
1½	0,601	0,616	0,628	0,629	0,635	0,641
1¾	0,602	0,616	0,628	0,629	0,634	0,641
2	0,603	0,617	0,627	0,628	0,633	0,640
2½	0,604	0,616	0,627	0,628	0,632	0,637
3	0,604	0,615	0,626	0,627	0,631	0,634
4	0,603	0,614	0,623	0,625	0,626	0,625
5	0,602	0,612	0,619	0,620	0,619	0,616
6	0,601	0,608	0,614	0,614	0,613	0,611
8	0,601	0,605	0,608	0,610	0,610	0,611
10	0,601	0,603	0,605	0,606	0,607	0,609

Für den Ausfluß durch einen rectangulären Einschnitt in der dünnen Wand (Ueberfall) sind die Coefficienten nach Poncelet und Lesbros in folgender Tabelle aufgeführt.

Diese Coefficienten wurden durch Versuche mit einem Wandeinschnitte von 2 Decimeter oder circa 8 Zoll Breite angestellt. Bei Anwendung dieser Tabelle ist zu beachten:

1) Daß der Einschnitt in einer großen ebenen Wand befindlich sein, also das Wasser vor derselben fast stillstehen muß.

2) Daß die Druckhöhe vom Wasserspiegel bis Schwelle oder untere Kante der Mündung, und zwar einige Fuß vor der Mündungswand, oberhalb der Senkung des Wasserspiegels, zu messen ist.

II.

Tabelle der Ausflußcoefficienten für rectanguläre Einschnitte von 8 Zoll Breite in der dünnen Wand.

Druckhöhe h in Zollen.	½	1	1½	2	3	4	6	8
Ausflußcoefficient $\mu =$	0,633	0,621	0,610	0,606	0,596	0,592	0,590	0,585
$\mu_1 = \frac{2}{3}\mu =$	0,422	0,414	0,407	0,404	0,397	0,395	0,393	0,390

III.

Tabelle der Ausflußcoefficienten für rectanguläre Einschnitte von 2 Fuß Breite in der dünnen Wand.

Druckhöhe h in Zollen.	2,5	4	6	8	12	16	24
Ausflußcoefficient $\mu =$	0,618	0,609	0,600	0,592	0,586	0,586	0,585
$\mu_1 = \frac{2}{3}\mu =$	0,412	0,406	0,400	0,395	0,391	0,391	0,390

Bei Anwendung der in den vorstehenden Tabellen enthaltenen Coefficienten hat man mit den Formeln:

$$1)\ Q = \mu F \sqrt{2gh} = \mu a b \sqrt{2gh},$$

$$2)\ Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2gh^3} = \mu_1 b \sqrt{2gh^3}$$

zu rechnen, und es ist b die von der angegebenen Größe möglichst wenig abweichende Breite, a die Höhe der Oeffnung, und h in 1) bis Mitte, dagegen in 2) bis untere Kante der Mündung zu messen.

Beispiele. 1) Welches Wasserquantum fließt durch eine rectanguläre Mündung von 8 Zoll Breite und 3 Zoll Höhe, wenn der Wasserspiegel 4 Fuß über der unteren Kante dieser Mündung steht? Es ist hier $F = \frac{8.3}{144} = \frac{1}{6}$ Quadratfuß; ferner die Druckhöhe $h = 4 - \frac{3}{24} = 3{,}875$ Fuß, und nach der ersten Tabelle, $\mu = \frac{0{,}614 + 0{,}623}{2} = 0{,}6185$ zu nehmen, daher das gesuchte Wasserquantum

$$Q = 0{,}6185 \ .\ \frac{1}{6} \ .\ 7{,}906 \sqrt{3{,}875} = 0{,}815 \ .\ 1{,}968$$
$$= 1{,}604 \text{ Cubikfuß pr. Secunde.}$$

2) Welches Wasserquantum fließt durch einen Wandeinschnitt von 9 Zoll Breite, wenn das Wasser 6 Zoll über der Schwelle steht? Es ist hier $b = 9$ Zoll $= \frac{3}{4}$ Fuß, $h = 6$ Zoll

$= \frac{1}{2}$ Fuß, daher nach der zweiten Tabelle $\mu_1 = 0{,}393$ und die Ausflußmenge $Q = 0{,}393 \cdot \frac{3}{4} \cdot 7{,}906 \sqrt{(\frac{1}{2})^3} = 2{,}331 \cdot 0{,}35355$ $= 0{,}824$ Cubikfuß pr. Secunde.

§. 39. Unvollkommene Contraction. Der Contractionscoefficient nimmt zu, wenn die dünne Wand, worin sich die Mündung befindet, nach der Mündung zu unter 180°, aber ab, wenn sie über 180° convergirt, und ist auch größer, wenn die Contraction auf einer oder mehreren Seiten der Mündung ganz aufgehoben ist. Im letzteren Falle hat man es mit der unvollständigen Contraction zu thun. Bei derselben findet also ein stärkerer Ausfluß, zugleich auch noch eine schiefe Richtung des Strahles statt, wie II, in Fig. 314.

Fig. 314.

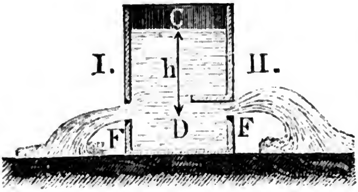
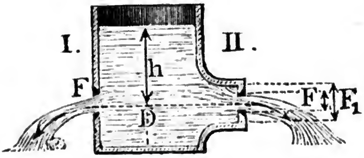


Fig. 315.



Ist n das Verhältniß des eingefaßten Theiles vom Mündungsumfang, wo also eine Contraction nicht statthat, zum ganzen Umfang der Mündung, μ_n der entsprechende Ausflußcoefficient und μ_0 der bei vollständiger Contraction wie I, in Fig. 314, so kann man setzen:

$\mu_n = (1 + 0{,}155 \cdot n)\mu_0$.

Unvollkommene Contraction der Wasserstrahlen tritt ein, wenn die Mündung einen ansehnlichen Theil von der Wand einnimmt, in welcher dieselbe befindlich ist, wenn also das Wasser vor der Mündung nicht als stillstehend angesehen werden kann, sondern an derselben mit einer ansehnlichen Geschwindigkeit ankommt, wie bei II, in Fig. 315. Bezeichnet man das Verhältniß $\frac{F}{F_1}$ des Querschnittes F der Mündung zur Wandfläche oder zum Querschnitte F_1 des ankommenden Wassers durch n, so hat man die Ausflußcoefficienten für kreisförmige und rectanguläre Mündungen aus folgenden Tabellen zu nehmen, wodurch die Correctionen $\mu_n - \mu_0$ gegeben werden, um welche die Ausflußcoefficienten μ_0 für vollkommene Contraction (I, Fig. 315) zu vergrößern sind, um die Coefficienten μ_n für unvollkommene Contraction (II, Fig. 315) zu erhalten.

Tabelle I.

Die Correctionen der Ausflußcoefficienten für kreisrunde Mündungen bei unvollkommener Contraction.

n		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	= 0,	014	034	059	092	134	189	260	351	471

Tabelle II.

Die Correctionen der Ausflußcoefficienten für rectanguläre Mündungen bei unvollkommener Contraction.

n		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	= 0,	019	042	071	107	152	208	278	365	473

Die Coefficienten in den vorstehenden Tabellen setzen voraus, daß die Druckhöhe an einer Stelle gemessen worden sei, wo das Wasser ziemlich still steht; wird sie aber an einer Stelle vor der Mündung F gemessen, wo der Querschnitt des Wasserstromes $= F_1$, die Geschwindigkeit also $= \frac{F}{F_1} v$ ist, so hat man für die Poncelet'schen Mündungen zu setzen:

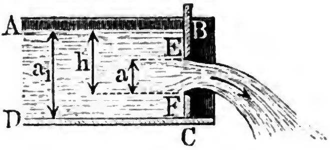
$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0{,}641 \left(\frac{F}{F_1}\right)^2 = 0{,}641\ n^2,$$

und daher

$$Q = \left[1 + 0{,}641 \left(\frac{a\,b}{a_1 b_1}\right)^2\right] \mu_0\, a\, b \sqrt{2 g \left(h - \frac{a}{2}\right)}$$

wo a und b Höhe und Breite der Mündung EF, Fig. 316 und a_1 und b_1 Höhe und Breite des ankommenden Wasser-

Fig. 316.



stromes $ABCD$, sowie h die Tiefe der unteren Mündungskante F unter dem Wasserspiegel bezeichnet.

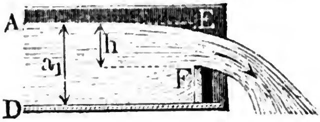
Tabelle III.

Die Correctionen der Ausflußcoefficienten für die Poncelet'schen Mündungen bei bewegtem Wasser.

n	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0,$	002	006	014	026	040	058	103	160

Für Poncelet'sche Ueberfälle, Fig. 317, hat man

Fig. 317.



$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 1,718 \left(\frac{F}{F_1}\right)^4 = 1,718\, n^4;$$

für Ueberfälle, welche über die ganze Wand weggehen, wo die Contraction an den Seiten wegfällt, ist hingegen

$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0,041 + 0,369\, n^2$$

zu setzen.

Es ist hiernach die Ausflußmenge im ersten Falle:

$$Q_1 = \frac{2}{3}\left[1 + 1,718\left(\frac{h\, b}{a_1\, b_1}\right)^4\right] \mu_0\, b \sqrt{2 g h^3},$$

und im zweiten:

$$Q_1 = \frac{2}{3}\left[1,041 + 0,369\left(\frac{h}{a_1}\right)^2\right] \mu_0\, b \sqrt{2 g h^3},$$

wobei die Bezeichnungen die obigen sind.

Nach diesen Formeln sind die folgenden Tabellen IV. und V. berechnet worden.

Tabelle IV.

Die Correctionen der Ausflußcoefficienten für die Poncelet'schen Ueberfälle bei bewegtem Wasser.

n	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0,$	000	001	003	007	014	026	044	070	107

Tabelle V.

Die Correctionen der Ausflußcoefficienten für Ueberfälle über die ganze Wand, ohne Seitencontractionen.

n	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0,$	041	042	045	049	056	064	074	100	133

Beispiel 1. Welches Wasserquantum giebt die Mündung im Beispiel 1. des vorigen Paragraphen, wenn sie in einer ebenen Wand von 10 Zoll Breite und 6 Zoll Höhe ausgeschnitten ist? Hier ist $n = \frac{F}{F_1} = \frac{8.3}{10.6} = 0,4$, daher nach Tabelle II., $\frac{\mu_{0,4} - \mu_0}{\mu_0} = 0,107$, und das oben gefundene Wasserquantum $Q = 1,604$ Cubikfuß um $0,107 \,.\, 1,604 = 0,172$ Cubikfuß größer, also im Ganzen $= 1,604 + 0,172 = 1,776$ Cubikfuß zu setzen.

Beispiel 2. Wenn der Ueberfall im Beispiel 2. des vorigen Paragraphen in einer ebenen Wand von $1\frac{1}{4}$ Fuß Breite ausgeschnitten ist, und die Ueberfall-Schwelle fünf Zoll über dem Gerinnboden steht, so hat man

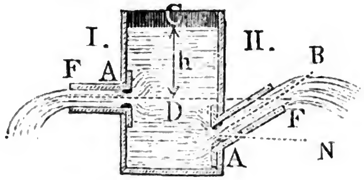
$$n = \frac{F}{F_1} = \frac{9 \,.\, 6}{15\,(6+5)} = \frac{54}{165} = 0,33,$$

daher die Correction der Ausflußmenge nach Tabelle IV.: 0,021 und $Q = 0,824 + 0,824 \,.\, 0,021 = 0,841$ Cubikfuß.

§. 40. Ausfluss durch kurze Ansatzröhren.

Für den Ausfluß durch eine kurze cylindrische Ansatzröhre, welche 2- bis 3mal so lang als weit ist, wie AF in Fig. 318, I, hat man den Contractionscoefficienten $\alpha = 1$, daher den Ausflußcoefficienten $\mu =$ dem Geschwindigkeitscoefficienten φ, und zwar im Mittel $= 0,815$ zu setzen. Der entsprechende Widerstandscoefficient ist $\zeta = 0,505$.

Fig. 318.



Ragt die Röhre im Innern des Gefäßes vor und ist die Stirnfläche derselben schmal, so fällt μ noch kleiner aus, und es hört vielleicht gar der volle Ausfluß auf.

Ist die Röhre schief angesetzt, oder dieselbe innen schief abgeschnitten, wie AF in Fig. 318, II, so wird μ kleiner, folg-

lich ζ größer, und zwar um so mehr, je größer der Winkel $BAN = \delta$ ist, um welchen die Axe AB der Röhre von der Normale AN zur Einmündungsebene abweicht. Es ist überhaupt

$$\zeta = 0{,}505 + 0{,}303\, sin.\, \delta + 0{,}226\, (sin.\, \delta)^2$$

zu setzen, oder von folgender Tabelle I. Gebrauch zu machen.

Tabelle I.

Winkel δ	0^0	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0
Widerstandscoefficient $\zeta =$	0,505	0,565	0,635	0,713	0,794	0,870	0,937
Ausflußcoefficient $\mu =$	0,815	0,799	0,782	0,764	0,747	0,731	0,719

Sitzt die kurze Ansatzröhre in einer Wand, deren Inhalt F_1 den Querschnitt F der Röhre nicht vielfach übertrifft, so tritt das Wasser mit unvollkommener Contraction in die Röhre, und es findet deshalb eine Vergrößerung der Ausflußmenge statt. Ist n das Querschnittsverhältniß $\frac{F}{F_1}$ zwischen der Röhre und der Wand, so hat man:

$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0{,}102\, n + 0{,}067\, n^2 + 0{,}046\, n^3,$$

und es ist hiernach Tabelle II., enthaltend die Correctionen der Ausflußcoefficienten für kurze Ansatzröhren wegen Unvollkommenheit der Contraction, berechnet worden.

Tabelle II.

n	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0,$	013	027	043	060	080	102	127	152	181

Bei conisch convergenten Ansatzröhren ist μ größer und bei conisch divergenten kleiner als bei kurzen cylindrischen Ansatzröhren, wofern nur für F der Querschnitt der Ausmündung eingesetzt wird. Bei circa 13^0 Convergenz der conisch convergenten Röhre ist μ am größten, und zwar $= 0{,}95$. Sehr kurze innen abgerundete oder nach der Gestalt des contrahirten Wasserstrahles geformte Mundstücke geben sogar $\mu = 0{,}97$ bis 0,99.

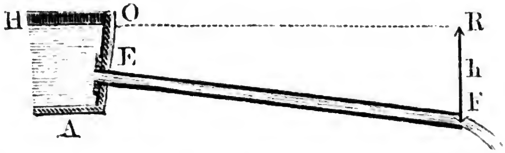
Beispiel. Welches Wasserquantum liefert eine kurze cylindrische Ansatzröhre von $2\frac{1}{2}$ Zoll Weite unter 5 Fuß Druck, wenn ihre Axe 25 Grad von der Normale zu ihrer Einmündungsebene abweicht? Es ist hier nach Tabelle I.

$$\zeta = \frac{0{,}635 + 0{,}713}{2} = 0{,}674, \text{ oder nach obiger Formel}$$
$$= 0{,}505 + 0{,}303\ sin.\ 25^0 + 0{,}226\ (sin.\ 25^0)^2$$
$$= 0{,}505 + 0{,}128 + 0{,}040 = 0{,}673, \text{ daher}$$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1{,}673}} = 0{,}773, \text{ ferner } F = \left(\frac{5}{24}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{4} = 0{,}03409$$
Quadratfuß, und da
$$\sqrt{h} = \sqrt{5} = 2{,}236,$$
so folgt das gesuchte Ausflußquantum
$$Q = 0{,}773 \cdot 7{,}906 \cdot 0{,}03409 \cdot 2{,}236 = 0{,}4658 \text{ Cubikfuß}.$$

§. 41. Ausfluss durch lange Röhren. Ist h das Gefälle vom Wasserspiegel HO bis Mitte der Ausflußmündung F, oder, wenn Ausfluß unter Wasser statthat, von Wasserspiegel zu Wasserspiegel gemessen, ferner l die Länge und d die Weite der Röhrenleitung EF, Fig. 319, ζ der Wider-

Fig. 319.



stands- oder Reibungscoefficient der Röhre, ζ_0 aber der für das Einmündungsstück, so hat man:

$$h = \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d}\right) \frac{v^2}{2g} \text{ und umgekehrt:}$$

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d}}}, \text{ übrigens auch } Q = \frac{\pi d^2}{4} v.$$

Hat die Röhre einen rectangulären Querschnitt von der Höhe a und Breite b, so ist $\zeta \dfrac{l}{d} = \zeta \dfrac{(a + b) l}{2ab}$, und $Q = Fv = abv$ zu setzen.

Der Reibungscoefficient ζ ist $= 0{,}01439 + \dfrac{0{,}016921}{\sqrt{v}}$, und läßt sich am bequemsten aus folgender Tabelle entnehmen.

Tabelle I.

Coefficienten der Reibung des Wassers in Röhren.

$v =$		0,1	0,2	0,3	0,5	0,6	0,8	1,0
$\zeta =$	0,0	679	522	453	383	362	333	313

$v =$		1,5	2,0	3,0	5,0	8,0	12,0	20,0 Fuß.
$\zeta =$	0,0	282	263	242	220	204	192	182

Der Coefficient des Eintrittswiderstandes ist wie für kurze Röhren 0,505; läßt sich aber durch Abrundung oder Eintrichtern auf 0,08 herabziehen und bei langen Röhren ganz vernachlässigen. Mit großem Vortheile kann man dann folgende Tabelle gebrauchen.

Tabelle II.

(Siehe Seite 442 und 443.)

Von den je zwei Zahlen, welche einer oben angegebenen Röhrenweite und links ausgedrückten Wassergeschwindigkeit entsprechen, giebt die obere das Ausflußquantum pr. Minute in Cubikfußen und der untere das Gefälle der Röhrenleitung auf je 1000 Fuß Länge derselben an.

Zu den angegebenen Gefällen oder Druckhöhen hat man überdies noch diejenige Druckhöhe zu addiren, welche nöthig ist, um das Wasser mit einer der Ausflüßgeschwindigkeit gleichen Geschwindigkeit v in die Röhre einzuführen, und welche

$$h_1 = (1 + \zeta_0)\frac{v^2}{2g} = 0{,}016\ (1 + \zeta_0)\ v^2,$$

also gewöhnlich

$$h_1 = 0{,}016\ .\ 1{,}505\ v^2 = 0{,}024\ v^2,$$

oder bei genauer Abrundung der Eintrittsmündung,

$$h_1 = 0{,}016\ .\ 1{,}08\ v^2 = 0{,}017\ v^2$$

zu setzen ist.

Beispiel 1. Welches Wasserquantum giebt eine Röhrenleitung von 2500 Fuß Länge und 3 Zoll Weite bei $3\frac{1}{2}$ Fuß Gefälle? Nach der Formel

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \zeta_0 + \zeta\frac{l}{d}}}$$

ist, wenn man

$$h = 3{,}5,\ \zeta_0 = 0{,}505,\ \frac{l}{d} = \frac{2500}{\frac{1}{4}} = 10000$$

und vorläufig $\zeta = 0{,}030$ setzt, die Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \frac{7{,}906\sqrt{3{,}5}}{\sqrt{1{,}505 + 0{,}03 \,.\, 10000}} = 7{,}906\sqrt{\frac{3{,}5}{301{,}5}}$$

$$= \frac{7{,}906}{\sqrt{86{,}2}} = \frac{7{,}906}{9{,}28} = 0{,}85 \text{ Fuß}.$$

Der Geschwindigkeit 0,85 Fuß entspricht aber genauer der Coefficient $\zeta = 0{,}0328$, daher ist richtiger:

$$v = 7{,}906\sqrt{\frac{3{,}5}{329{,}5}} = \frac{7{,}906}{\sqrt{94{,}1}} = \frac{7{,}906}{9{,}7} = 0{,}815 \text{ Fuß},$$

und die Ausflußmenge pr. Sec. $Q = \frac{\pi d^2}{4} \cdot v$ $= 0{,}04909 \,.\, 0{,}815 = 0{,}04$ Cubikfuß, also pr. Min. $60\,Q = 2{,}4$ Cubikfuß. Die Tabelle II. giebt für eine dreizöllige Röhre bei 1,367 Fuß Gefälle auf 1000 Fuß Länge, $v = 0{,}8$ und $60\,Q = 2{,}356$; bei 2,004 Fuß Gefälle aber $v = 1{,}0$ und $60\,Q = 2{,}945$, daher für das gegebene Gefälle $\frac{3{,}5}{2{,}5} = 1{,}4$, durch Interpolation $v = 0{,}8 + \frac{33}{637}\ 0{,}2 = 0{,}810$ Fuß und $60\,Q = 2{,}356 + \frac{33}{637} \cdot 0{,}589 = 2{,}356 + 0{,}031$ $= 2{,}387$ Cubikfuß. Zieht man aber noch das zur Erzeugung der Geschwindigkeit von 0.81 Fuß nöthige Gefälle $0{,}024 \,.\, 0{,}656 = 0{,}016$ Fuß in Betracht, setzt man also das Gefälle $= \frac{3{,}5 - 0{,}016}{2{,}5} = 1{,}394$ Fuß, so hat man

$v = 0{,}8 + \frac{27}{637} \cdot 0{,}2 = 0{,}809$ Fuß und $60\,Q = 2{,}390$ Cubikfuß. Dieselben Werthe giebt auch die Formel, wenn man für ζ_1 den angemessenen Werth 0,0332 einsetzt.

Beispiel 2. Welches Gefälle wird erfordert, um durch eine 5 Zoll weite und 750 Fuß lange Röhrenleitung pr. Min. 20 Cubikfuß Wasser fortzuleiten. Die Tabelle giebt in der Verticalcolumne mit der Ueberschrift 5, für $60\,Q = 20{,}453$, $v = 2{,}5$ und $1000\,h = 6{,}022$; für $60\,Q = 16{,}362$

Tabelle II.

Die Wassermengen und Druckhöhen für Röhrenleitungen von 1 bis 12 Zoll Weite bei 0,1 bis 12 Fuß Geschwindigkeit und 1000 Fuß Länge.

Geschwindigkeit des Wassers in Füßen	Innere Röhrenweite *d* in Zollen.					
	1	2	3	4	5	6
0,1	0,0327	0,1309	0,2945	0,5236	0,8181	1,1781
	0,1304	0,0657	0,0435	0,0326	0,0261	0,0217
0,2	0,0654	0,2618	0,5890	1,0472	1,6362	2,3562
	0,4011	0,2005	0,1337	0,1003	0,0802	0,0668
0,3	0,0982	0,3927	0,8836	1,5708	2,4544	3,5343
	0,7825	0,3912	0,2608	0,1956	0,1565	0,1304
0,4	0,1309	0,5236	1,1781	2,0944	3,2725	4,7124
	1,2638	0,6319	0,4213	0,3159	0,2527	0,2106
0,6	0,1963	0,7854	1,7671	3,1415	4,9087	7,0686
	2,5045	1,2522	0,8348	0,6261	0,5009	0,4174
0,8	0,2618	1,0472	2,3562	4,1888	6,5450	9,4248
	4,0910	2,0460	1,3670	1,0230	0,8182	0,6812
1,0	0,3272	1,3090	2,9452	5,2360	8,1812	11,781
	6,0115	3,0057	2,0038	1,5029	1,2023	1,0019
1,25	0,4091	1,6360	3,6820	6,5450	10,227	14,726
	8,8560	4,4280	2,9520	2,2140	1,7710	1,4760
1,5	0,4909	1,9635	4,4179	7,8540	12,272	17,671
	10,154	5,0770	3,3847	2,5385	2,0308	1,6923
1,75	0,5727	2,2907	5,1542	9,1630	14,317	20,617
	15,982	7,9910	5,3273	3,9955	3,1964	2,6637
2,0	0,6545	2,6180	5,8905	10,472	16,362	23,562
	20,237	10,113	6,7457	5,0592	4,0474	3,3728
2,5	0,8181	3,2725	7,3631	13,090	20,453	29,452
	30,110	15,055	10,037	7,5275	6,0220	5,0183
3,0	0,9817	3,9270	8,8357	15,708	24,544	35,343
	41,748	20,874	13,916	10,437	8,3496	6,9580
4,0	1,3090	5,2360	11,731	20,944	32,725	47,124
	70,195	35,098	23,398	17,549	14,039	11,699
5,0	1,6362	6,5450	14,726	26,180	40,906	58,905
	105,39	52,697	35,132	26,348	21,079	17,566
6,0	1,9635	7,8540	17,671	31,415	49,087	70,686
	147,226	73,613	49,075	36,806	29,445	24,538
8,0	2,6180	10,472	23,562	41,888	65,450	94,248
	250,33	125,165	83,443	62,582	50,066	41,722
10,0	3,2725	13,090	29,452	52,360	81,812	117,81
	379,02	189,51	126,34	94,750	75,804	63,170
12,0	3,927	15,118	35,343	62,832	98,175	141,37
	530,84	265,42	176,95	132,71	106,17	88,47

Tabelle II.

Die Wassermengen und Druckhöhen für Röhrenleitungen von 1 bis 12 Zoll Weite bei 0,1 bis 12 Fuß Geschwindigkeit und 1000 Fuß Länge.

Innere Röhrenweite *d* in Zollen.					
7	8	9	10	11	12
1,6035 0,0186	2,0944 0,0163	2,6507 0,0145	3,2725 0,01304	3,9597 0,0118	4,7124 0,0109
3,2070 0,0573	4,1888 0,0501	5,3014 0,0446	6,5450 0,0401	7,9195 0,0365	9,4248 0,03342
4,8106 0,1118	6,2832 0,0978	7,9522 0,0869	9,8175 0,0782	11,879 0,0711	14,137 0,0652
6,4141 0,1805	8,3776 0,1580	10,603 0,1404	13,09 0,1264	15,839 0,1149	18,850 0,1053
9,6211 0,3578	12,566 0,3131	15,904 0,2783	19,635 0,25045	23,758 0,2277	28,274 0,2087
12,828 0,5845	16,755 0,5114	21,206 0,4546	26,180 0,4091	31,678 0,3719	37,699 0,3409
16,035 0,8588	20,944 0,7514	26,507 0,6679	32,725 0,6012	39,597 0,5465	47,124 0,5010
20,044 1,2650	26,180 1,1070	33,134 0,9840	40,906 0,8856	49,496 0,8051	58,905 0,7380
24,053 1,4506	31,416 1,2692	39,761 1,1282	49,087 1,0154	59,396 0,9231	70,686 0,8462
28,062 2,2831	36,652 1,9977	46,387 1,7758	57,269 1,5982	69,295 1,4529	82,467 1,3318
32,070 2,8910	41,888 2,5296	53,014 2,2485	65,450 2,0237	79,195 1,8397	94,248 1,6864
40,088 4,3014	52,360 3,7637	66,268 3,3457	81,812 3,0110	98,993 2,7373	117,81 2,5092
48,106 5,9640	62,832 5,2185	79,521 4,6387	98,175 4,1748	118,79 3,7953	141,37 3,4790
64,141 10,028	83,776 8,7740	106,03 7,7994	130,90 7,0195	158,39 6,3814	188,50 5,8495
80,176 15,056	104,72 13,174	132,54 11,710	163,62 10,5394	197,99 9,5813	235,62 8,783
96,211 21,032	125,66 18,403	159,04 15,247	196,35 14,723	237,58 13,384	282,74 12,268
128,28 35,761	167,55 31,291	212,06 27,814	261,80 25,033	316,78 22.757	376,99 20,861
160,35 54,150	209,44 47,380	265,07 42,113	327,25 37,902	395,97 34,46	471,24 31,585
192,42 75,83	251,33 66,35	318,09 58,98	392,70 53,08	475,17 48,26	565,48 44,24

dagegen $v = 2{,}0$ und $1000\,h = 4{,}0474$, und hiernach interpolirt sich für $60\,Q = 20$, $v = 2{,}5 - \frac{453}{4091} \cdot 0{,}5$ $= 2{,}5 - 0{,}055 = 2{,}445$ Fuß und

$1000\,h = 6{,}022 - \frac{453}{4091} \cdot 1{,}9746 = 6{,}022 - 0{,}219$ $= 5{,}803$ Fuß, folglich ist das Gefälle für die gegebene Länge von $\frac{3}{4} \cdot 1000$ Fuß, $h = \frac{3}{4} \cdot 5{,}803 = 4{,}352$ Fuß, und hierzu noch das Gefälle zur Erzeugung der Geschwindigkeit, d. i. $0{,}024 \cdot 2{,}5^2$ $= 0{,}15$ Fuß gerechnet, folgt das ganze Gefälle $h_1 = 4{,}502$ Fuß.

Beispiel 3. Welche Weite muß eine Röhrenleitung von 500 Fuß Länge erhalten, die bei einem Gefälle von $\frac{1}{2}$ Fuß, pr. Minute 10 Cubikfuß Wasser abführt? Es ist hier $1000\,h$ $= 1$ und $60\,Q = 10$, und nach Tabelle II. jedenfalls eine Weite von 5 bis 6 Zollen anzuwenden. Die 5zöllige Röhre giebt beim Gefälle 1, das Wasserquantum

$$6{,}545 + \frac{1{,}000 - 0{,}818}{1{,}202 - 0{,}818} \cdot (8{,}181 - 6{,}545) = 6{,}545 + \frac{182 \cdot 1{,}636}{384}$$

$= 6{,}545 + 0{,}775 = 7{,}320$ Cubikfuß; die 6zöllige hingegen $= 11{,}781 - \frac{1{,}002 - 1{,}000}{1{,}002 - 0{,}6812} \cdot (11{,}781 - 9{,}425)$

$$= 11{,}781 - \frac{20 \cdot 2{,}356}{3208} = 11{,}781 - 0{,}015 = 11{,}766 \text{ C.-Fuß};$$

und hiernach folgt durch eine dritte Interpolation, die Weite bei welcher 10 Cubikfuß Wasser geliefert werden:

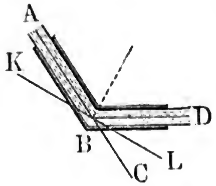
$$d = 5 + \frac{10 - 7{,}320}{11{,}766 - 7{,}320} \cdot 1 = 5 + \frac{2{,}68}{4{,}446} = 5{,}6 \text{ Zoll.}$$

§. 42. **Knie- und Kropfröhren.** Beim Durchgang des Wassers durch ein Knie ABD, Fig. 320, erleidet dasselbe einen Verlust an Druckhöhe, welcher durch die Formel:

$$h_1 = \zeta_1 \cdot \frac{v^2}{2g} = [0{,}9457\,(sin.\,\delta)^2 + 2{,}047\,(sin.\,\delta)^4]\,\frac{v^2}{2g}$$

angegeben wird, wenn δ den Bricol- oder halben Ablenkungswinkel $ABK = DBL = \frac{1}{2}\,CBD$ bezeichnet.

Fig. 320.



Folgende Tabelle enthält die entsprechenden Widerstandscoefficienten für eine Reihe von Bricolwinkeln. Hiernach ist für eine Knieröhre, deren Axen einen Rechtwinkel bilden, wo also $\delta = 45^0$ beträgt, der Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}984$, also nahe $=$ Eins, also der Druckhöhenverlust $h_1 = \frac{v^2}{2g}$.

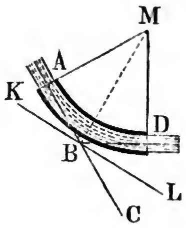
Tabelle I.

Die Coefficienten des Kniewiderstandes.

$\delta^0 =$	10	20	30	40	45	50	60	70
$\zeta_1 =$	0,046	0,139	0,364	0,740	0,984	1,260	1,861	2,431

Gekrümmte Röhren geben bei gleichen Ablenkungswinkeln kleinere Druckverluste als Knieröhren. Ist β der Ablenkungs- oder Centriwinkel $CBD = AMD$, Fig. 321, eines solchen Rohres, so läßt sich der den Krümmungswiderstand messende Verlust an Druckhöhe

Fig. 321.



$$h_2 = \zeta_2 \frac{\beta}{180} \frac{v_2}{2g}$$

setzen, und es ist der Coefficient ζ_2 von dem Verhältnisse $\frac{a}{r}$ der halben Röhrenweite a zum Krümmungshalbmesser $MD = r$ der Röhrenaxe abhängig.

Folgende Tabellen enthalten die Widerstandscoefficienten für verschiedene Werthe von $\frac{a}{r}$.

Tabelle II.

Die Coefficienten des Krümmungswiderstandes in cylindrischen Röhren.

$\frac{a}{r} =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\zeta_2 =$	0,131	0,138	0,158	0,206	0,294	0,440	0,661	0,977	1,408	1,978

Tabelle III.

Die Coefficienten des Krümmungswiderstandes in parallelepipedischen Röhren.

$\frac{a}{r} =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\zeta_2 =$	0,12	0,14	0,18	0,25	0,40	0,64	1,02	1,55	2,27	3,23

§. 43. Springende Wasserstrahlen. Steigt das ausfließende Wasser in einem Strahle senkrecht auf, so hat es einen **Luftwiderstand** zu überwinden, weshalb die **Sprunghöhe** nicht die volle Geschwindigkeitshöhe erlangt.

Die Steighöhe ist nicht allein von der Geschwindigkeitshöhe des ausfließenden Wassers, sondern auch von der Form und Weite der Mündung abhängig. Ist h die Druck- oder theoretische Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$ nicht über 80 Fuß, so läßt sich setzen:

1) für den Wasserstrahl, welcher aus einer 1 Centimeter (5 Linien) weiten Kreismündung in der dünnen Wand senkrecht aufsteigt, die Sprunghöhe

$$s = \frac{h}{1 + 0{,}003634\, h + 0{,}00005732\, h^2} \text{ Fuß.}$$

2) für den Wasserstrahl, welcher aus einer kurzen conischen Röhre mit innerer Abrundung und 1 Centimeter Mündungsweite senkrecht aufsteigt, die Sprunghöhe

$$s_1 = \frac{h}{1{,}0162 + 0{,}002231\, h + 0{,}00004\, h^2} \text{ Fuß.}$$

Nach diesen Formeln ist folgende Tabelle IV. berechnet worden, welche in der ersten Zeile eine von 10 zu 10 Fuß steigende Reihe von Geschwindigkeitshöhen, in der zweiten Zeile die entsprechenden Steighöhen beim Ausfluß durch die Kreismündung in der dünnen Wand und in der dritten Zeile die entsprechenden Steighöhen beim Ausflusse durch die kurze conische Röhre enthält.

Tabelle IV.

Die Steighöhen für Geschwindigkeitshöhen von 0 bis 70 Fuß.

$h =$	10	20	30	40	50	60	70 Fuß
$s =$	9,60	18,26	25,85	32,33	37,74	42,12	45,60
$s_1 =$	9,59	18,57	26,81	34,21	40,73	46,36	51,16

Bei größerer Mündungsweite fallen die Sprunghöhen noch etwas größer aus.

Wird das Wasser dem Mundstücke unter der Druckhöhe h_0 durch eine Röhre von der Länge l und der Weite d zugeführt, so hat man hier die theoretische Geschwindigkeitshöhe

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{h_0}{1 + \zeta_0 + \zeta_1 \frac{l}{d}}$$ einzusetzen. (S. Seite 441.)

§. 44. Widerstände durch Verengungen.

Geht die Geschwindigkeit v_1 des Wassers plötzlich in eine andere Geschwindigkeit v über, so verliert dieses einen Druck, welcher gemessen wird durch die Höhe:

$$h = \frac{(v_1 - v)^2}{2g}.$$

Entspricht v_1 dem Röhrenquerschnitte F_1 und v dem Quer-

schnitte F, so hat man $F_1 v_1 = F v$, und daher auch

$$h = \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g} = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g}, \text{ wo } \zeta = \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2$$

den entsprechenden Widerstandscoefficienten bezeichnet.

Diese Formel findet bei dem in Fig. 822 abgebildeten Falle ihre unmittelbare Anwendung; bei dem in Fig. 823 abge-

Fig. 822.

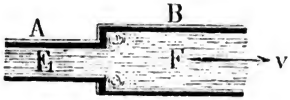
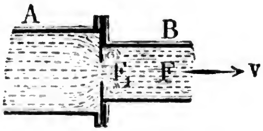


Fig. 823.



bildeten Falle ist aber statt F_1, αF_1 einzuführen, weil hier der durch die Mündung F_1 gehende Strahl eine Contraction erleidet, so daß er mit einem Querschnitte αF_1 in das Rohr vom Querschnitte F eintritt. Statt α sind die oben (S. 435) angegebenen Coefficienten für voll- oder unvollkommene Contraction einzusetzen.

Die Widerstände, welche das Wasser beim Durchgang durch Schieber, Hähne, Klappen und Ventile zu überwinden hat, sind hiernach ebenfalls zu beurtheilen, am bequemsten und sichersten aber mit Hülfe der in folgenden Tabellen enthaltenen Coefficienten zu berechnen.

Tabelle I.

Die Widerstandscoefficienten für Schieber S, Fig. 324 und 325, in parallelepipedischen Röhren.

$\frac{F_1}{F} =$	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
$\zeta =$	0,09	0,39	0,95	2,08	4,02	8,12	17,8	44,5	193

Fig. 324.

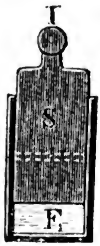


Fig. 325.

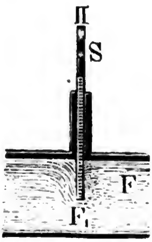


Fig. 326.

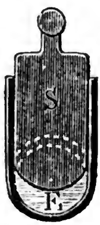


Tabelle II.

Die Widerstandscoefficienten für Schieber *S*, Fig. 326, in cylindrischen Röhren.

Stellhöhe $s =$	$^1/_8$	$^2/_8$	$^3/_8$	$^4/_8$	$^5/_8$	$^6/_8$	$^7/_8$
Querschnitts-verhältniß $\frac{F_1}{F} =$	0,948	0,856	0,740	0,609	0,466	0,315	0,159
Widerstands-coefficient $\zeta =$	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,0	97,8

Tabelle III.

Die Widerstandscoefficienten für einen Hahn *H*, im parallelepipedischen Rohre *AB*, Fig. 327.

Stellwinkel	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	55^0	$66^3/_4{}^0$
$\frac{F_1}{F} =$	0,849	0,687	0,520	0,352	0,188	0,110	0
$\zeta =$	0,31	1,84	6,15	20,7	95,3	275	∞

Fig. 327.

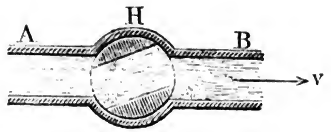


Tabelle IV.

Die Widerstandscoefficienten für einen Hahn im cylindrischen Rohre.

Stell-winkel	10^0	20^0	30^0	40^0	50^0	60^0	65^0	$82^1/_8{}^0$
$\frac{F_1}{F} =$	0,850	0,692	0,535	0,385	0,250	0,137	0,091	0
$\zeta =$	0,29	1,56	5,47	17,3	52,6	206	486	∞

Tabelle V.

Die Widerstandscoefficienten für ein Drosselventil K im parallelepipedischen Rohre AB, Fig. 328.

Stellwinkel	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	90°
$\frac{F_1}{F} =$	0,826	0,658	0,500	0,357	0,234	0,134	0,060	0
$\zeta =$	0,45	1,34	3,54	9,27	24,9	77,4	368	∞

Fig. 328.

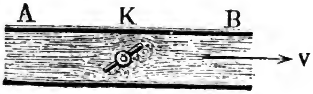


Tabelle VI.

Die Widerstandscoefficienten für ein Drosselventil im cylindrischen Rohre.

Stellwinkel	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	90°
$\frac{F_1}{F} =$	0,826	0,658	0,500	0,357	0,234	0,134	0,060	0
$\zeta =$	0,52	1,54	3,91	10,8	32,6	118	751	∞

Für den Durchgang des Wassers durch ein Kegelventil V mit Stiel, wie Fig. 329, hat man, wenn F den Querschnitt der Röhre und F_1 den der Apertur ausdrückt:

$$\zeta = 1{,}645 \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2, \text{ z. B. für } F_1 = 0{,}4\, F,$$

$$\zeta = 3{,}11^2 = 9{,}6.$$

Fig. 329.

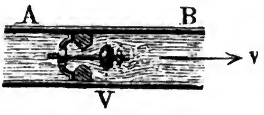
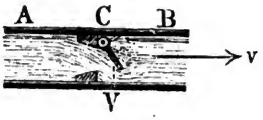


Fig. 330.

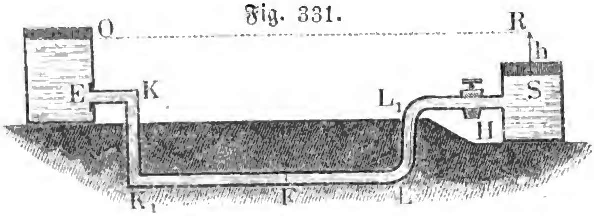


Der Aufschub des Ventiles muß wenigstens der halben Weite der Apertur gleich sein.

Die Ventilklappe V mit Drehungsaxe C, Fig. 330, giebt bei 45° Eröffnung ziemlich denselben Widerstandscoefficienten.

Beispiel. Welches Wasserquantum liefert eine Röhrenleitung EFH, Fig. 331, von 600 Fuß Länge und $\frac{1}{2}$ Fuß Weite mit zwei rechtwinkeligen Knien K, K_1 und zwei Kröpfen

Fig. 331.



L, L_1 von $\frac{1}{2}$ Fuß Krümmungshalbmesser, bei 11 Fuß Druckhöhe, wenn der in ihr sitzende Hahn H auf 30^0 gestellt ist.

Führen wir $\zeta = 0{,}025$ ein, so erhalten wir für die Reibung in der Röhre:

$\zeta \frac{l}{d} = 0{,}025 \cdot \frac{600}{\frac{1}{2}} = 30$; ferner ist für die beiden Kniee

$\zeta_1 = 2 \,.\, 0{,}984 = 1{,}97$, für die krummen Rohrstücke

$\zeta_2 = 2 \cdot 0{,}294 = 0{,}59$, und endlich ist für den Durchgang durch den Hahn, der Widerstandscoefficient

$\zeta_3 = 5{,}47$; daher

$$1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d} + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 1{,}50 + 30 + 8{,}03 = 39{,}53$$

$$\text{und } v = 7{,}906 \sqrt{\frac{11}{39{,}53}} = 4{,}17.$$

Der Geschwindigkeit $v = 4{,}17$ Fuß entspricht aber $\zeta_1 = 0{,}0225$, also $\zeta \frac{l}{d} = 27{,}0$, daher ist schärfer

$$v = 7{,}906 \sqrt{\frac{11}{36{,}53}} = 4{,}415.$$

Nimmt man $v = 4{,}34$ an, so folgt nun das Wasserquantum pr. Minute:

$$Q = 60 \cdot \frac{\pi d^2}{4} v = 60 \,.\, 0{,}19635 \,.\, 4{,}34 = 51{,}2 \text{ Cbfuß}.$$

§. 45. Ausfluss unter abnehmendem Drucke.

Bei dem Ausflusse des Wassers aus einem prismatischen Gefäße, welches keinen Zufluß erhält, sinkt der Wasserspiegel gleichförmig verzögert, und es ist die Zeit des ganzen Abflusses oder Leerens:

$$t = \frac{2\,Gh}{\mu F \sqrt{2gh}} = \frac{2\,Gh}{Q},$$

wenn G den horizontalen Querschnitt des Gefäßes, h die anfängliche Druckhöhe, F die Ausflußöffnung und Q das der anfänglichen Ausflußgeschwindigkeit entsprechende Ausflußquantum pr. Secunde bezeichnet.

Die Ausflußzeit t, innerhalb welcher die Druckhöhe h_1 in h_2 übergeht, der Wasserspiegel also um $h_1 - h_2$ sinkt, ist

$$t = \frac{2\,G}{\mu F \sqrt{2g}} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) = 0{,}253\ \frac{G}{\mu F}(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}).$$

Umgekehrt ist

$$h_2 = \left(\sqrt{h_1} - \frac{\mu \sqrt{2g}.F}{2\,G}\,t\right)^2.$$

Dieselben Formeln gelten auch beim Füllen eines prismatischen Gefäßes durch Zufluß aus einem sehr großen Reservoir. Ist das Zuflußreservoir A, Fig. 332, nicht sehr weit und der Querschnitt desselben G_1, so hat man die Zeit, innerhalb welcher sich der Niveauabstand h in h_1 umändert:

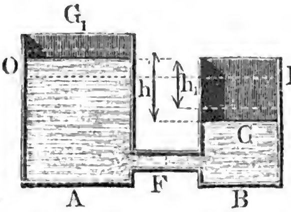
$$t = \frac{2\,G\,G_1(\sqrt{h} - \sqrt{h_1})}{\mu F(G + G_1)\sqrt{2g}}.$$

Der Abfluß des Wassers aus A nach B ist beendigt in der Zeit

$$t = \frac{2\,G\,G_1\sqrt{h}}{\mu F(G + G_1)\sqrt{2g}},$$

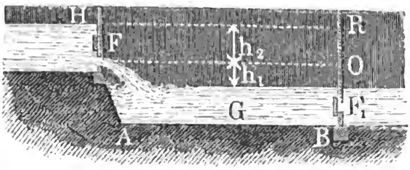
wo dann die beiden Wasserspiegel im Niveau OR liegen, welches um $\frac{Gh}{G + G_1}$ unter dem anfänglichen Oberwasserspiegel liegt.

Fig. 332.



Hiernach bestimmen sich auch die Zeiten zum Füllen und Leeren der Schifffahrts-Schleusen. Ist G der horizontale Querschnitt der Schleusenkammer AB, Fig. 333, F der Inhalt der Schutzöffnung, h_1 die Tiefe des Unterwasserspiegels unter, und h_2

Fig. 333



die Höhe des Oberwasserspiegels über der Mitte der Schutzöffnung F, so hat man die Zeit zum Anfüllen der Schleuse:

$$t = \frac{(h_1 + 2\,h_2)\,G}{\mu F \sqrt{2 g h_2}},$$

und dagegen die zum Leeren derselben, wenn F_1 den Querschnitt der Schutzmündung im Unterthor bezeichnet:

$$t_1 = \frac{2\,G\sqrt{h_1 + h_2}}{\mu F_1 \sqrt{2g}}.$$

Um die Ausflußverhältnisse unregelmäßiger Gefäße anzugeben, bedient man sich der Simpson'schen Regel. Sind G_0, G_1 und G_2 drei Querschnitte, je zwei um $\frac{s}{2}$ von einander abstehend, und bezeichnen h_0, h_1, h_2 die Höhen dieser Querschnitte über der Mündung F, so hat man hiernach zu setzen:

$$t = \frac{s}{6\mu F\sqrt{2g}}\left(\frac{G_0}{\sqrt{h_0}} + \frac{4\,G_1}{\sqrt{h_1}} + \frac{G_2}{\sqrt{h_2}}\right), \text{ und}$$

$$Q = \frac{s}{6}\,(G_0 + 4\,G_1 + G_2), \text{ auch}$$

$$= \frac{\mu\,F\,t\sqrt{2g}}{6}\,(\sqrt{h_0} + 4\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}).$$

Beispiel. In welcher Zeit sinkt ein Teichspiegel um 3 Fuß, wenn sein Inhalt bei der anfänglichen Druckhöhe $h_0 = 20$ Fuß, $G_0 = 600000$ Quadratfuß, bei der mittleren Druckhöhe $h_1 = 18{,}5$ Fuß, $G_1 = 495000$ Quadratfuß und bei der endlichen Druckhöhe $h_2 = 17$ Fuß, $G_2 = 410000$ Quadratfuß mißt, der Querschnitt des Abzuggerinnes $= 0{,}8$ Quadratfuß und der Ausflußcoefficient für dasselbe 0,5 beträgt? Es ist:

$$t = \frac{3\,.\,0{,}1265}{6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}8}\left(\frac{600000}{\sqrt{20}} + \frac{4\,.\,495000}{\sqrt{18{,}5}} + \frac{410000}{\sqrt{17}}\right)$$

$$= \frac{0{,}1265}{0{,}8}(134160 + 460340 + 99440) = 0{,}1581\,.\,693940$$

$$= 109710'' = 30 \text{ St. } 28\tfrac{1}{2} \text{ Min.},$$

und das entsprechende Abflußquantum:

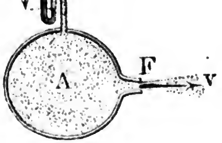
$Q = \tfrac{1}{2}\,(600000 + 4\cdot 495000 + 410000) = 1495000$ Cubikfuß.

§. 46. **Ausfluss der Luft.** Die Geschwindigkeit, mit welcher die Luft durch eine Mündung F aus einem Gefäße A, Fig. 334, ausströmt, ist durch den Ausdruck

$$v = \sqrt{2g\,\frac{p_1}{\gamma_1}\,\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\left(1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right)}$$

zu berechnen, in welchem p die äußere, p_1 die innere Pressung, γ_1 die Dichtigkeit der inneren Luft und $\varkappa$ das aus §. 36, S. 428 bekannte Wärmeverhältniß bezeichnet.

Fig. 334.



Das Ausflußquantum pr. Secunde ist $Q_2 = Fv$ und hat die Dichtigkeit

$$\gamma = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}\cdot\gamma_1.$$

Dasselbe, gemessen unter dem inneren Drucke und bei der inneren Dichtigkeit γ_1, ist

$$Q_1 = \frac{\gamma}{\gamma_1}\, Q_2 = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} F v,$$

und auf den äußeren Druck reducirt:

$$Q = \frac{p_1}{p}\, Q_1 = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \cdot F v$$

$$= F \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \sqrt{2 g \frac{p_1}{\gamma_1} \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \left(1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right)}.$$

Ist b der äußere Barometer- und h der innere Manometerstand, so hat man

$$\frac{p_1}{p} = \frac{b + h}{b}$$

zu setzen; bezeichnet ferner τ die Temperatur der inneren Luft und δ das bekannte Ausdehnungsverhältniß 0,00367 der Luft, so hat man für Metermaaß

$$\sqrt{2 g \frac{p_1}{\gamma_1}} = 395 \sqrt{1 + \delta \tau}, \text{ und für Fußmaaß}$$

$$\sqrt{2 g \frac{p_1}{\gamma_1}} = 1258 \sqrt{1 + \delta \tau} \text{ zu setzen.}$$

Bei Anwendung dieser Formeln auf das Ausströmen des Gebläsewindes und auf das Ausströmen der Luft aus Ventilationsapparaten, wo $\frac{h}{b}$ ein kleiner ächter Bruch ist, kann man

$$Q = F \sqrt{2 g \frac{p_1}{\gamma_1} \frac{h}{b} \left[1 - \frac{2\varkappa - 3}{2\varkappa} \left(\frac{h}{b}\right)\right]}$$

$$= F \left(1 - 0{,}028 \frac{h}{b}\right) \sqrt{2 g \frac{p_1}{\gamma_1} \frac{h}{b}},$$

oder noch einfacher, wenn $\frac{h}{b} < 1/2$ ist,

$$Q = F \sqrt{2 g \frac{p_1}{\gamma_1} \frac{h}{b}} = F \sqrt{2 g \varepsilon h}$$

setzen, wobei $\varepsilon = \frac{p_1}{\gamma_1 b} = \frac{p}{\gamma b}$, das Verhältniß der Dichtigkeit der Manometerfüllung zu der der äußeren Luft bezeichnet. Fügt man noch einen Ausströmungscoefficienten μ hinzu, so kann man

$$Q = \mu F \sqrt{2 g \frac{p_1}{\gamma_1} \frac{h}{b}} = 395 \mu F \sqrt{(1 + \delta \tau) \frac{h}{b}} \text{ C.-M.}$$

$$= 1258 \mu F \sqrt{(1 + \delta \tau) \frac{h}{b}} \text{ Cubikfuß setzen.}$$

Für das Ausströmen durch eine Mündung F in der dünnen Wand ist $\mu = 0{,}56$ bis $0{,}60$, durch ein kurzes conoidisches, oder ein innen gut abgerundetes conisches Mundstück mit höchstens 8 Grad Convergenz: $\mu = 0{,}92$ bis $0{,}93$, und durch eine kurze cylindrische Ansatzröhre: $\mu = 0{,}73$ bis $0{,}75$ zu setzen.

Für das Ausströmen des Windes aus Düsen ist $\mu = 0{,}92$ anzunehmen, und führt man noch den Mittelwerth der Temperatur $\tau = 10$ Grad ein, so erhält man

$$Q = 369\, F \sqrt{\frac{h}{b}} \text{ Cubikmeter} = 1179\, F \sqrt{\frac{h}{b}} \text{ Cubikfuß.}$$

Giebt man F in Quadratzoll, so ist

$$Q = 8{,}2\, F \sqrt{\frac{h}{b}} \text{ Cubikfuß.}$$

Folgende Tabelle giebt die Windmenge pr. Quadratzoll Mündungsquerschnitt für verschiedene Pressungsverhältnisse an.

$\frac{h}{b} =$	0,002	0,005	0,01	0,02	0,05	0,10	0,15	0,20
Q Cubikfuß =	0,367	0,580	0,820	1,16	1,83	2,59	3,18	3,67

$\frac{h}{b} =$	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60
Q Cubikfuß =	4,10	4,49	4,85	5,19	5,50	5,80	6,08	6,35

Ist die Temperatur der Luft vor dem Ausströmen $= \tau_1$, so sind die obigen Werthe für Q noch durch $\sqrt{\frac{1 + \delta\tau_1}{1 + 10\delta}}$, oder, wenn man wegen des Feuchtigkeitszustandes der Luft, $\delta = 0{,}004$ setzt, durch

$$\sqrt{\frac{1 + \delta\tau_1}{1{,}04}} = 0{,}98 \sqrt{1 + 0{,}004\,\tau_1}$$ zu multipliciren.

Dieses Volumen ist ferner noch durch

$$\frac{1 + \delta\tau}{1 + \delta\tau_1} = \frac{1{,}04}{1 + \delta\tau_1},$$

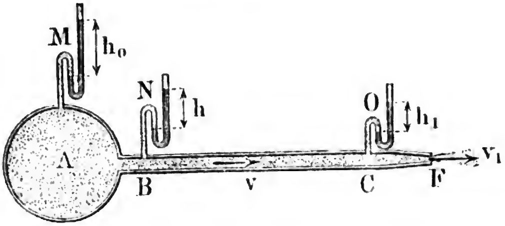
also das erstere durch

$$\sqrt{\frac{1 + 10\delta}{1 + \delta\tau_1}} = \sqrt{\frac{1{,}04}{1 + \delta\tau_1}} = \frac{1{,}02}{\sqrt{1 + 0{,}004\,\tau_1}}$$

zu multipliciren, um es auf die mittlere Temperatur τ $(= 10^0)$ zu reduciren.

Durchströmt die Luft eine cylindrische Röhre BC, Fig. 335, deren Länge $= l$ und Weite $= d$ ist, mit der mittleren Ge-

Fig. 335.



schwindigkeit v, so verliert dieselbe eine durch die Differenz der Manometerstände h und h_1 gemessene Pressung, und es ist

$$h - h_1 = \zeta \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g\varepsilon} = 0{,}025 \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g\varepsilon}.$$

Bezeichnet d_1 den Durchmesser der Ausmündung F, und v_1 die Ausströmungsgeschwindigkeit, so hat man

$$\frac{v}{v_1} = \left(\frac{d_1}{d}\right)^2,$$

und daher auch

$$h - h_1 = \zeta \frac{l}{d} \left(\frac{d_1}{d}\right)^4 \frac{v_1^2}{2g\varepsilon} = 0{,}025 \frac{l}{d} \left(\frac{d_1}{d}\right)^4 \frac{v_1^2}{2g\varepsilon}.$$

Ist ferner h_0 der Manometerstand der Luft im Reservoir A, und ζ_0 der Widerstandscoefficient $\left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right)$ des Einmündungsstückes B, so hat man

$$h_0 - h = \frac{1}{\mu^2}\frac{v^2}{2g\varepsilon} = (1+\zeta_0)\frac{v^2}{2g\varepsilon} = (1+\zeta_0)\left(\frac{d_1}{d}\right)^4 \frac{v_1^2}{2g\varepsilon},$$

und bezeichnet endlich μ_1 den Ausflußcoefficienten, so wie $\zeta_1 = \frac{1}{\mu_1^2} - 1$ den Widerstandscoefficienten des Ausmündungsstückes CF, so ist das Ausflußquantum, gemessen unter dem äußeren Drucke:

$$Q = F \sqrt{\frac{2g \frac{p_1}{\gamma} \frac{h_1}{b}}{1 + \zeta_1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^4 \left(\frac{b}{b+h_1}\right)^{1,42}}}$$

$$= 1258 F \sqrt{\frac{(1 + 0{,}004\,\tau) \frac{h_1}{b}}{1 + \zeta_1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^4 \left(\frac{b}{b+h_1}\right)^{10/7}}}$$

Cubikfuß.

z. B. für $\tau = 10$ Grad, und wenn man F in Quadratzoll giebt, ist annähernd:

$$Q = 8{,}91\ F \sqrt{\frac{\frac{h_1}{b}}{1{,}18 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^4}}\ \text{Cubikfuß.}$$

Ist statt h_1 der Manometerstand h am Anfang der Windleitung gegeben, so hat man zu setzen:

$$Q = 8{,}91\ F \sqrt{\frac{\frac{h}{b}}{1{,}18 + \left(0{,}025\ \frac{l}{d} - 1\right)\left(\frac{d_1}{d}\right)^4}},$$

und ist der Manometerstand h_0 im Luftreservoir A gegeben, so gilt die Formel

$$Q = 8{,}91\ F \sqrt{\frac{\frac{h_0}{b}}{1{,}18 + \left(\zeta_0 + \zeta\ \frac{l}{d}\right)\left(\frac{d_1}{d}\right)^4}},\ \text{oder}$$

$$Q = 8{,}91\ F \sqrt{\frac{\frac{h_0}{b}}{1{,}18 + 0{,}025\ \frac{l}{d}\left(\frac{d_1}{d}\right)^4}}\ \text{Cubikfuß,}$$

wenn die Einmündung der Röhre in A gut abgerundet ist, so daß der entsprechende Widerstandscoefficient ζ_0 Null gesetzt werden kann.

Beispiel. Welches Windquantum liefert eine Windleitung BCF, Fig. 335, von 150 Fuß Länge und ½ Fuß Weite, wenn der Manometerstand im Regulator A, 3,5 und der äußere Barometerstand 27,5 Zoll beträgt, wenn ferner die Temperatur der comprimirten Luft in A, 10 Grad und endlich die Mündungsweite der conischen Düse CF, $= 3\frac{1}{2}$ Zoll mißt? Es ist hier

$$\frac{h}{b} = \frac{3{,}5}{27{,}5} = {}^7/_{55},\ \frac{l}{d} = \frac{150}{\frac{1}{2}} = 300,\ \left(\frac{d_1}{d}\right)^4 = ({}^7/_{12})^4$$

$= 0{,}1158$ und $F = ({}^7/_2)^2\ \frac{\pi}{4} = 9{,}62$ Quadratzoll, daher das gesuchte Windquantum, welches bei constantem Drucke durch die Mündung F ausströmt:

$$Q = 8{,}91\ .\ 9{,}62 \sqrt{\frac{7}{55\,(1{,}18 + 0{,}025\,.\,300\,.\,0{,}1158)}}$$

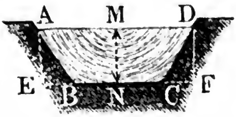
$$= 86 \sqrt{\frac{7}{55\,.\,2{,}0485}} = 21{,}4\ \text{Cubikfuß.}$$

Dieses Windquantum ist gemessen unter dem äußeren Luftdrucke von 27,5 Zoll und bei der inneren Temperatur von 10 Grad; wäre aber die letztere 100 Grad, so müßte die gefun-

dene Größe noch durch $0{,}98\sqrt{1+0{,}004 \cdot 100} = 0{,}98\sqrt{1{,}4}$ $= 1{,}159$ multiplicirt werden. Das resultirende Ausflußquantum $1{,}159\, Q = 1{,}159 \cdot 21{,}4 = 24{,}8$ Cubikfuß sinkt auf $\frac{11{,}06}{1+0{,}004\tau}$ $= \frac{24{,}8}{1{,}4} = 17{,}7$ Cubikfuß, wenn man es von der inneren Wärme $\tau_1 = 100$ auf 0 Grad reducirt.

§. 47. Bewegung des Wassers in Kanälen und Flüssen. Bezeichnet Q das Wasserquantum, welches durch den Querschnitt $ABCD$, Fig. 336, eines fließenden Wassers strömt, so ist die mittlere Geschwindigkeit desselben:

Fig. 336.



$$c = \frac{Q}{F}.$$

Die Geschwindigkeit des Wassers innerhalb eines und desselben Querprofiles ist bei einem freifließenden Wasser im Stromstrich M am größten und nimmt nach den Ufern und nach dem Boden zu ab. Sind $c_1, c_2, c_3 \cdots$ die den einzelnen Theilen $F_1, F_2, F_3 \cdots$ des Querprofiles entsprechenden Geschwindigkeiten, so hat man:

$$Q = F_1 c_1 + F_2 c_2 + F_3 c_3 + \cdots, \text{ und}$$
$$c = \frac{F_1 c_1 + F_2 c_2 + F_3 c_3 + \cdots}{F_1 + F_2 + F_3 + \cdots}.$$

Annähernd läßt sich setzen, daß die Geschwindigkeit in einem Perpendikel vom Wasserspiegel bis Boden um 17 Proc. abnehme, und die mittlere Geschwindigkeit in demselben um $8\frac{1}{2}$ Proc. kleiner sei als an der Oberfläche, also 0,915 von dieser betrage. Setzen wir ebenso die mittlere Oberflächengeschwindigkeit $= 0{,}915$ mal die Geschwindigkeit c_0 im Stromstriche, so erhalten wir für die mittlere Geschwindigkeit im ganzen Querprofile:

$$c = (0{,}915)^2 \cdot c_0 = 0{,}84\, c_0;$$

genauer hat man aber:

$$c = \left(\frac{7{,}50 + c_0}{9{,}97 + c_0}\right) c_0 \text{ österreichische Fuß.}$$

Das vortheilhafteste Querprofil eines Kanales ist dasjenige, dessen mit Wasser benetzter Umfang bei bestimmtem Inhalte ein Minimum ist. Bei gegebenem Böschungswinkel θ der Ufer ist für das vortheilhafteste Querprofil die Tiefe $AE = DF$ $= MN = a = \sqrt{\frac{F \sin.\theta}{2 - \cos.\theta}}$, und hiernach die untere Breite $b = \frac{F}{a} - a\, cotg.\theta$, dagegen die obere $b_1 = \frac{F}{a} + a\, cotg.\theta$.

Ist der Inhalt des Querprofiles $= 1$, so hat man für die verschiedenen Formen desselben die in folgender Tabelle gegebenen Verhältnisse. Bei einem Profile vom Inhalte F muß man die Werthe in den Columnen 3, 4, 5, 6 und 7 durch $\sqrt{F}$ multipliciren.

Tabelle I.

Dimensionen verschiedener Querprofile.

Böschungswinkel θ	Relative Böschung n	Tiefe a	Untere Breite b	Absolute Böschung na	Obere Breite $b+2na$	Umfang p
90°	0	0,707	1,414	0	1,414	2,828
60°	0,577	0,760	0,877	0,439	1,755	2,632
45°	1,000	0,740	0.613	0,740	2,092	2,704
40°	1,192	0,722	0,525	0,860	2,246	2,771
36°, 52′	1,333	0,707	0,471	0,943	2,357	2,828
35°	1,402	0,697	0,439	0,995	2,430	2,870
30°	1,732	0,664	0,356	1,150	2,656	3,012
26°, 34′	2,000	0,636	0,300	1,272	2,844	3,144
Halbkreis	—	0,798	—	—	1,596	2,507

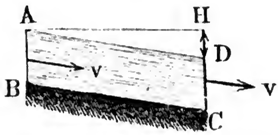
Hiernach hat man z. B. für ein Querprofil von 16 Quadratfuß bei 30° Uferböschung: die Tiefe $a = 0,664\sqrt{16} = 0,664 . 4 = 2,656$ Fuß, die untere Breite $b = 0,356 . 4 = 1,424$ Fuß, die absolute Böschung $na = 1,150 . 4 = 4,60$ Fuß, die obere Breite $b + 2na = 10,624$ Fuß, den Umfang des Querprofiles, $p = 3,012 . 4 = 12,086$ Q.-Fuß, und den Quotienten $\frac{p}{F} = \frac{3,012}{4} = 0,753$.

Für die **gleichförmige** Bewegung des Wassers auf einer Strecke $AD = l$, Fig. 337, hat man das **Gefälle**

$$DH = h = \zeta \cdot \frac{lp}{F} \cdot \frac{c^2}{2g},$$

und daher umgekehrt, die **mittlere Geschwindigkeit** in den sich überall gleichbleibenden Querprofilen:

Fig. 337.



$$c = \sqrt{\frac{F}{\zeta l p} \cdot 2gh}.$$

Bei den mittleren Geschwindigkeiten, welche von $2\frac{1}{2}$ Fuß nicht sehr abweichen, hat man $\zeta = 0,008$, daher für das Fußmaaß

$$h = 0,000128 \frac{ip}{F} c^2 \text{ und } c = 88,4 \sqrt{\frac{Fh}{pl}};$$

nimmt man für $\frac{p}{F}$ den mittleren Werth

$\frac{2,8}{\sqrt{F}}$ an, so folgt $h = 0,0003584 \frac{l}{\sqrt{F}} c^2$, und

$c = 52{,}8 \sqrt{\frac{h\sqrt{F}}{l}}$, z. B. für den Abhang $\alpha = \frac{h}{l} = 0{,}0001$ und für den Querschnitt $F = 16$ Quadratfuß,
$c = 52{,}8 \sqrt{0{,}0004} = 1{,}056$ Fuß.

Am sichersten rechnet man mit den in folgender Tabelle aufgeführten Werthen von ζ.

Tabelle II.

Geschwindigkeit c	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1 Fuß
Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}0$	1202	1086	1017	0971	0938	0914	0894	0879

Geschwindigkeit c	1½	2	3	5	7	10	12 Fuß
Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}0$	0833	0810	0787	0769	0761	0755	0752

Setzt man die mittlere Tiefe des fließenden Wassers $= a$ und die mittlere Breite $= b = \nu a$, so hat man annähernd $p = b + 2a = (\nu + 2)a$ und $F = ab = \nu a^2$, daher $\frac{p}{F} = \frac{\nu + 2}{\nu a}$, sowie $Q = \nu a^2 c$ und

$$h = \zeta \cdot \frac{\nu + 2}{\nu} \cdot \frac{l}{a} \cdot \frac{c^2}{2g}.$$

Nimmt man nun $a = 1$ und $l = 1000$, so erhält man $Q = \nu c$ und $h = 1000\,\zeta \cdot \frac{\nu + 2}{\nu} \cdot \frac{c^2}{2g}$. Hiernach ist folgende Tabelle (III.) berechnet, welche in der ersten von je zwei Zeilen die Wassermenge $60\,Q$ pr. Minute und in der zweiten das dem darüberstehenden ν und davorstehenden c entsprechende Gefälle ausdrückt. Ist die Wassertiefe a, so muß man den in der Tafel aufgefundenen Werth von $60\,Q$ durch a^2 multipliciren und den von h durch a dividiren. Z. B. für einen Kanal von 5 Fuß mittlerer Tiefe und 20 Fuß mittlerer Breite, also für $\nu = {}^{20}/_5 = 4$, ist bei 2 Fuß mittlerer Geschwindigkeit das Wasserquantum pr. Minute $= 480 \,.\, 5^2 = 12000$ Cubikfuß, also pr. Secunde $= 200$ Cubikfuß, und das Gefälle pr. 1000 Fuß Länge, $= \frac{0{,}7774}{5} = 0{,}1555$ Fuß, also für 4000 Fuß Kanallänge, $= 0{,}1555 \,.\, 4 = 0{,}622$ Fuß $= 7{,}46$ Zoll. Soll

Tabelle III.

Die Wassermengen und Gefälle fließender Wasser bei gegebenen Geschwindigkeiten und bekannten Querschnittsverhältnissen.

v =	1	2	3	4	5	6
c = 0,1	6,0000	12,000	18,000	24,000	30,000	36,000
	0,0102	0,0068	0,0057	0,0051	0,0048	0,0045
0,2	12,000	24,000	36,000	48,000	60,000	72,000
	0,0275	0,0183	0,0153	0,0138	0,0128	0,0122
0,3	18,000	36,000	54,000	72,000	90,000	108.00
	0,0519	0,0346	0,0288	0,0260	0,0242	0,0231
0,4	24,000	48,000	72,000	96,000	120,00	144,00
	0,0834	0,0556	0,0463	0,0417	0,0389	0,0371
0,6	36,000	72,000	108,00	144,00	180,00	216,00
	0,1678	0,1118	0,0932	0,0839	0,0783	0,0746
0,8	48,000	96,000	144,00	192,00	240,00	288,00
	0,2806	0,1871	0,1559	0,1403	0,1310	0,1247
1,0	60,000	120,00	180,00	240,00	300,00	360,00
	0,4219	0,2813	0,2344	0,2110	0,1969	0,1875
1,25	75,000	150,00	225,00	300,00	375,00	450,00
	0,6385	0,4257	0,3547	0,3193	0,2980	0,2838
1,50	90,000	180,00	270,00	360,00	450,00	540,00
	0,8995	0,5997	0,4997	0,4498	0,4198	0,3998
1,75	105,00	210,00	315,00	420,00	525,00	630,00
	1,2051	0,8034	0,6695	0,6026	0,5624	0,5356
2	120,00	240,00	360,00	480,00	600,00	720,00
	1,5548	1,0365	0,8638	0,7774	0.7256	0,6910
2,5	150,00	300,00	450,00	600,00	750,00	900,00
	2,3883	1,5922	1,3269	1,1942	1,1145	1,0615
3	180,00	360,00	540,00	720.00	900,00	1080,0
	3,3991	2,2661	1,8884	1,6995	1,5863	1,5107
4	240,00	480,00	720,00	960,00	1200,0	1440,0
	5,9547	3,9698	3,3082	2,9773	2,7789	2,6466
5	300,00	600,00	900,00	1200,0	1500,0	1800,0
	9,2215	6,1477	5,1231	4,6108	4,3034	4,0985
6	360,00	720,00	1080,0	1440,0	1800,0	2160,0
	12,944	8,7998	7,3332	6,5998	6,1599	5,8665
8	480,00	960,00	1440,0	1920,0	2400,0	2880,0
	23,288	15,526	12,938	11,644	10,868	10,353
10	600,00	1200,0	1800,0	2400,0	3000,0	3600,0
	36,221	24,147	20,123	18,110	16,903	16,098
12	720,00	1400,0	2160,0	2880,0	3600,0	4320,0
	52,005	34,670	28,892	26,003	24,269	23,113

Tabelle III.

Die Wassermengen und Gefälle fließender Wasser bei gegebenen Geschwindigkeiten und bekannten Querschnittsverhältnissen.

$\nu =$	7	8	9	10	11	12
$c =$ 0,1	42,000 0,0043	48,000 0,0042	54,000 0,0042	60,000 0,0041	66,000 0,0041	72,000 0,0040
0,2	84,000 0,0118	96,000 0,0114	108,00 0,0112	120,00 0,0110	132,00 0,0108	144,00 0,0107
0,3	126,00 0,0222	144,00 0,0216	162,00 0,0211	180,00 0,0208	198,00 0,0204	216,00 0,0202
0,4	168,00 0,0358	192,00 0,0348	216,00 0,0340	240,00 0,0334	264,00 0,0329	288,00 0,0324
0,6	252,00 0,0719	288,00 0,0699	324,00 0,0684	360,00 0,0671	396,00 0,0661	432,00 0,0653
0,8	336,00 0,1203	884,00 0,1169	432,00 0,1143	480,00 0,1122	528,00 9,1105	576,00 0,1091
1,0	420,00 0,1808	480,00 0,1758	540,00 0,1719	600,00 0,1688	660,00 0,1662	720,00 0,1641
1,25	525,00 0,2736	600,00 0,2660	675,00 0,2601	750,00 0,2554	825,00 0,2515	900,00 0,2483
1,50	630,00 0,3855	720,00 0,3748	810,00 0,3665	900,00 0,3598	990,00 0,3544	1080,0 0,3498
1,75	735,00 0,5165	840,00 0,5021	945,00 0,4910	1050,0 0,4820	1155,0 0,4748	1260,0 0,4686
2	840,00 0,6663	960,00 0,6478	1080,0 0,6334	1200,0 0,6219	1320,0 0,6125	1440,0 0,6046
2,5	1050,0 1,0212	1200,0 0,9951	1350,0 0,9730	1500,0 0,9553	1650,0 0,9409	1800,0 0,9288
3	1260,0 1,4567	1440,0 1,4163	1620,0 1,3848	1800,0 1,3596	1980,0 1,3390	2160,0 1,3219
4	1680,0 2,5520	1920,0 2,4811	2160,0 2,4266	2400,0 2,3819	2640,0 2,3458	2880,0 2,3157
5	2100,0 3,9521	2400,0 3,8423	2700,0 3,7569	3000,0 3,6886	3300,0 3,6327	3600,0 3,5861
6	2520,0 5,6569	2880,0 5,4999	3240,0 5,3776	3600,0 5,2798	3960,0 5,1998	4320,0 5,1331
8	3360,0 9,9807	3840,0 9,7259	4320,0 9,4879	4800,0 9,3154	5280,0 9,1743	5760,0 9,0565
10	4200,0 15,523	4800,0 15,089	5400,0 14,757	6000,0 14,489	6600,0 14,269	7200,0 14,086
12	5040,0 22,288	5760,0 21,669	6480,0 21,187	7200,0 20,802	7920,0 20,487	8640,0 20,224

umgekehrt ein Kanal pr. Secunde 30 Cubikfuß, also pr. Minute 1800 Cubikfuß Wasser liefern und das Querschnittsverhältniß $\nu = 5$ sein, so hat man bei einer Geschwindigkeit von 3 Fuß, $900 \cdot a^2 = 1800$, folglich $a = \sqrt{2} = 1,414$ Fuß, sowie die Breite $b = 5$ Fuß $7\frac{1}{2}$ Zoll und das Gefälle auf 1000 Fuß Länge:

$$= \frac{1,5863}{a} = \frac{1,5863}{1,414} = 1,122 \text{ Fuß} = 13\tfrac{1}{2} \text{ Zoll}.$$

Soll in dem letzten Falle $h = 9$ Zoll $= 0,75$ Fuß betragen, so hat man die Dimensionen des Querprofiles auf folgende Weise zu ermitteln. Sind Q_1 und h_1 die in der Tabelle aufgeführten und 1 Fuß Tiefe entsprechenden Werthe, Q und h aber dieselben Größen bei a Fuß Tiefe, so hat man $Q = Q_1 a^2$ und $h = \frac{h_1}{a}$, daher

$$a^2 = \frac{Q}{Q_1} = \left(\frac{h_1}{h}\right)^2, \text{ oder } Q_1 h_1^2 = Q h^2.$$

Um nun a zu finden, sucht man in der mit ν (5) überschriebenen Verticalcolumne diejenige Stelle auf, wo deren Werthe für Q_1 und h_1 dem Produkte $Q_1 h_1^2 = Q h^2 = 1800 \cdot (\frac{3}{4})^2 = 1012,5$ entsprechen. Nun geben die Werthe $Q_1 = 750$ und $h_1 = 1,1145$, $Q_1 h_1^2 = 931$, und die Werthe $Q_1 = 900$ und $h_1 = 1,5863$, $Q_1 h_1^2 = 2263$, daher läßt sich interpolirend setzen:

$$Q_1 = 750 + \frac{1012,5 - 931}{2263 - 931} (900 - 750)$$

$$= 750 + \frac{81,5 \cdot 150}{1332} = 750 + 9,2 = 759,2 \text{ Cubikfuß},$$

ferner

$$a = \sqrt{\frac{Q}{Q_1}} = \sqrt{\frac{1800}{759,2}} = 1,54 \text{ Fuß} \doteq 18\tfrac{1}{2} \text{ Zoll}$$

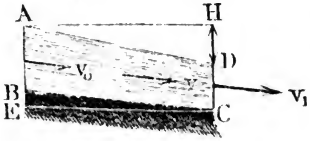
und $b = 5 \cdot 1,54 = 7$ Fuß $8\frac{1}{2}$ Zoll.

Wenn sich die Tiefe a eines fließenden Wassers um eine kleine Größe $\triangle a$ verändert, so ändert sich die mittlere Geschwindigkeit c um $\triangle c = \frac{1}{2} \cdot \frac{\triangle a}{a} \cdot c$, und das Wasserquantum Q um $\triangle Q = \frac{3}{2} \cdot \frac{\triangle a}{a} Q$.

Fließt das Wasser ungleichförmig, so hat man für eine kurze Strecke $AD = l$, Fig. 338, das Gefälle im Wasserspiegel

$$DH = h = \zeta \cdot \frac{lp}{F} \cdot \frac{v^2}{2g} + \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g},$$

Fig. 338.



wo p und F den mittleren Umfang und mittleren Inhalt des Querprofiles, v_0 die mittlere Geschwindigkeit im ersten und v_1 die im zweiten oder letzten Profile, v aber das Mittel aus beiden bezeichnet. Ist a die

mittlere Wassertiefe und $\triangle a$ die Abnahme der Tiefe vom ersten bis zweiten Querprofile, so hat man auch

$$h = \left(\zeta \cdot \frac{\nu + 2}{\nu} \cdot l + 2 \triangle a\right) \frac{v^2}{2ga},$$

und setzt man endlich den Abhang $\frac{BE}{BC}$ des Bettes $= \alpha$, also $h = l\alpha + \triangle a$, so folgt:

$$\frac{\triangle a}{l} = \frac{\alpha - \zeta \cdot \frac{\nu + 2}{\nu} \cdot \frac{v^2}{2ga}}{\frac{v^2}{ga} - 1}.$$

§. 48. Hydrometrie. Das Quantum fließender Wasser wird gemessen:

1) durch Aichen in Gefäßen,
2) durch den Ausfluß, und
3) durch Hydrometer, welche die Geschwindigkeit des Wassers angeben.

Kleinere Wassermengen werden durch Wasserzolle, d. i. mittels des Ausflusses durch kreisrunde Mündungen von 1 Zoll Weite gemessen. Diese Mündungen sind in der dünnen Wand oder in einem dünnen Bleche auszuschneiden, und der Ausfluß ist durch Eröffnen oder Verstöpseln einiger dieser Mündungen so zu reguliren, daß der Wasserspiegel nur 1 Linie über der höchsten Stelle der Mündung zu stehen kommt. Nach Hagen liefert ein Wasserzoll (preuß. Maaß) täglich 520 Cubikfuß. Mit mehr Sicherheit mißt man aber, wenn man eine größere Druckhöhe anwendet, und am einfachsten ist es, wenn man den Wasserspiegel 1 Zoll über den Mittelpunkt der 1 Zoll weiten Kreismündung stehen läßt. Nach den Messungen der Herren Bornemann und Röting giebt ein solcher Wasserzoll täglich 642,8 Cubikfuß. Kleinere Mündungen geben bei derselben Druckhöhe (1 Zoll) verhältnißmäßig noch etwas mehr Wasser, wie aus folgender Tabelle zu entnehmen ist.

Tabelle der Wasserzolle.

Durchmesser	Ausflußmenge in Cubikfußen			
	pr. Minute	pr. Stunde	pr. Tag	pr. Woche
1 Zoll	0,44642	26,785	642,84	4500
1/2 "	0,12228	7,336	176,08	1233
1/4 "	0,03173	1,904	45,70	320
1/8 "	0,00878	0,524	12,65	89

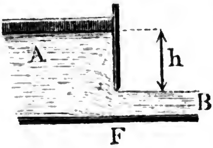
Die Messungen durch den Wasserzoll werden sehr vereinfacht, wenn man der Mündung Nr. 2 die Weite 0,4777 Zoll = 5,73 Linien, der Mündung Nr. 3 die Weite 0,23441 Zoll = 2,713 Linien, und der Mündung Nr. 4 die Weite 0,11138 Zoll = 1,337 Linien giebt, damit sich die Ausflußmengen dieser Mündungen genau wie 64 : 16 : 4 : 1 zu einander verhalten. Mit Hülfe dieser Mündungen läßt sich dann jeder Bruchtheil eines Wasserzolles angeben; um z. B. $4\frac{45}{64}$ Wasserzolle zu erhalten, öffnet man 4 Mündungen von Nr. 1, 2 Mündungen von Nr. 2, 3 von Nr. 3 und 1 von Nr. 4.

Sehr bequem zum Messen kleiner Wassermengen ist auch der hydrometrische Becher (s. Mechanik Bd. I, §. 448).

Größere Ausflußmengen werden am sichersten mittels des Ausflusses durch rectanguläre Mündungen mit Zuhülfeziehung der oben (Seite 432) angegebenen Coefficienten gefunden.

Sehr einfach wird das Wasser in einem Gerinne gemessen, wenn man dasselbe durch ein quer einzusetzendes Brett aufstaut. Läßt man dann das Wasser über der oberen Kante ablaufen, so bekommt man einen Ueberfall, und es ist das Wasserquantum nach den in Seite 433 bis Seite 437 angegebenen Regeln zu berechnen. Läßt man aber das Wasser unter dem Brette ablaufen, wie Fig. 339 vor Augen führt, so hat man nach den Messungen des Verfassers bei nach außen abgeschrägter Kante des Brettes das Ausflußquantum:

Fig. 339.



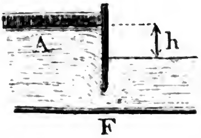
$$Q = 0{,}6 \,.\, ab\sqrt{2gh}$$
$$= 4{,}744\, ab\sqrt{h} \text{ Cubikfuß}$$

zu setzen, wofern die Breite b des Gerinnes und der Mündung F, die Höhe a der letzteren und die Druckhöhe h des Wassers in Fußen gegeben sind. Bei einem abgerundeten Brette geht der Coefficient 0,60 in 0,89, also 4,744 in 7,036 über.

Ist das Gerinne BF ganz kurz, so fließt das Wasser fast ganz frei ab und dann hat man die Druckhöhe vom Oberwasserspiegel bis Mündungsmitte zu messen.

Ist $\frac{a}{h}$ nicht klein, so legt sich der Unterwasserspiegel an die Rückwand des Brettes an, und es tritt ein weit unsicherere Resultate gebender Ausfluß unter Wasser, Fig. 340, ein. Bezeichnet in diesem Falle h den Niveauabstand zwischen beiden Wasserspiegeln, so hat man bei abgeschrägter Kante annähernd

Fig. 340.



$$Q = 0{,}46\, ab\sqrt{2gh}$$
$$= 3{,}66\, ab\sqrt{h},$$

und bei abgerundeter Kante

$$Q = 0{,}68\, ab\sqrt{2gh}$$
$$= 5{,}39\, ab\sqrt{h} \text{ Cubikfuß},$$

wobei wieder die Druckhöhe h von Wasserspiegel zu Wasserspiegel gemessen wird.

Um beim Aufstauen durch ein eingesetztes Brett oder durch eine Schütze nicht erst den Beharrungszustand abwarten zu müssen, schlage man folgenden Weg ein. Nachdem man durch gänzliches Absperren das Wasser bis zu einer gewissen Höhe aufgestaut hat, öffne man die Mündung und beobachte die Senkung des Wasserspiegels in gleichen Zeitintervallen. Am Ende verschließe man die Mündung wieder ganz und beobachte noch die Zeit, in welcher der Wasserspiegel wieder auf das erste Niveau steigt. Das Quantum, welches dieses fließende Wasser führt, ist nun:

$$Q = \frac{\mu F t \sqrt{2 g h}}{t + t_1},$$

wo F den Inhalt der Mündung, h die mittlere Druckhöhe während des Abflusses, t die Ausflußzeit und t_1 die Zeit des Absperrens bezeichnet. Nach der Simpson'schen Regel ist, wenn h_0, h_1, h_2, h_3, h_4 die in gleichen Intervallen gemessenen Druckhöhen bezeichnen, statt $\sqrt{h}$,

$$\frac{\sqrt{h_0} + 4\sqrt{h_1} + 2\sqrt{h_2} + 4\sqrt{h_3} + \sqrt{h_4}}{12}$$

einzusetzen.

Die Hydrometer geben unmittelbar nur die Geschwindigkeiten der fließenden Wasser an; um daher die Wassermengen zu finden, muß man noch in verschiedenen Breiten die Tiefen des Querprofiles mittels einer Sondirstange ausmessen, hieraus den Inhalt des Querprofiles berechnen und diesen mit der Geschwindigkeit multipliciren.

Der Schwimmer nahe an der Oberfläche giebt natürlich auch nur die Geschwindigkeit in der Nähe der Oberfläche an, um aber gleich die mittlere Geschwindigkeit in einer Verticalen zu erhalten, muß man eine Verbindung von zwei Schwimmkugeln, oder einen Schwimmstab anwenden.

Bedient man sich des hydrometrischen Flügelrades zur Ausmittelung der Geschwindigkeit c fließender Wasser, so kann man setzen: $c = c_0 + (c_1 - c_0)\,u$, wenn u die Umdrehungszahl des Rades pr. Secunde, c_0 die Geschwindigkeit des Wassers, bei welcher das Rad erst aus der Ruhe gebracht wird, c_1 aber die Geschwindigkeit des Wassers bezeichnet, bei welcher das Rad pr. Secunde eine Umdrehung macht. Man findet die jedem Instrumente eigenthümlichen Constanten aus einer Reihe von Beobachtungen bei bekannten Geschwindigkeiten. Bei großen Geschwindigkeiten ist ein Rad mit kleinem und bei kleinen ein solches mit großem Stoßwinkel in Anwendung zu bringen, damit die Umdrehungszahl weder sehr groß noch sehr klein ausfalle.

Ist z. B. $c_0 = 0{,}10$ und $c_1 - c_0 = 0{,}45$, so hat man $c = 0{,}10 + 0{,}45 \,.\, u$, und hiernach für 140 Umdrehungen pr. Minute, oder $^{140}/_{60} = {^7/_3}$ pr. Secunde:

$$c = 0{,}10 + 0{,}45 \,.\, {^7/_3} = 0{,}10 + 1{,}05 = 1{,}15 \text{ Fuß}.$$

Bei Anwendung der Pitot'schen Röhre, Fig. 341, setze man $c = \mu \sqrt{2 g h} = \psi \sqrt{h}$, wo h die abgelesene Höhe der

Wassersäule in der Röhre bezeichnet. Der Coefficient ψ ist ebenfalls auf dem Wege des Experimentirens zu finden. Ist z. B. $\psi = 6,5$, so hat man $c = 6,5 \sqrt{h}$, und hiernach bei 0,36 Fuß Hydrometerstand, die Geschwindigkeit $c = 6,5 \sqrt{0,36} = 3,9$ Fuß.

Fig. 341.

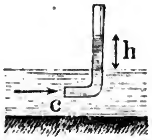
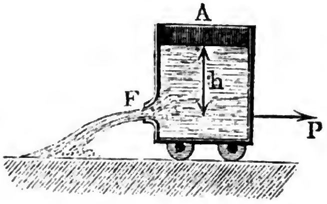


Fig. 342.



§. 49. Reaction und Stoss des Wassers. Die Reactionskraft des aus einem Gefäße A, Fig. 342, ausfließenden Wassers ist der Bewegungsrichtung des Wasserstrahles entgegengesetzt und hat die Größe

$$P = \frac{c - v}{g} Q\gamma = \frac{(c - v)c}{g} F\gamma,$$

wenn $c = \varphi \sqrt{2gh}$, die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers, v die des Gefäßes in der Richtung der Kraft P und F den Querschnitt des Wasserstrahles bezeichnet.

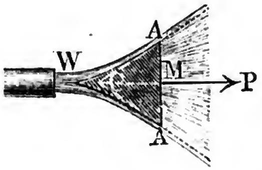
Steht das Gefäß still und setzt man den Geschwindigkeitscoefficienten $\varphi = 1$, so ist die Reactionskraft

$$P = \frac{c^2}{g} F\gamma = 2\frac{c^2}{2g} F\gamma = 2 Fh\gamma,$$

d. i. gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche den Querschnitt des Strahles zur Basis und die doppelte Druckhöhe zur Länge hat.

Trifft ein isolirter Strahl W, Fig. 343, eine mit der Geschwindigkeit v ausweichende Fläche ACA mit der Geschwindigkeit c, und wird er von derselben um den Winkel $ACM = \delta$ aus seiner ersten Richtung gebracht, so übt er gegen dieselbe den Stoß oder hydraulischen Druck

Fig. 343.



$$P = (1 - \cos. \delta) \frac{(c - v)}{g} Q\gamma$$

aus.

Die in der Secunde zum Stoße gelangende Wassermenge ist, wenn F den Querschnitt des Strahles bezeichnet und immer nur dieselbe Fläche gestoßen wird:

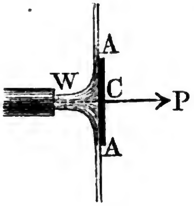
$$Q = (c - v) F,$$

stellt sich aber eine ununterbrochene Reihe von Flächen dem Strahle entgegen, wie z. B. das Schaufelsystem eines Wasserrades, so hat man nahe:

$$Q = cF.$$

Für den Normalstoß eines Wasserstrahles W gegen eine ebene Fläche ACA, Fig. 344, ist $\delta = 90^0$, daher

Fig. 344.



$$P = \frac{(c - v)}{g} Q\gamma,$$

und für den Stoß gegen eine hohle Fläche, durch welche die Richtung des Strahles in die entgegengesetzte verwandelt wird, ist $\delta = 180^0$, daher

$$P = 2 \frac{(c - v)}{g} Q\gamma.$$

Ist die Fläche in Ruhe, so hat man im ersten Falle

$$P = \frac{c}{g} Q\gamma = \frac{c^2}{g} F\gamma = 2 \cdot \frac{c^2}{2g} F\gamma = 2 Fh\gamma,$$

und im zweiten

$$P = \frac{2c}{g} Q\gamma = 4 Fh\gamma.$$

Es ist also im ersten Falle der Stoß doppelt und im zweiten viermal so groß als das Gewicht der Wassersäule, die den Querschnitt des Strahles zur Basis und die Druckhöhe zur Länge hat.

Die Leistung $L = Pv$ des Stoßes ist ein Maximum, wenn $v = \frac{c}{2}$; beim Normalstoße gegen eine ebene Fläche

$L = \frac{c^2}{4g} Q\gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{2g} Q\gamma = \frac{1}{2} Qh\gamma$, d. i. halb so groß als das ganze Arbeitsvermögen des Wassers, dagegen beim Stoße gegen eine hohle Fläche, welche den Strahl in die entgegengesetzte Richtung umbiegt, $L = Qh\gamma$.

Beim schiefen Stoß eines Strahles W, wie Fig. 345, ist ebenfalls:

$$P = (1 - \cos. \delta) \frac{(c - v)}{g} Q\gamma;$$

in dem Falle, wo das Wasser nach zwei entgegengesetzten Seiten, Fig. 346, ausweichen kann, ist der Normalstoß

$$N = \frac{c - v}{g} \sin. \delta \, Q\gamma,$$

der Parallelstoß

$$P = \frac{c - v}{g} (\sin. \delta)^2 Q\gamma,$$

und der Seitenstoß

Fig. 345.

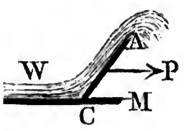
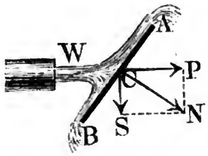


Fig. 346.



$$S = \frac{c - v}{2g} \sin. 2\delta\, Q\gamma.$$

Für den schiefen Stoß gegen eine ebene Fläche AB, Fig. 347, auf welcher sich das Wasser nach allen Seiten hin ausbreiten kann, hat man den Parallelstoß annähernd

$$P = \frac{2(\sin.\delta)^2}{1 + (\sin.\delta)^2} \cdot \frac{c - v}{g} Q\gamma.$$

Für den Stoß und Widerstand des unbegrenzten Wassers hat man

$$P = \zeta \cdot \frac{c^2}{2g} F\gamma = (\zeta_1 + \zeta_2) \frac{c^2}{2g} F\gamma;$$

wo F der Querschnitt der die Wirkung des Wassers aufnehmenden Fläche, c die Geschwindigkeit des Wassers oder die der Fläche bezeichnet, ferner ζ_1 und ζ_2 die Wirkungen an der Vorder- und an der Hinterfläche messenden Erfahrungscoefficienten, endlich ζ die Summe $\zeta_1 + \zeta_2$ derselben bezeichnet.

Für ein dünnes Blech AA, Fig. 348, dessen Ebene recht-

Fig. 347.

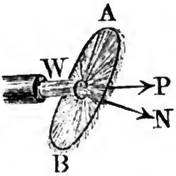
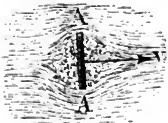


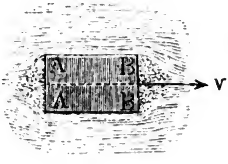
Fig 348.



winkelig gegen die Bewegungsrichtung steht, hat man
beim Stoß des Wassers $\zeta = 1{,}86$, und
beim Widerstand desselben $\zeta = 1{,}25$.

Für einen prismatischen Körper $AABB$, Fig. 349, von der Länge $AB = l$ ist ζ_2 veränderlich, und daher bei den relativen Längen

Fig. 349.



$$\frac{l}{\sqrt{F}} = \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3;$$

für den Stoß:

$$\zeta = 1{,}86;\ 1{,}47;\ 1{,}35;\ 1{,}33;$$

für den Widerstand:

$$\zeta = 1{,}25;\ 1{,}28;\ 1{,}31;\ 1{,}33.$$

Der Widerstand des Wassers und der Luft gegen bewegte Körper ist außer dem Querschnitte und der Länge auch noch von der Form derselben abhängig. Nach Piobert ist z. B. für die Bewegung der Geschützkugeln im Wasser:

$\zeta = 0{,}467$, und in der Luft
$\zeta = 0{,}451\,(1 + 0{,}0023\,c)$, wo c in Metern
$= 0{,}451\,(1 + 0{,}00073\,c)$, wo c in Fußen zu geben ist, z. B. für $c = 1000$ Fuß,
$\zeta = 0{,}780$.

Die Widerstandscoefficienten fallen auch bei nur zum Theil eingetauchten Körpern anders aus, als bei ganz vom Wasser umgebenen Körpern. Für einen schwimmenden prismatischen Körper, welcher 5 bis 6 mal so lang als breit ist, und in der Axenrichtung bewegt wird, soll $\zeta = 1,10$ gesetzt werden. Ist der Körper durch zwei Verticalebenen vorn zugeschärft, wie ABC, Fig. 350, so nimmt ζ mit dem Zuschärfungswinkel $ACA = \beta$ ab, und es ist

für $\beta =$	180^0	156^0	132^0	108^0	84^0	60^0	36^0	12^0
$\zeta =$	1,10	1,06	0,93	0,84	0,59	0,48	0,45	0,44

Ist das Hintertheil des Körpers ACB, Fig. 351, zugeschärft, und β der Zuschärfungswinkel, so hat man dagegen

Fig. 350.

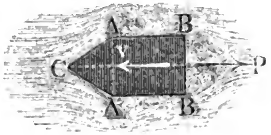
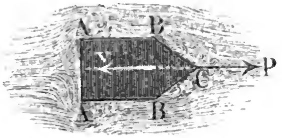


Fig. 351.



für $\beta =$	180^0	138^0	96^0	48^0	24^0
$\zeta =$	1,10	1,03	0,98	0,95	0,92

Bei zugespitzten Vorder- und Hintertheilen des schwimmenden Körpers fällt natürlich ζ noch kleiner aus; für Flußdampfschiffe ist $\zeta = 0,12$ bis 0,20, und für große Seedampfschiffe $\zeta = 0,05$ bis 0,10.

Zweiter Abschnitt.

Formeln, Regeln und Tabellen für die praktische Mechanik.

Erstes Capitel.

Statik der Baukunst.

---

§. 50. Erddruck und Futtermauern. Der Reibungswinkel ϱ ist der größte Winkel BAC, Fig. 352, der freien Oberfläche einer lockeren Masse M gegen den Horizont. Durch denselben bestimmt sich auch die größte oder natürliche Böschung der lockeren Masse:

$$\mu = \frac{AC}{BC} = cotang.\, \varrho.$$

Es ist im Mittel	der Reibungswinkel ϱ	die natürliche Böschung μ	die Dichtigkeit γ
für feuchte Erde . . .	43^0	1,072	105 Pfd.
» trockene Erde . .	39^0	1,235	90 »
» grobe Gesteinstücke (Haldensturz) . .	38^0	1,280	75 »
» feinen Sand . . .	31^0	1,664	96 »
» Roggenkörner . .	30^0	1,732	46 »
» grobe Schrotkörner	25^0	2,145	400 »
» feine Schrotkörner .	$22\frac{1}{2}^0$	2,414	400 »

Aus dem Reibungswinkel ϱ, der Dichtigkeit γ der lockeren Masse und der Höhe $AB = h$ der Futtermauer oder Bohlenwand u. s. w., Fig. 353, folgt auf jeden laufenden Fuß der letzteren

Fig. 352.

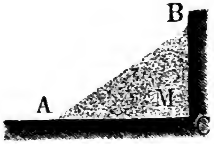
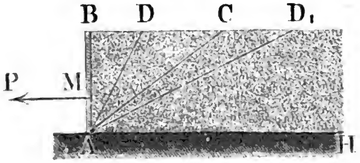


Fig. 353.



der active Erddruck:

$$1)\quad P = \frac{1}{2} h^2 \gamma \left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2$$

und der passive Erddruck:

$$2)\quad P = \frac{1}{2} h^2 \gamma \left[tang.\left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2.$$

Im ersten Falle bildet das Prisma des größten Druckes den Winkel $DAB = \frac{1}{2}\, CAB = 45^0 - \frac{\varrho}{2}$, und im zweiten den Winkel $D_1 AB = 45^0 + \frac{\varrho}{2}$ in der Verticalen AB.

Die Höhe des Angriffspunktes M dieser Kräfte über dem Fußpunkte A ist $\overline{AM} = a = \frac{h}{3}$.

Will man noch auf die Cohäsion der Erdmasse Rücksicht nehmen, so muß man die Höhe h_0 auf die sich die lockere Masse senkrecht abschneiden läßt, ohne nachzurollen, in 1) von h subtrahiren, dagegen in 2) zu h addiren.

Ist die Oberfläche der Erde auf jeden laufenden Fuß Breite mit q Pfund belastet, so hat man $\frac{1}{2} h^2 \gamma$ noch um qh größer und den Abstand des Angriffspunktes über der Sohle:

$$a = \left(\frac{h\gamma + 3q}{3h\gamma + 6q}\right) h \text{ anzunehmen.}$$

Ragt endlich die Erdmasse um die Höhe $BE = h_1$, Fig. 354 (a. f. S.), über den Mauerkopf hervor, so ist der active Erddruck:

$$P = \left(\frac{h + h_1}{cos.\,\varrho} - \sqrt{(h + h_1)^2\, tang.\,\varrho^2 + h_1^2}\right)^2 \frac{\gamma}{2},$$

annähernd, bei kleinem $\frac{h_1}{h}$,

$$P = \left((h + h_1)^2 \left[tg.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - h_1^2 \frac{(1 - sin.\,\varrho)}{sin.\,\varrho}\right) \frac{\gamma}{2},$$

und das Moment desselben:

$$Pa = \left((h + h_1)^3 \left[tg.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - \frac{h_1^3 (1 - sin.\,\varrho)}{sin.\,\varrho}\right) \frac{\gamma}{6}.$$

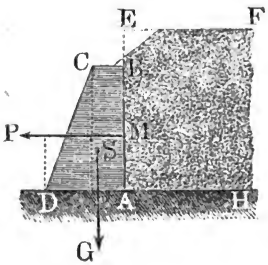
Für sehr kleine Werthe von $\frac{h_1}{h}$, etwa $\frac{h_1}{h} < 0,3$, läßt sich sogar

$$P = \frac{1}{2}(h + h_1)^2 \gamma \left[tg.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2, \text{ und}$$

$$Pa = \frac{1}{6}(h + h_1)^3 \gamma \left[tg.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 \text{ setzen.}$$

Es bezeichne b die obere Breite $\overline{BC}$ der Futtermauer AC, Fig. 354, ν die äußere Böschung derselben auf jeden Fuß Höhe, also νh die ganze Böschung und $b_1 = b + \nu h$, die untere Breite AD, ferner sei γ_1 die Dichtigkeit derselben, sowie φ der Coefficient ihrer Reibung auf der Basis, und endlich drücke δ noch einen, der nöthigen Sicherheit gegen das Nachgeben der Mauer entsprechenden Stabilitätscoefficienten aus. Dann ist wegen des Ausgleitens der Mauer zu nehmen:

Fig. 354.



1) $b = \frac{\delta}{2} \frac{(h + h_1)^2}{\varphi h} \frac{\gamma}{\gamma_1} \left[tg.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - \frac{1}{2} \nu h,$

und dagegen wegen des Kippens:

2) $b = -\nu h + \sqrt{\frac{\delta\gamma}{3\gamma_1} \frac{(h+h_1)^3}{h} \left[tg.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 + \frac{1}{3}\nu^2 h^2}$

Von diesen beiden Werthen ist natürlich bei Ausführung einer Construction der größere in Anwendung zu bringen.

Für parallelepipedische Mauern hat man $\nu = 0$, daher

1) $b = \frac{\delta}{2} \frac{(h + h_1)^2}{\varphi h} \frac{\gamma}{\gamma_1} \left[tg.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2$ und

2) $b = (h + h_1)\, tg.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right) \sqrt{\frac{\delta\gamma}{3\gamma_1} \cdot \frac{h + h_1}{h}}.$

Setzt man $\delta = 2$ und für $\frac{\gamma}{\gamma_1}$ den Mittelwerth $= \frac{3}{4}$, sowie für $\varphi = \frac{2}{3}$ ein, so erhält man

1) $b = 1,125 \frac{(h + h_1)^2}{h} \left[tg.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2$ und

2) $b = 0,707 (h + h_1) \sqrt{\frac{h + h_1}{h}} \cdot tg.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right).$

Nach Poncelet kann man, so lange $h_1 < 2h$ und > 0 ist, annähernd

$$b = 0,865 \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1}} (h + h_1)\, tg.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)$$
$$= 0,285 (h + h_1) \text{ setzen.}$$

Hat die Futtermauer die äußere Böschung $\nu = 0{,}0$ bis $0{,}2$, so soll hier b die Dicke derselben bei ein Neuntel der Höhe über dem Fuße angeben.

Hiernach ist auch folgende Tabelle berechnet, welche die gegebenen Werthen von $\frac{h_1}{h}$, $\frac{\gamma_1}{\gamma}$ und $tg.\,\varrho$ entsprechenden Größen von $\frac{b}{h}$ angiebt. Um mit Hülfe dieser Tabelle die Stärke b der Futtermauer zu bestimmen, muß man erst das Verhälniß $\frac{h_1}{h}$ berechnen, dann dasselbe in der ersten Columne (Seite 473 oder 474) aufsuchen, und nun von der gefundenen Stelle horizontal herübergehen, bis zu derjenigen Columne, deren Ueberschrift dem gegebenen Falle entweder ganz oder wenigstens ziemlich entspricht. Der gefundene Zahlenwerth von $\frac{b}{h}$ ist natürlich noch mit der Höhe h der Futtermauer zu multipliciren.

Tabelle.

Die relativen Stärken der Futtermauern.

Werthe von $\frac{h_1}{h}$	Werthe von $\frac{b}{h}$ für						
	$\frac{\gamma_1}{\gamma} = 1$; $tg.\,\varrho = 0{,}6$ Berme:		$\frac{\gamma_1}{\gamma} = 1$; $tg.\,\varrho = 1{,}4$ Berme:		$\frac{\gamma_1}{\gamma} = 1{,}5$; $tg.\,\varrho = 1$ Berme:		
	$= 0$	$= 0{,}2h$	$= 0$	$= 0{,}2h$	$= 0$	$= 0{,}2h$	$= b$
0,0	0,452	0,452	0,258	0,258	0,270	0,270	0,270
0,1	0,498	0,507	0,282	0,290	0,303	0,306	0,303
0,2	0,548	0,563	0,309	0,326	0,336	0,342	0,326
0,3	0,604	0,618	0,338	0,361	0,368	0,375	0,343
0,4	0,665	0,670	0,369	0,394	0,399	0,405	0,357
0,5	0,726	0,717	0,402	0,423	0,436	0,431	0,368
0,6	0,778	0,754	0,436	0,450	0,477	0,457	0,377
0,7	0,824	0,790	0,472	0,476	0,512	0,481	0,385
0,8	0,867	0,820	0,510	0,501	0,544	0,504	0,391
0,9	0,903	0,848	0,541	0,524	0,575	0,523	0,398
1,0	0,930	0,873	0,571	0,546	0,605	0,540	0,405
1,4	1,023	0,945	0,684	0,624	0,696	0,602	0,416
2,0	1,107	1,004	0,812	0,714	0,795	0,655	0,425
3,0	1,180	1,060	0,981	0,835	0,892	0,717	0,435
5,0	1,247	1,101	1,206	0,994	1,002	0,779	0,445
10,0	1,283	1,137	1,508	1,182	1,109	0,839	0,452
20,0	1,309	1,156	1,757	1,327	1,171	0,878	0,456
30,0	1,316	1,162	1,866	1,389	1,194	0,894	0,458
∞	1,337	1,175	2,144	1,541	1,243	0,927	0,461

Tabelle.

Die relativen Stärken der Futtermauern.

Werthe von $\frac{h_1}{h}$	Werthe von $\frac{b}{h}$ für $\frac{\gamma_1}{\gamma} = 5/3$; $tg.\ \varrho = 0{,}6$ Berme: $= 0$	$= 0{,}2\,h$	$\frac{\gamma_1}{\gamma} = 5/3$; $tg.\ \varrho = 1{,}4$ Berme: $= 0$	$= 0{,}2\,h$
0,0	0,350	0,350	0,198	0,198
0,1	0,393	0,398	0,222	0,229
0,2	0,439	0,445	0,249	0,262
0,3	0,485	0,489	0,274	0,283
0,4	0,532	0,522	0,303	0,299
0,5	0,579	0,549	0,332	0,314
0,6	0,617	0,572	0,360	0,328
0,7	0,645	0,593	0,387	0,343
0,8	0,668	0,610	0,413	0,357
0,9	0,690	0,624	0,437	0,371
1,0	0,707	0,636	0,457	0,384
1,4	0,762	0,672	0,537	0,428
2,0	0,811	0,705	0,622	0,475
3,0	0,852	0,731	0,726	0,531
5,0	0,883	0,751	0,862	0,596
10,0	0,909	0,771	1,013	0,667
20,0	0,922	0,780	1,129	0,712
30,0	0,926	0,783	1,174	0,730
∞	0,934	0,789	1,279	0,769

Den Gebrauch dieser Tabelle wird folgendes Beispiel vor Augen führen.

Beispiel. Welche Stärke ist einer 15 Fuß hohen Futtermauer zu geben, welche eine 25 Fuß hohe Erdmasse stützen soll, deren Reibungswinkel $\varrho = 31^0$ und Dichtigkeit $\gamma = 3/5$ von der Dichtigkeit γ_1 der Mauer ist, unter der Voraussetzung, daß die Berme oder die Mauerkappe auf 3 Fuß Breite frei sein soll? Man hat hier $\frac{h_1}{h} = \frac{25 - 15}{15} = \frac{10}{15} = 2/3$, $\frac{\gamma_1}{\gamma} = 5/3$ und $\varphi = tang.\ 31^0 = 0{,}6$, daher nach der dritten Verticalcolumne auf dieser Seite, $\frac{b}{h} = 0{,}572$ bis $0{,}593$, also im Mittel $0{,}58$ und $b = 0{,}58 \,.\, 15 = 8^3/_4$ Fuß.

Steht die parallelepipedische Mauer AC, Fig. 355, im Fundamente, so kommt der passive Erddruck auf der äußeren

Seite der Stabilität derselben zu Hülfe. Ist dann h_0 die Höhe DE der äußeren Erdmasse, γ_0 die Dichtigkeit und ϱ_0 der Reibungswinkel derselben, so hat man zu nehmen

$$1)\quad b = \frac{1}{2\varphi h \gamma_1}\left(\delta h^2 \gamma \left[tg.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - h_0^2 \gamma_0 \left[tg.\left(45^0 + \frac{\varrho_0}{2}\right)\right]^2\right)$$

und

$$2)\quad b = \sqrt{\frac{1}{3h\gamma_1}\left(\delta h^3 \gamma \left[tg.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - h_0^3 \gamma_0 \left[tg.\left(45^0 + \frac{\varrho_0}{2}\right)\right]^2\right)}$$

Fig. 355.

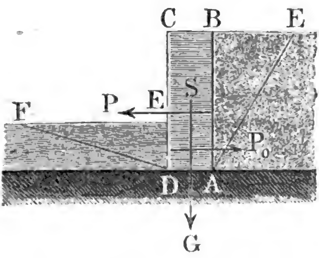
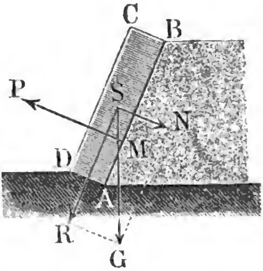


Fig. 356.



Für eine unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigte parallelepipedische Futtermauer AC, Fig. 356, hat man zu setzen:

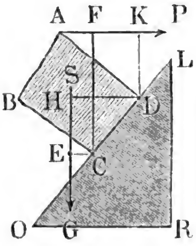
$$1)\quad b = \frac{l}{cotg.\,\alpha + \varphi} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma}\left(\frac{sin.\,\frac{1}{2}(\alpha - \varrho)}{sin.\,\frac{1}{2}(\alpha + \varrho)}\right)^2, \text{ und}$$

$$2)\quad b = l\left[-\tfrac{1}{2}cotg.\alpha + \sqrt{\frac{\delta\gamma_1}{3\gamma}\left(\frac{sin.\,\frac{1}{2}(\alpha - \varrho)}{sin.\,\frac{1}{2}(\alpha + \varrho)}\right)^2 + \tfrac{1}{4}ctg.\alpha^2}\right],$$

wo l die schräge Höhe AB und b die Breite $AD = BC$ der Mauer bezeichnet.

§. 51. Gewölbe und Widerlager. Damit ein von einer Horizontalkraft P ergriffener Körper AC vom Gewichte G auf einer schiefen Ebene vom Neigungswinkel $LOR = \alpha$, Fig. 357, weder hinab noch hinaufgleite, ist nöthig, daß

Fig. 357.



$$P > G\,tang.\,(\alpha - \varrho) \text{ und}$$
$$< G\,tang.\,(\alpha + \varrho)$$

sei, und damit er sich weder um die untere Kante C kippe noch um die obere Kante D umschlage, ist erforderlich daß

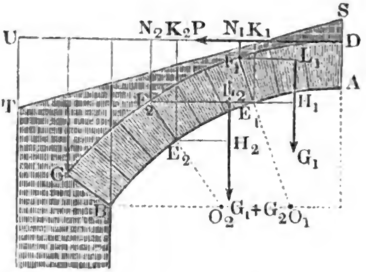
$$P > \frac{b}{a}G \text{ und } < \frac{d}{c}G$$

sei, wenn b und d die Abstände CE und DH dieser Kanten von der verticalen Schwerlinie des Körpers, sowie a und c die Abstände CF und DK derselben von der Kraftrichtung bezeichnen. Der Reibungswinkel ϱ soll für gut abgerichtete Steine zu 30^0 angenommen werden.

Zur Erhaltung des Gleichgewichts ist daher nöthig, entweder $P = G\, tang. (\alpha - \varrho)$, wenn $tang. (\alpha - \varrho) > \frac{b}{a}$ und $< \frac{d}{c}$; oder $P = \frac{b}{a} G$, wenn $\frac{b}{a} > tang. (\alpha - \varrho)$ und $< tang. (\alpha + \varrho)$ ist. Wäre im ersten Falle $tang. (\alpha - \varrho) > \frac{d}{c}$, so würde der Stein aufwärts gekippt werden, und wäre im zweiten Falle $tang. (\alpha + \varrho) < \frac{b}{a}$, so würde er aufwärts gleiten.

Diese Theorie findet unmittelbar ihre Anwendung bei der Berechnung der **Stabilität eines Gewölbes**, die hiernach auf folgende Weise zu führen ist. Man denke sich das Gewölbe AC, Fig. 358, durch, wie die Gewölbfugen liegende Ebenen E_1F_1, E_2F_2 in viele Theile zerschnitten, und berechne nach den obigen Formeln die Horizontalkraft oder die Kraft P, welche im Gewölbscheitel D zur Erhaltung des Gleichgewichtes der Gewölbstücke über diesen Ebenen nöthig ist.

Fig. 358.



Sind G_1, G_2, G_3 u. s. w. die Gewichte dieser Gewölbstücke sammt ihren Belastungen von oben, sowie α_1, α_2, α_3 u. s. w. die Neigungswinkel BO_1F_1, $BO_2F_2 \ldots$ der Ebenen E_1F_1, $E_2F_2 \ldots$, über welchen diese Stücke liegend gedacht werden müssen, so hat man:

1) $G_1\, tang. (\alpha_1 - \varrho)$, $(G_1 + G_2)\, tang. (\alpha_2 - \varrho)$, $(G_1 + G_2 + G_3)\, tang. (\alpha_3 - \varrho)$ u. s. w., sowie

2) $G_1\, tang. (\alpha_1 + \varrho)$, $(G_1 + G_2)\, tang. (\alpha_2 + \varrho)$, $(G_1 + G_2 + G_3)\, tang. (\alpha_3 + \varrho)$

auszumitteln, und bezeichnen noch b_1, b_2, b_3 u. s. w. die Abstände E_1H_1, $E_2H_2 \ldots$ der unteren Endpunkte der wirklichen oder eingebildeten Gewölbfugen von den verticalen Schwerlinien der Stücke G_1, $G_1 + G_2$, $G_1 + G_2 + G_3$ u. s. w., sowie a_1, a_2, a_3 u. s. w. die Abstände E_1K_1, $E_2K_2 \ldots$ dieser Punkte von der durch den äußeren höchsten Punkt des Gewölbes gehenden Richtung DU der Kraft P im Schlußsteine, ferner d_1, d_2, d_3 u. s. w., sowie c_1, c_2, c_3 u. s. w. die Abstände F_1L_1, $F_2L_2 \ldots$ und F_1N_1, $F_2N_2 \ldots$ der oberen Endpunkte der Gewölbfugen von eben diesen Linien, so hat man

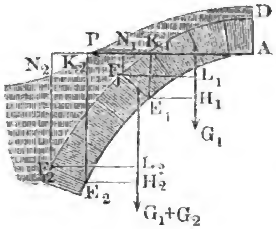
3) $\frac{b_1}{a_1} G_1$, $\frac{b_2}{a_2}(G_1 + G_2)$, $\frac{b_3}{a_3}(G_1 + G_2 + G_3)$ u. s. w., sowie

4) $\frac{d_1}{c_1} G_1, \frac{d_2}{c_2}(G_1 + G_2), \frac{d_3}{c_3}(G_1 + G_2 + G_3)$ u. s. w.

zu berechnen, und nun den größten der unter (1) und (3) berechneten Werthe als den Druck im Gewölbscheitel anzunehmen, überdies aber noch zu untersuchen, ob diese Kraft kleiner sei als der kleinste der unter (2) und (4) zu berechnenden Werthe. Ist dies der Fall, so besitzt das Gewölbe Stabilität, ist aber dieser Druck größer als der kleinste der Werthe unter (2) oder (4), so findet an der entsprechenden Stelle ein Ausgleiten oder Kippen des darüber befindlichen Gewölbstückes nach oben Statt.

Wenn, wie Fig. 359 darstellt, der Gewölbschub P im innern Scheitel A des Gewölbes angreift, so sind die Hebelarme $E_1K_1 = a_1$, $E_2K_2 = a_2 \ldots$ sowie $F_1K_1 = c_1$, $F_2K_2 = c_2 \ldots$ um die Gewölbstärke $AD = e$ im Scheitel kleiner, und es fallen die Gewölbschübe:

Fig. 359.



5) $\frac{b_1}{a_1 - e} G_1, \frac{b_2}{a_2 - e}(G_1 + G_2), \frac{b_3}{a_3 - e}(G_1 + G_2 + G_3)$

u. s. w., sowie

6) $\frac{d_1}{c_1 - e} G_1, \frac{d_2}{c_2 - e}(G_1 + G_2), \frac{d_3}{c_3 - e}(G_1 + G_2 + G_3)$

größer aus als nach den Ausdrücken unter (3) und (4).

Wenn nun hierbei der größte von den nach (5) zu bestimmenden Werthen kleiner ist als der kleinste von den nach (6) zu berechnenden Werthen, so besitzt natürlich das Gewölbe ebenfalls keine Stabilität, sondern wird um eine der äußeren Kanten F_1, $F_2 \ldots$ nach außen gekippt. Dieser Fall kommt jedoch seltener, und nur bei überhöhten Bögen vor.

Damit die Gewölbsteine dem Zerdrücken durch die Kraft P hinreichend widerstehen, muß das Gewölbe eine gewisse Stärke e erhalten. Ist K der Festigkeitsmodul der Gewölbsteine, so setze man den Tragmodul $T = \frac{K}{20}$, z. B. für Gewölbe aus Sandstein: $T = \frac{4000}{20} = 200$ Pfund, für solche aus Ziegelsteinen: $T = \frac{800}{20} = 40$ Pfund (s. Seite 370).

Bezeichnet P den Gewölbschub auf den laufenden Fuß Gewölblänge, so ist $P = 12\,e\,T$, und daher

$$e = \frac{P}{12\,T} \text{ Zoll zu setzen.}$$

Giebt nun diese Formel einen Werth für e, welcher von dem bei der Berechnung von P angenommenen wenig abweicht, so kann man erwarten, daß das Gewölbe die angemessene Stärke

habe; fällt dagegen nach dieser Formel e viel kleiner oder viel größer aus als in dem projectirten Gewölbe, so ist es nöthig, die Construction desselben abzuändern.

Die nach der letzten Formel zu berechnende Gewölbstärke e gilt natürlich nur für den Gewölbscheitel; denn nach den Widerlagern zu muß dieselbe, der Zunahme des Druckes in Folge des Gewichtes, entsprechend, wachsen. Ist das Gewicht einer Gewölbhälfte sammt ihrer Belastung $= G$, so hat man den Gesammtdruck am Widerlager:

$$P_1 = \sqrt{P^2 + G^2},$$

und daher die entsprechende Stärke des Gewölbes an den Widerlagern:

$$e_1 = \frac{P_1}{12\,T} = \frac{\sqrt{P^2 + G^2}}{12\,T} \text{ Zoll.}$$

Nach Perronet ist die Gewölbstärke mittels des Erzeugungshalbmessers r der inneren Wölbung am Scheitel durch die Formel

$$e = 0{,}0694\,r + 1 \text{ Fuß}$$

zu bestimmen.

Für ein Kreisbogengewölbe von der Spannweite s und Spannhöhe h ist

$$r = \frac{s^2}{8\,h} + \frac{h}{2} = \frac{s^2 + 4\,h^2}{8\,h}, \text{ daher}$$

$$e = 0{,}008675\left(\frac{s^2 + 4\,h^2}{h}\right) + 1 \text{ Fuß},$$

z. B. für ein Halbkreisgewölbe, wo $\frac{1}{2}s = h = r$ ist,

$$e = 0{,}0347\,s + 1 \text{ Fuß}.$$

Nach Rondelet soll man für kreisförmige und elliptische Gewölbe

$$e = \frac{s}{48} + \tfrac{1}{2} = 0{,}0208\,s + 0{,}5 \text{ Fuß bis}$$

$$= \frac{s}{24} + 1 = 0{,}0417\,s + 1 \text{ Fuß machen.}$$

Für Chaussee- und Eisenbahnbrücken mit einer Ueberschüttung bis zu 5 Fuß Höhe über dem Scheitel ist, wenn dieselben aus Quadersteinen bestehen, nach Herrn Katen

$$e = \left(0{,}025 + 0{,}00333\,\frac{s}{h}\right)s + 0{,}75 \text{ Fuß}$$

zu setzen.

Bei Brücken mit Ueberschüttung bis zu $a = 50$ Fuß Höhe, und Spannweiten bis 30 Fuß ist die erforderliche Stärke

$$e_1 = \left(1 + \frac{a}{36}\right)e.$$

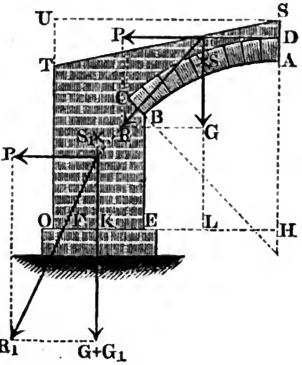
Für Brücken aus Ziegel- oder Backsteinen soll die Stärke in dem einen oder dem anderen Falle, wenn $e < 4$ Fuß ausfällt,

$$e_1 = \left(1 + \frac{4 - e}{6}\right)e$$

genommen werden.

Die Widerlagsmauern eines Gewölbes können, namentlich wenn dieses sehr flach ist und deshalb einen bedeutenden Horizontaldruck P besitzt, durch Gleiten oder Kippen nachgeben und es kann dadurch der Einsturz des Gewölbes herbeigeführt werden. Um dies zu verhindern, ist es nöthig, denselben eine gewisse Dicke OE, Fig. 360, zu geben. Ist P der Horizontalschub im Scheitel, G das Gewicht der Gewölbhälfte sammt Belastung, G_1 das der Widerlagsmauer, und φ der Reibungscoefficient, so muß zur **Verhinderung des Ausgleitens** sein:

Fig. 360.



$$G + G_1 > \frac{P}{\varphi},$$

also, wenn h_1 die mittlere Höhe OT, e_0 die Dicke OE und γ die Dichtigkeit der Widerlagsmauer bezeichnet:

$$1) \quad e_0 = \delta\left(\frac{P - \varphi G}{\varphi h_1 \gamma}\right),$$

oder für $\delta = 2$,

$$e_0 = 2\left(\frac{P - \varphi G}{\varphi h_1 \gamma}\right).$$

Zur Verhinderung des Kippens ist nöthig, daß die Stabilität der Widerlagsmauer sammt Gewölbe in Hinsicht auf die äußere Kante O der ersteren größer sei als das Moment des Horizontalschubes P in Hinsicht auf eben diese Kante. Ist nun s der Horizontalabstand EL der inneren Gewölbkante C von der verticalen Schwerlinie der Gewölbhälfte, und h die Gewölbhöhe, also $h + h_1$ die Höhe AH des Gewölbscheitels über der Basis der Widerlagsmauer, und nimmt man der Sicherheit wegen statt P, $\delta P = 2P$ an, so hat man hiernach:

$$G(s + e_0) + \tfrac{1}{2} G_1 e_0 = 2P(h + h_1), \text{ oder}$$

$$e_0^2 + \frac{2 G e_0}{h_1 \gamma} = \frac{2P(h + h_1) - Gs}{\tfrac{1}{2} h_1 \gamma},$$

daher die gesuchte **Stärke der Widerlagsmauer**:

$$2) \quad e_0 = -\frac{G}{h_1 \gamma} + \sqrt{\frac{2P(h + h_1) - Gs}{\tfrac{1}{2} h_1 \gamma} + \left(\frac{G}{h_1 \gamma}\right)^2},$$

und für $h_1 = \infty$, den Grenzwerth:

$$e_0 = \sqrt{\frac{4P}{\gamma}} = 2\sqrt{\frac{P}{\gamma}}.$$

Natürlich ist der größere von den nach 1) und nach 2) berechneten Werthen von e_0 in Anwendung zu bringen. Die Formel 1) ist besonders zur Bestimmung der Stärke des Widerlagers an

der Auflagerungsstelle des Gewölbes, wo dann h_1 die Höhe der Uebermauerung bedeutet, anzuwenden.

Nach Herrn Kaven ist für Eisenbahnbrücken mit einer Ueberschüttung von höchstens 5 Fuß die Stärke des Widerlagspfeilers

$$e_0 = \left[1{,}065 + 0{,}177\left(\frac{s}{h} - 2\right) + 0{,}033\, h_1\right] \sqrt{s} + \frac{s}{30} \text{ Fuß}$$

zu setzen, wobei s die Spannweite und h die innere Höhe des Gewölbbogens, sowie h_1 die Höhe des Pfeilers, vom Kämpfer bis zum Fundament gemessen, bezeichnet.

Halbkreisgewölbe mit größerer Ueberschüttung (a) und höchstens 30 Fuß Spannweite, erfordern noch die Verstärkung

$$\triangle e_0 = 0{,}005\, a\, s.$$

Folgende Tabelle giebt die Größe des Gewölbschubes und die entsprechende Grenze der Widerlagsdicken eines Kreisgewölbes mit horizontaler Uebermauerung an. In derselben enthält die erste Columne das Verhältniß $\varkappa = \frac{r_2}{r_1}$ des äußeren Halbmessers r_2 zum inneren r_1, die zweite Columne das Verhältniß $\frac{e}{2\, r_1}$ der Gewölbstärke e zum inneren Durchmesser, oder, nach Befinden, zur Spannweite $s = 2\, r_1$, ferner die dritte Columne den Bruchwinkel, oder die Neigung der Bruchfuge gegen die Verticale, sowie die vierte und fünfte Columne die Coefficienten des Gewölbschubes sowohl in Hinsicht auf Drehung als auch in Hinsicht auf Gleiten. Endlich enthält die sechste Columne die Coefficienten der Stärken der Widerlager für eine unendlich große Höhe derselben.

Um die Größe des Gewölbschubes selbst zu finden, muß man den größeren der beiden Werthe in den Columnen Nr. 4 und Nr. 5 durch $r_1^2 \gamma$, d. i. durch das Quadrat (r_1^2) des Halbmessers der inneren Wölbung und durch die Dichtigkeit (γ) der Gewölbmasse multipliciren. Die Stärke der Widerlagsmauer ergiebt sich mittels einfacher Multiplication des entsprechenden Coefficienten aus Columne Nr. 6, durch den inneren Gewölbhalbmesser (r_1).

Beispiel. Für ein Kreisbogengewölbe mit horizontaler Uebermauerung von 30 Fuß Spannweite und 10 Fuß Bogenhöhe ist nach der Kaven'schen Formel die erforderliche Stärke im Scheitel:

$$e = \left(0{,}025 + 0{,}00333\, \frac{s}{h}\right) s + 0{,}75$$

$$= (0{,}025 + 0{,}00333 \,.\, 3) \,.\, 30 + 0{,}75 = 1{,}80 \text{ Fuß}.$$

Ferner ist der innere Halbmesser des Gewölbes $r_1 = \frac{s^2}{8h} + \frac{h}{2}$ $= 16{,}25$ Fuß, daher der äußere Halbmesser derselben, $r_2 = r_1 + e$ $= 18{,}05$ Fuß, und $\frac{r_2}{r_1} = 1{,}11$. Nun folgt nach der Tabelle der Coefficient des Gewölbschubes

$p = 0{,}10279 + \frac{1}{5}(0{,}11895 - 0{,}10279) = 0{,}106,$
und die Größe dieses Schubes, wenn ein Cubikfuß Gewölbmasse 150 Pfund wiegt:

$$P = p r_1^2 \gamma = 0{,}106 \,.\, 16{,}25^2 \,.\, 150 = 4198 \text{ Pfund.}$$

Es ist folglich der mittlere Druck im Gewölbscheitel pr. Quadratfuß, $= \frac{4198}{e} = \frac{4198}{1{,}8} = 2332$ Pfund, also pr. Quadratzoll, $= \frac{2332}{144} = 16{,}2$ Pfund. Bei hoher Uebermauerung fällt natürlich dieser Druck weit größer aus.

Die erforderliche größte Stärke der Widerlagsmauer ist nach der Tabelle, $e_1 = 16{,}25 \,.\, 0{,}6342 = 10{,}3$ Fuß. Wäre die Pfeilerhöhe $h_1 = 30$ Fuß, so gäbe die Raven'sche Formel

$$e_0 = \left[1{,}065 + 0{,}177\left(\frac{s}{h} - 2\right) + 0{,}033\, h_1\right]\sqrt{s} + \frac{s}{30}$$
$$= (1{,}065 + 0{,}177 + 1)\sqrt{30} + 1 = 2{,}242 \,.\, 5{,}477 + 1$$
$$= 13{,}28 \text{ Fuß.}$$

Tabelle des Gewölbschubes von Halbkreisgewölben mit horizontaler Uebermauerung.

Verhältniß der Halbmesser $x = \frac{r_2}{r_1}$	Verhältniß des inneren Durchmessers zur Dicke	Bruchwinkel, Neigung der Bruchfuge gegen die Verticale	Coefficient p des Gewölbschubes für Drehung	Coefficient p des Gewölbschubes für Gleitung	Coefficient für die Grenzen d. Widerlagsdicken
2,00	2,000	36°	0,05486	0,50358	1,3834
1,80	2,500	44°	0,08508	0,37901	1,2001
1,60	3,333	52°	0,12300	0,26755	1,0082
1,55	3,636	54°	0,13027	0,24173	0,9584
1,50	4,000	56°	0,13648	0,21673	0,9075
1,45	4,444	57°	0,14122	0,19256	0,8554
1,40	5,000	59°	0,14421	0,16920	0,8018
1,35	5,714	60°	0,14504	0,14666	0,7465
1,30	6,666	61°	0,14332	0,12495	0,7379
1,25	8,000	62°	0,13872	0,10405	0,7260
1,20	10,000	63°	0,13073	0,08397	0,7048
1,15	13,333	64°	0,11895	0,06471	0,6723
1,10	20,000	65°	0,10279	0,04627	0,6249
1,05	40,000	69°	0,08176	0,02865	0,5573
1,00	∞	75°	0,05547	0,01185	—

§. 52. Balken, einfache Häng- und Sprengwerke. Wenn ein Balken AA, Fig. 361 (a. f. S.), nicht bloß an den Enden A, A, sondern auch in Zwischenpunkten B, C.. unterstützt wird, so vertheilt sich dessen Belastung Q nahe so, wie in folgender Tabelle angegeben wird, worin l die Länge des Balkens und n die Anzahl der Tragfelder, also $\frac{l}{n}$ die Länge eines Feldes

und $n - 1$ die Anzahl der Stützpunkte innerhalb der Widerlager L, L bezeichnet. Auch giebt diese Tabelle das Product $b h^2$ aus der Breite b und dem mittleren Quadrate h^2 der Höhe des Balkens an, wenn der Tragmodul T des Balkenmateriales bekannt ist (s. S. 386 und 387).

Fig. 361.

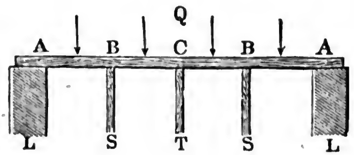


Tabelle der Tragkräfte unterstützter Balken.

	Die Last Q ist auf die ganze Balkenlänge gleichmäßig vertheilt		Die Last ist auf die Mittelpunkte zwischen je zwei Stützpunkten gleichmäßig vertheilt	
	Die Balkenenden sind befestigt	Die Balkenenden liegen frei auf	Die Balkenenden sind befestigt	Die Balkenenden liegen frei auf
Druck auf ein Widerlager	$\frac{1}{2}\frac{Q}{n}$	$\frac{3}{8}\frac{Q}{n}$	$\frac{1}{2}\frac{Q}{n}$	$\frac{5}{16}\frac{Q}{n}$
Druck auf die Stützpunkte zunächst der Widerlager . .	$\frac{Q}{n}$	$\frac{9}{8}\frac{Q}{n}$	$\frac{Q}{n}$	$\frac{19}{16}\frac{Q}{n}$
Druck auf die übrigen zwischenliegenden Stützpunkte	$\frac{Q}{n}$	$\frac{Q}{n}$	$\frac{Q}{n}$	$\frac{Q}{n}$
Product $b h^2$ für die Balkenenden .	$\frac{1}{2}\frac{Ql}{n^2 T}$	$\frac{3}{4}\frac{Ql}{n^2 T}$	$\frac{3}{4}\frac{Ql}{n^2 T}$	$\frac{9}{8}\frac{Ql}{n^2 T}$
Product $b_1 h_1^2$ für die mittleren Balkenstücke	$\frac{1}{2}\frac{Ql}{n^2 T}$	$\frac{1}{2}\frac{Ql}{n^2 T}$	$\frac{3}{4}\frac{Ql}{n^2 T}$	$\frac{3}{4}\frac{Ql}{n^2 T}$

Ist z. B. die Anzahl der Stützpunkte $n - 1 = 3$, also die Anzahl der Balkenfelder $n = 4$, so hat man in dem Falle, wenn der Balken an den Enden frei aufliegt und die Last auf denselben gleichmäßig vertheilt ist, den Druck auf ein Widerlager $R = \frac{3}{8}\frac{Q}{4} = \frac{3\,Q}{32}$, den auf je einen Stützpunkt B, B zunächst eines Widerlagers: $R_1 = \frac{9}{8}\frac{Q}{4} = \frac{9}{32}\,Q$, den auf den mittleren Stützpunkt C: $R_2 = \frac{Q}{4} = \frac{8}{32}Q$. Besteht der Balken

aus Holz und setzt man für dasselbe statt T, $\frac{T}{m} = 1000$ Pfund ein, so erhält man für die Balkenenden: $b h^2 = \frac{3\,Q l}{64000}$, und für die Balkenmitte: $b_1 h_1^2 = \frac{Q l}{32000}$, oder wenn man $b = 0{,}707\,h$ und $b_1 = 0{,}707\,h_1$ macht,

$$h^3 = 0{,}00006630\,Q l \text{ und } h_1^3 = 0{,}00004420\,Q l.$$

Wäre nun noch $Q = 10000$ Pfund und $l = 50\,.\,12 = 600$ Zoll, so hätte man

$$h^3 = 397{,}8 \text{ und } h_1^3 = 265{,}2, \text{ daher}$$
$$h = 7{,}35 \text{ und } h_1 = 6{,}42 \text{ Zoll, sowie}$$
$$b = 5{,}20 \text{ und } b_1 = 4{,}54 \text{ Zoll.}$$

Ohne die drei Stützen würde

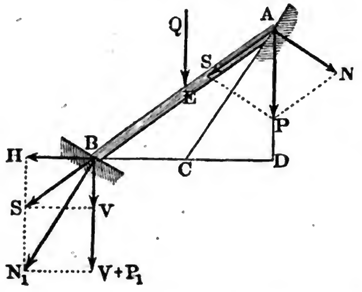
$$b h^2 = \tfrac{3}{2}\,\frac{Q l}{T} = \frac{3\,Q l}{2000}, \text{ oder } h^3 = 0{,}002121\,Q l = 12726,$$

daher die Balkenhöhe $h = 16{,}20$ Zoll und die Balkenbreite $b = 11{,}45$ Zoll betragen müssen.

Dieselbe Vertheilung findet auch bei einem geneigten Balken oder Sparren statt. Liegt der Balken oder Sparren in einer horizontalen Fläche auf verticalen Säulen oder Mauern auf, so gehen die gefundenen Kräfte unverändert auf diese über; sind aber die Lagerflächen geneigt, oder bestehen die Unterstützungen in schiefstehenden Säulen oder sogenannten Streben u. s. w., so findet an jedem Unterstützungspunkte eine Kraftzerlegung statt, in Folge deren auch der Balken noch eine Axenspannung erhält.

Hat ein Balken AB, Fig. 362, die Neigung $ABD = \alpha$, und die Auflagerungsfläche bei A die Neigung $ACD = \beta$ gegen den Horizont, so zerlegt sich der am Ende A wirkende Theil P der Last Q in die Normalkraft

Fig. 362.



$$N = \frac{P \cos.\alpha}{\cos.(\beta - \alpha)},$$

welche die Stütze bei A aufnimmt, und in die Spannkraft

$$S = \frac{P \sin.\beta}{\cos.(\beta - \alpha)},$$

welche den Balken in der Axenrichtung zusammendrückt.

Die letztere Kraft ist in Vereinigung des zweiten Theiles P_1 der Last Q, von der Stütze bei B aufzunehmen, und deshalb dieses Ende mit zwei Auflagerungsflächen oder wenigstens mit einer Auflagerungsfläche, welche auf der Richtung der Mittelkraft R von S und P_1 rechtwinkelig steht, zu versehen. Aus der Spannkraft S geht der Horizontalschub

$$H = S \cos.\alpha = \frac{P \cos.\alpha \sin.\beta}{\cos.(\beta - \alpha)}$$

und der Verticaldruck

$$V = S \sin.\alpha = \frac{P \sin.\alpha \sin.\beta}{\cos.(\beta - \alpha)}$$ hervor.

Erhält nun das Ende B eine verticale und eine horizontale Auflagerungsfläche, so nimmt die erstere den Horizontalschub H und die letztere den gesammten Verticaldruck

$$V + P_1 = \frac{P \sin.\alpha \sin.\beta}{\cos.(\beta - \alpha)} + P_1 = Q - \frac{P \cos.\alpha \cos.\beta}{\cos.(\beta - \alpha)}$$

auf. Bei Anwendung einer einzigen Auflagerungsfläche ist derselben eine Neigung β_1 gegen den Horizont zu geben, welche durch die Formel

$$cotg.\beta_1 = \frac{V + P_1}{H} = \frac{S \sin.\alpha + P_1}{S \cos.\alpha}$$
$$= tang.\alpha + \frac{P_1 \cos.(\beta - \alpha)}{P \cos.\alpha \sin.\beta}$$

bestimmt ist.

Der Druck des Balkens auf die Stütze bei B rechtwinkelig gegen diese Auflagerungsfläche ist

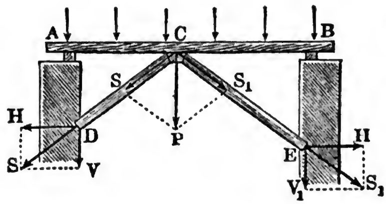
$$N_1 = \sqrt{H^2 + (V + P_1)^2} = \frac{H}{\sin.\beta_1} = \frac{V + P_1}{\cos.\beta_1}.$$

Ist die Last Q auf die Balkenlänge AB gleichmäßig vertheilt, oder wirkt dieselbe in der Mitte von AB, so hat man $P_1 = P = \frac{Q}{2}$ zu setzen, ist hingegen der Angriffspunkt E der Last Q von den Enden A und B ungleich entfernt, und zwar um $EA = l_1$ und $EB = l_2 = l - l_1$, so hat man zu setzen:

$$P = \frac{l_2}{l} Q \text{ und } P_1 = \frac{l_1}{l} Q.$$

Bei der Unterstützung eines Balkens AB, Fig. 363, durch gegen den Horizont unter den Winkeln α und α_1 geneigte Streben CD und CE zerlegt sich ein Theil P der Balkenlast Q in die Druckkräfte

Fig. 363.



$$S = \frac{P \cos.\alpha_1}{\sin.(\alpha + \alpha_1)}$$

und

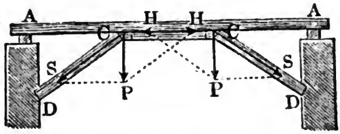
$$S_1 = \frac{P \cos.\alpha}{\sin.(\alpha + \alpha_1)},$$

welche unverändert auf die Stützmauern übergehen und diese nach außen durch den Horizontalschub $H = \frac{P \cos.\alpha \cos.\alpha_1}{\sin.(\alpha + \alpha_1)}$ fortzubewegen suchen. Um die zufälligen Biegungen der Streben zu verhindern, verbindet man sie noch durch sogenannte Zangen unter einander und mit dem Balken AB.

Um den Balken durch zwei Streben in mehren Punkten zu unterstützen, stemmt man die Streben CD, CD mit ihren oberen Enden C und C gegen einen Spannriegel CC, Fig. 364. Nimmt dann jedes der Enden C, C den Theil P der Balkenlast Q auf, so ist die Kraft, welche auf je eine Strebe übergeht, $S = \frac{P}{sin. \alpha}$, und die, mit welcher der Spannriegel zusammengedrückt wird,

$$H = P \, cotang. \alpha.$$

Fig. 364.



Wird der Balken AA, Fig. 365, durch eine Hängesäule BC unterstützt, welche durch Streben BA, BA mit den Balkenenden verbunden ist, so ist die in einer Strebe fortgepflanzte Kraft

$$S = \frac{P}{2 \, sin. \alpha},$$

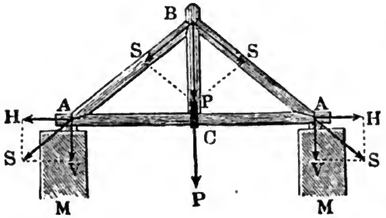
der Horizontalschub

$$H = \frac{P}{2} cotang. \alpha$$

und der Verticaldruck

$$V = \frac{1}{2} P.$$

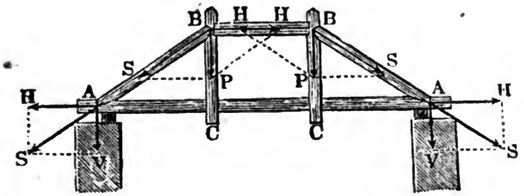
Fig. 365.



Während hier die Kraft H den Balken in seiner Axenrichtung ausspannt, sucht sie dagegen die Stützmauern M, M nach außen zu schieben, wenn die Streben nicht in den Balkenenden eingesetzt sind, sondern sich gegen diese Mauern stemmen.

Bei einer Unterstützung des Balkens AA, Fig. 366, mittels

Fig. 366.



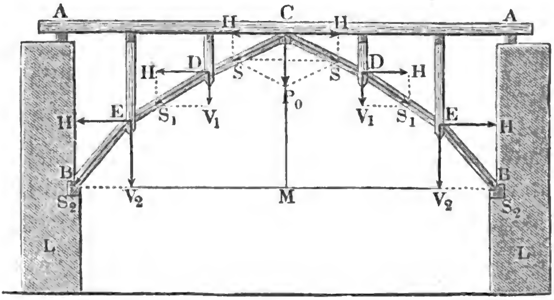
zwei durch einen Spannriegel BB mit einander verbundenen Hängesäulen BC, BC kommen dieselben Kraftzerlegungen vor wie bei dem Sprengwerke Fig. 364.

§. 53. Polygonale und bogenförmige Häng- und Sprengwerke. Nach den vorstehenden Regeln lassen sich auch die Kräfte zusammengesetzter Häng- und Sprengwerke ermitteln.

Wird ein Balken AA, Fig. 367, durch das polygonale

Sprengwerk ECE in fünf Punkten so unterstützt, daß der Mittelpunkt C die Last P_0, jeder der benachbarten Punkte D, D die Last P_1, und jeder der folgenden Punkte E, E die Last

Fig. 367.



P_2 trägt, so ist der gesammte Verticaldruck in D:

$$V_1 = \frac{1}{2} P_0 + P_1, \text{ und der in } E\text{:}$$

$$V_2 = \frac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2,$$

und bezeichnen α_0, α_1 und α_2 die Neigungen der Sparren oder Streben CD, DE, EB gegen den Horizont, so ist der Horizontalschub des ganzen Sprengwerkes:

$$H = \frac{1}{2} P_0 \, cotang. \alpha_0 = (\frac{1}{2} P_0 + P_1) \, cotang. \alpha_1$$
$$= (\frac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2) \, cotang. \alpha_2,$$

weshalb also zur Herstellung des Gleichgewichtes erfordert wird, daß

$$tang. \alpha_1 = \frac{P_0 + 2 P_1}{2 H} = \left(1 + \frac{2 P_1}{P_0}\right) tang. \alpha_0 \text{ und}$$

$$tang. \alpha_2 = \frac{P_0 + 2(P_1 + P_2)}{2 H} = \left(1 + \frac{2(P_1 + P_2)}{P_0}\right) tg. \alpha_0$$

ist.

Die Spannungen der Streben sind:

$$S = \frac{P_0}{2 \, sin. \alpha_0}, \; S_1 = \frac{P_0 + 2 P_1}{2 \, sin. \alpha_1}, \; S_2 = \frac{P_0 + 2(P_1 + P_2)}{2 \, sin. \alpha_2}.$$

Die letztere geht auf die Widerlagsmauern B, B über.

Ist der Balken AA gleichmäßig belastet und sind die Entfernungen der Stützpunkte von einander gleich, so hat man $P_2 = P_1 = P_0$, daher $V_1 = \frac{3}{2} P_0$ und $V_2 = \frac{5}{2} P$, sowie $tang. \alpha_1 = 3 \, tang \, \alpha_0$ und $tang. \alpha_2 = 5 \, tang. \alpha_0$.

Ist endlich b die halbe Spannweite BM und a die Höhe CM des Sprengwerkes, so folgt

$$a = \frac{b}{3} (tang. \alpha_0 + tang. \alpha_1 + tang. \alpha_2) = 3 \, b \, tang. \alpha_0,$$

sowie umgekehrt,

$$tang. \alpha_0 = \frac{a}{3 \, b}, \; tang. \alpha_1 = 3 \cdot \frac{a}{3 \, b}, \; tang. \alpha_2 = 5 \cdot \frac{a}{3 \, b}.$$

Wird der Balken in $2 n - 1$ Zwischenpunkten unterstützt, ist also die Anzahl der Streben des Sprengwerkes auf jeder Seite $= n$, so hat man

$tang.\,\alpha_{n-1} = (2n-1)\,tang.\,\alpha_0$ und $a = nb\,tang.\,\alpha_0$, daher umgekehrt,

$$tang.\,\alpha_0 = \frac{a}{nb},\ tang.\,\alpha_1 = 3\,\frac{a}{nb},\ tang.\,\alpha_2 = 5\,\frac{a}{nb},$$

$$tang.\,\alpha_3 = 7\,\frac{a}{nb}$$ u. s. w.

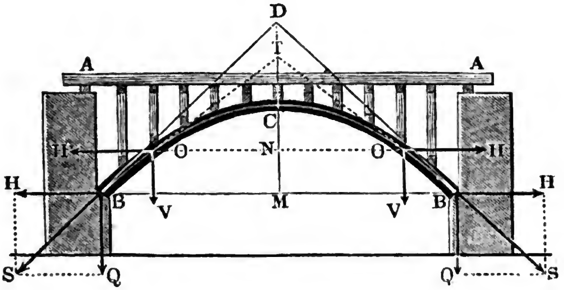
Endlich ist $tang.\,\alpha_{n-1} = \frac{2n-1}{n}\cdot\frac{a}{b}$ und $H = \frac{nb}{2a}\,P$.

Ist $n = \infty$, so nimmt das Sprengwerk eine Bogenform an, und dann ist

$$tang.\,\alpha_{n-1} = tang.\,\alpha_n = \frac{2a}{b},$$ oder einfacher, $$tang.\,\alpha = \frac{2a}{b},$$

wobei $\alpha_n = \alpha$, den Neigungswinkel des gespannten Bogens BCB, Fig. 368, am Fußpunkte B bezeichnet. An einer anderen

Fig. 368.



Stelle O dieses Bogens ist der Neigungswinkel $TON = \varphi$ bestimmt durch die Gleichung $tang.\,\varphi = \frac{2x}{y}$, wenn x und y die entsprechenden Coordinaten CN und NO dieses Punktes O bezeichnen. Die Curve, welche von der Axe dieses Bogens gebildet wird, ist dann eine Parabel, für welche auch die Gleichung

$$\frac{x}{a} = \frac{y^2}{b^2},\ \text{oder}\ \frac{y}{b} = \sqrt{\frac{x}{a}}$$ gilt.

Bei der Last $2Q$ des Balkens AA ist dann die Horizontalspannung des Bogens in allen Punkten, $H = \frac{b}{2a}\,Q$, ferner die Verticalspannung in irgend einem Punkte O:

$$V = \frac{y}{b}\,Q,$$ und die Gesammtspannung daselbst

$$S = \sqrt{H^2 + V^2} = Q\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}.$$

Am Fußpunkte ist $V = Q$ und

$$S = Q\sqrt{1 + \left(\frac{b}{2a}\right)^2} = \frac{Q\sqrt{4a^2 + b^2}}{2a}.$$

Bezeichnet T den Tragmodul des Bogens, so hat man für den erforderlichen Querschnitt desselben in B:

$$F = \frac{S}{T} = \frac{Q}{T}\sqrt{1 + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}.$$

Dieselben Formeln gelten auch annähernd für Kreisbögen, es ist hier:

für $\frac{b}{a} =$	1	2	3	4	5	10
nach der Formel $H = \frac{b}{2a}Q, H =$	$0{,}50\,Q$	$1{,}00\,Q$	$1{,}50\,Q$	$2{,}00\,Q$	$2{,}50\,Q$	$5{,}00\,Q$
nach Ardant's Versuchen, $H =$	$0{,}44\,Q$	$1{,}08\,Q$	$1{,}55\,Q$	$2{,}04\,Q$	$2{,}66\,Q$	$6{,}66\,Q$

Während der Parabelbogen bei gleichmäßiger Belastung nur dem Drucke ausgesetzt ist, erleidet der Kreisbogen noch eine Biegung, und es ist deshalb der Querschnitt desselben nach Ardant durch die Formel

$$F = b_1 h_1 = \left(\mu + \frac{\nu r}{4 h_1}\right)\frac{Q}{T}$$

zu berechnen, worin r den Halbmesser des Bogens, b_1 und h_1 die Breite und Höhe des Bogenquerschnittes F, sowie μ und ν die in der folgenden Tabelle angegebenen Coefficienten bezeichnen.

$\frac{b}{a} =$	2	3	4	5	10	15	20
$\mu =$	1,080	1,550	2,040	2,660	6,660	7,630	9,520
$\nu =$	0,792	0,263	0,117	0,053	0,034	0,022	0,001

Hierbei soll man für Holz $T = 420$ Pfund und
für Gußeisen $T = 7000$ Pfund annehmen.

§. 54. Die obigen Formeln für das polygonale und bogenförmige Sprengwerk gelten auch für ein gleichgeformtes Hängewerk; nur wirken hier die Spannkräfte H, V und S nicht durch Druck, sondern durch Zug.

Wird z. B. der durch $2\,Q$ gleichmäßig belastete Balken AA, Fig. 369, durch ein Hängewerk BCB in sieben Punkten $C, D, E\ldots$ unterstützt, wovon jeder die Last P aufnimmt, so sind bei der Spannweite $BB = 2\,b$ und Spannhöhe $MC = a$, da hier $n = 4$ ist, die Neigungswinkel der Spannglieder CD, DE, EF und FB durch die Formeln

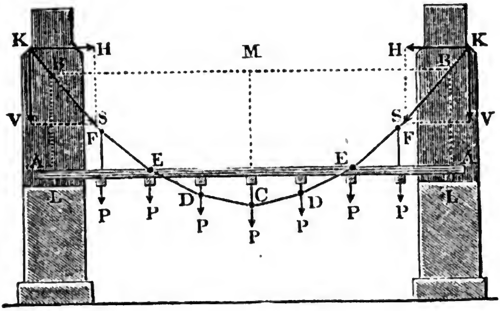
$$tang.\, \alpha_0 = \frac{a}{4\,b},\ tang.\, \alpha_1 = 3\,\frac{a}{4\,b},$$

$$tang.\, \alpha_2 = 5\,\frac{a}{4\,b} \text{ und } tang.\, \alpha_3 = 7\,\frac{a}{4\,b}$$

bestimmt, und es ist zu setzen, die Horizontalspannung:

$$H = \frac{2b}{a}P = \frac{2b}{a}\frac{Q}{7},$$

Fig. 369.



die Verticalspannung im Aufhängepunkt:

$$V = \tfrac{7}{2}P = \tfrac{1}{2}Q,$$

und die Axenspannung des obersten Spanngliedes:

$$S = \frac{V}{sin.\,\alpha} = P\sqrt{(\tfrac{7}{2})^2 + \left(\frac{2b}{a}\right)^2}.$$

Allgemein ist bei $2n$ Tragfelder oder $2n - 1$ Stützpunkten für die Aufhängepunkte K, K

$$tang.\,\alpha_{n-1} = \frac{2n-1}{n}\frac{a}{b},$$

$$H = \frac{nb}{2a}P,\ V = \left(\frac{2n-1}{2}\right)P \text{ und}$$

$$S = \sqrt{H^2 + V^2} = P\sqrt{\left(\frac{nb}{2a}\right)^2 + \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}.$$

Der Querschnitt dieses Spanngliedes ist bestimmt durch die Formel $F = \frac{S}{T}$, worin, wenn wie gewöhnlich, die Spannglieder aus Schmiedeeisen sind, $T = 16500$ Pfund (pr. Quadratzoll) angenommen werden soll.

Ist, wie bei Hängebrücken, die Anzahl der Stützpunkte oder Hängestäbe sehr groß, so nimmt das Hängewerk BCB, Fig. 370 (a. f. S.), die Gestalt einer Parabel an, für welche wieder

$$tang.\,\alpha = \frac{2a}{b},\ H = \frac{b}{2a}Q,\ V = nP = Q \text{ und}$$

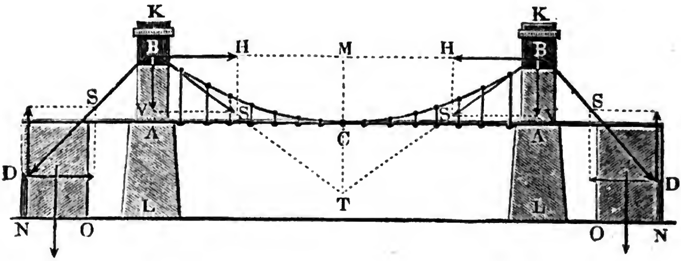
$$S = Q\sqrt{1 + \left(\frac{b}{2a}\right)^2} = \frac{Q}{2a}\sqrt{4a^2 + b^2} \text{ ist.}$$

Diese Formeln finden ihre vorzügliche Anwendung bei **Bandeisen-** und **Drahtseilen**. Für die aus übereinanderliegenden Eisenbändern von 2 bis 4 Zoll Breite und $\frac{1}{8}$ Zoll Dicke bestehenden Bandseile ist $T = 19300$ und für die aus 1 bis 2 Linien dicken Eisendrähten zusammengesetzten Drahtseile ist $T = 24500$

Pfund zu setzen, wenn es darauf ankommt, den Querschnitt des Tragbogens mittels der Formel $F = \frac{S}{T}$ zu berechnen.

Bei Anwendung auf Hängebrücken setzt man die Belastung pr. Quadratfuß Brückenbahn 40 Pfund, wonach also auch bei

Fig. 370.



gegebener Länge und Breite der Brückenbahn die Last Q leicht zu berechnen ist.

Ist c die mittlere Länge einer Hängestange und $T_1 = 2000$ Pfund der Tragmodul dieser Stangen, so hat man den erforderlichen Querschnitt derselben zusammengenommen:

$$F_1 = \frac{Q}{T_1 - 3{,}53\,c} = \frac{0{,}0005\,Q}{1 - 0{,}001765\,c}$$
$$= 0{,}0005\,(1 + 0{,}001765\,c)\,Q \text{ Quadratzoll.}$$

Das Gewicht sämmtlicher Hängestangen einer Bogenhälfte ist
$Q_1 = 3{,}53\,F_1 c = 0{,}001765\,(1 + 0{,}001765\,c)\,cQ$ Pfund.

Der nöthige Querschnitt der Tragseile oder Tragketten ist dagegen

$$F = \frac{\frac{1}{2}(Q + Q_1)}{T\,sin.\,\alpha - 3{,}53\,b\,(1 + \frac{1}{6}\,sin.\,\alpha^2)},$$

wobei $sin.\,\alpha = \frac{2\,a}{\sqrt{4\,a^2 + b^2}}$, oder annähernd, da gewöhnlich $\frac{a}{b} = \frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{10}$ ist,

$$sin.\,\alpha = \frac{2\,a}{b}\left[1 - 2\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]$$

gesetzt werden kann.

Das Gewicht der Tragketten für eine Bogenhälfte ist
$Q_2 = 3{,}53\,Fl = 3{,}53\,Fb\,[1 + \frac{1}{6}\,(sin.\,\alpha)^2]$ Pfund.

Aus den Gewichten Q, Q_1 und Q_2 folgt die Verticalkraft im Aufhängepunkte:

$$V = Q + Q_1 + Q_2,$$

ferner die Horizontalkraft

$$H = \frac{b}{2\,a}\,(Q + Q_1 + Q_2),$$

und die Gesammtspannung

$$S = FT = \frac{Q + Q_1 + Q_2}{sin.\,\alpha}.$$

Wenn die Tragketten an den Endpfeilern befestigt sind, so müssen die letzteren durch ihr Gewicht dem Ausgleiten und Kippen widerstehen können und deshalb eine gewisse Dicke d erhalten, welche auf ähnliche Weise wie die Dicke der Widerlager bei Gewölben zu ermitteln ist. Man hat hier zur Verhinderung des Gleitens:

$$d = 2\left(\frac{H - \varphi V}{\varphi e h_1 \gamma}\right),$$

und zur Verhinderung des Kippens:

$$d = -\frac{V}{e h_1 \gamma} + \sqrt{4\,\frac{Hh}{e h_1 \gamma} + \left(\frac{V}{e h_1 \gamma}\right)^2},$$

wobei γ die Dichtigkeit der Pfeilermasse, φ den Reibungscoefficienten (0,3) derselben auf dem Fundamente, e die Pfeilerbreite, h die Höhe des Aufhängepunktes der Kette und h_1 die des Pfeilerkopfes über dem Pfeilerfuße bezeichnet.

In der Regel führt man die Seile oder Ketten über die Pfeiler KL, KL weg und befestigt ihre Enden in besonderen Widerlagsmauern DO, DO.

Sind S und S_1 die Kettenspannungen zu beiden Seiten des Stützpfeilers, α und α_1 die Neigungswinkel derselben, ist ferner a der Halbmesser der Rollen, sowie r der der Zapfen derselben und φ der Coefficient der Zapfenreibung, so hat man zu setzen:

$$S_1 = \left(\frac{1 - \varphi\frac{r}{a}\,sin.\,\alpha}{1 + \varphi\frac{r}{a}\,sin.\,\alpha_1}\right) S,$$

ferner ist die auf die Stützpfeiler übergehende Horizontalkraft

$$H_1 = S\,cos.\,\alpha - S_1\,cos.\,\alpha_1$$

$$= \left(\frac{cos.\,\alpha - cos.\,\alpha_1 + \varphi\frac{r}{a}\,sin.\,(\alpha + \alpha_1)}{1 + \varphi\frac{r}{a}\,sin.\,\alpha_1}\right) S$$

und die Verticalkraft:

$$V_1 = S\,sin.\,\alpha + S_1\,sin.\,\alpha_1 = \left(\frac{sin.\,\alpha + sin.\,\alpha_1}{1 + \varphi\frac{r}{a}\,sin.\,\alpha_1}\right) S.$$

Liegen die Ketten auf Walzen auf, so hat man $\varphi r = f = 0{,}02$ Zoll einzusetzen und besteht der Pfeiler in einer drehbaren Säule, so bedeutet r den Halbmesser des Fußzapfens und a die Länge der Säule, von dem Kettenbolzen bis Fußzapfen gemessen.

Aus diesen Kräften folgt die nöthige Stärke des festen Stützpfeilers KL:

$$d_1 = -\frac{V_1}{2 e_1 h_1 \gamma} + \sqrt{4\,\frac{H_1 h}{e_1 h_1 \gamma} + \left(\frac{V_1}{2 e_1 h_1 \gamma}\right)^2},$$

wobei h die Höhe des Auflagerungspunktes sowie h_1 die des Pfeilerscheitels über der Fundamentmauer und e_1 die Breite des Pfeilers bezeichnet.

Die Widerlagsmauer DO hat die Kräfte $H_2 = S\,cos.\,\alpha_1$ und $V_2 = -\,S\,sin.\,\alpha_1$ aufzunehmen, daher ist die nöthige Stärke derselben

$$d_2 = \frac{S\,sin.\,\alpha_1}{2\,e_2 h_2 \gamma} + \sqrt{4\,\frac{S h_0\,cos.\,\alpha_1}{e_2 h_2 \gamma} + \left(\frac{S\,sin.\,\alpha_1}{2\,e_2 h_2 \gamma}\right)^2}$$

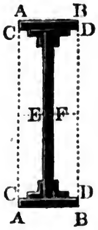
zu setzen, wobei h_0 die Höhe DN des Angriffspunktes D über dem Fundamente und h_2 die der ganzen Widerlagsmauer und e_2 die Breite der Widerlagsmauer bezeichnet. Damit diese Mauer nicht fortgeschoben werde, muß

$$d_2 = \frac{2\,S\,(cos.\,\alpha_1 + \varphi\,sin.\,\alpha_1)}{\varphi e_2 h_2 \gamma} \text{ sein.}$$

§. 55. Die Eisenblechträger. (Ueber gußeiserne Träger s. Seite 383.) Bei den massiven Eisenblechträgern sind die beiden Hauptrippen (Streckbalken), wovon die eine durch Zug- und die andere durch Druckfestigkeit widersteht, durch eine verticale Blechwand mit einander verbunden, wogegen bei den Gitter- oder Fachwerkträgern die Hauptrippen durch Streben und Anker zu einem festen Ganzen vereinigt sind.

Wie auch der massive Blechträger entweder direct ausgewalzt oder aus Tafel- und Winkelblech zusammengenietet sein möge, die Hauptform seines gewöhnlichen Querschnittes ist jedoch immer diejenige, welche Fig. 371 darstellt. Die Höhe der Blechwand oder sogenannten Mittelrippe ist bei den gewöhnlichen Brückenträgern $^1/_{14}$ bis $^1/_7$ der Spannweite, die Dicke derselben aber $^1/_2$ bis $1^1/_2$ Zoll und die Stärke der Bolzen, wodurch die Blechstücke mit einander verbunden sind, mißt $^3/_4$ bis $^5/_4$ Zoll. Die Hauptrippen haben eine Breite von 4 bis 10 Zoll und eine Dicke von $^1/_2$ bis $1^1/_2$ Zoll.

Fig. 371.



Ist b die Breite AB der Querrippe und h die ganze Höhe AA, sowie b_1 die Summe der Tiefen und h_1 die Höhe CC des hohlen Raumes eines durch Q gleichmäßig belasteten und an beiden Enden aufruhenden Balkens von der Länge l, so hat man

$$Ql = 8\left(\frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{h}\right)\frac{T}{6},$$

oder wenn man $\frac{h_1}{h} = \mu$ und $\frac{b_1}{b} = \nu$ giebt,

$$Ql = 8\,(1 - \mu^3 \nu)\,bh^2 \frac{T}{6}$$

(s. S. 380). Giebt man auch noch das Verhältniß $\frac{b}{h} = \psi$, so folgt

$$Ql = \frac{4}{3}(1 - \mu^3\nu)\psi h^3 T,$$

und daher die ganze Höhe des Blechträgers

$$h = \sqrt[3]{\frac{3\,Ql}{4\,(1 - \mu^3\nu)\,\psi T}},$$

woraus sich dann auch die übrigen Dimensionen $b = \psi h$, $h_1 = \mu h$ und $b_1 = \nu b$ berechnen lassen.

Giebt man die Dicke $AC = BD = s$ der Hauptrippe und die Dicke $EF = s_1$ der Mittelrippe, und mißt man die Höhe h von Mitte zu Mitte der Hauptrippen, so kann man annähernd setzen:

$$Ql = 8\,h\,(bs + \frac{1}{6}\,hs_1)\,T,$$

wonach dann die Breite der Hauptrippen:

$$b = \frac{Ql}{8\,Ths} - \frac{1}{6}\,\frac{s_1}{s}\,h \text{ folgt.}$$

Die Wirkung der Winkelbleche, wodurch die Hauptrippen mit der Mittelrippe verbunden werden, kann man, wenn dieselben nicht einen Theil der Hauptrippen ausmachen, außer Acht lassen, wegen der Schwächung des Bleches durch das Zusammennieten muß man aber die Stärke s_1 desselben um $\frac{1}{3}$ größer, also $\frac{4}{3}s_1$ annehmen.

Uebrigens erfordert die Mittelrippe die Dicke $s_1 = \frac{1,15\,Q}{d\,T}$, wo $d = \frac{2}{3}\,\frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{bh^2 - b_1 h_1^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{1 - \mu^3\nu}{1 - \mu^2\nu}\right)h$, den Abstand zwischen den Angriffspunkten der Zug- und Druckmittelkraft des Balkenquerschnittes bezeichnet.

Hat der Balken außer dem constanten Gewichte Q auch noch eine variable Last Q_1, z. B. das Gewicht eines Wagenzuges zu tragen, so muß man in den vorstehenden Formeln $Q + Q_1$ statt Q in Rechnung bringen.

Bei Brücken, welche mit Lastwagen befahren werden, ist die ganze Belastung pr. Fuß Brückenlänge = 550 bis 2000 Pfund, dagegen bei Eisenbahnbrücken mit einfachem Gleise = 1600 bis 4000 Pfund, und zwar bei den Spannweiten von 12 bis 150 Fuß.

§. 56. Die Gitterträger. Bei einem einfachen Gitterträger $AABB$, Fig. 372 und Fig. 373 (a. f. S.), sind die beiden Streckbalken AA, BB durch Streben CE, FG u. s. w. und Zugstangen oder Anker EF, GH u. s. w. fest mit einander verbunden. In Folge der auf dem einen oder dem anderen Balken aufruhenden Last, werden die nach der Mitte CD des ganzen Trägers sich neigenden Streben zusammengedrückt, dagegen die eben dahin fallenden Zugstangen ausgedehnt. Der obere Balken erleidet stets eine Compression, sowie der untere eine Ausdehnung.

Bei dem Träger in Fig. 372 ruht die Last auf dem oberen und bei dem in Fig. 373 auf dem unteren Streckbalken auf. Der belastete Balken AA bestehe aus $2\,n$ Feldern und trage in jedem

der $(2n - 1)$ Theilpunkte eine Last $P = \frac{Q}{2n}$. Die Neigung der Streben gegen den Horizont oder gegen die Balkenaxen sei α und die der Zugstangen, $= \beta$. Dann sind bei dem Gitterträger Fig. 372, wo die Last auf dem **oberen Balken** AA ruht: die Drücke der Strebe CE, FG, HK u. s. w.

Fig. 372.

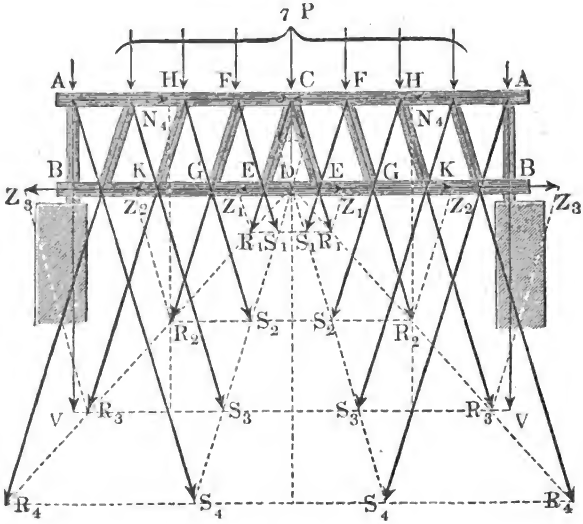
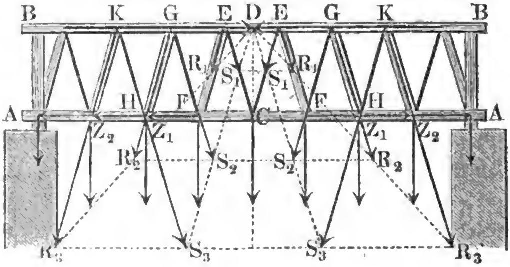


Fig. 373.



$$R_1 = \frac{P}{2\,sin.\,\alpha},\quad R_2 = \frac{3\,P}{2\,sin.\,\alpha},$$

$$R_3 = \frac{5\,P}{2\,sin.\,\alpha},\quad R_4 = \frac{7\,P}{2\,sin.\,\alpha},$$

sowie die Züge der Zugstangen EF, GH u. s. w.

$$S_1 = \frac{P}{2\,sin.\,\beta},\quad S_2 = \frac{3\,P}{2\,sin.\,\beta},$$

$$S_3 = \frac{5\,P}{2\,sin.\,\beta},\quad S_4 = \frac{7\,P}{2\,sin.\,\beta}.$$

Allgemein ist von der Mitte des Trägers nach den Enden zu gerechnet, der Druck der $n$ten Strebe:

$$R_n = \frac{(2n - 1)P}{2 \sin. \alpha},$$

sowie der Zug der $n$ten Stange:

$$S_n = \frac{(2n - 1)P}{2 \sin. \beta}.$$

Ferner sind die Zugkräfte des unteren Balkens BB in den Knotenpunkten E, G, K u. s. w.

$$Z_1 = \frac{P}{2}(cotg. \alpha + cotg. \beta),\ Z_2 = \frac{3P}{2}(cotg. \alpha + cotg. \beta),$$

$$Z_3 = \frac{5P}{2}(cotg. \alpha + cotg. \beta),\ Z_4 = \frac{7}{2}P(cotg. \alpha + cotg. \beta),$$

folglich ist die Zugkraft des ganzen Balkens:

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = \frac{16}{2}P(cotg. \alpha + cotg. \beta),$$

oder allgemein:

$$Z = \frac{n^2 P}{2}(cotg. \alpha + cotg. \beta).$$

Dagegen sind die Druckkräfte des oberen Balkens AA in F, H u. s. w.

$$N_1 = \frac{P}{2}(3\,cotg\ \alpha + cotg. \beta),\ N_2 = \frac{P}{2}(5\,cotg. \alpha + 3\,cotg. \beta),$$

$$N_3 = \frac{P}{2}(7\,cotg. \alpha + 5\,cotg. \beta),\ N_4 = \frac{7P}{2}\,cotg. \beta;$$

und es ist folglich die Druckkraft des ganzen Balkens:

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = \frac{P}{2}(15\,cotg. \alpha + 16\,cotg. \beta),$$

oder allgemein:

$$N = \frac{P}{2}[(n^2 - 1)\,cotg. \alpha + n^2 cotg. \beta].$$

Der Druck der Endstreben AB, AB ist:

$$V = \frac{(2n - 1)P}{2},$$

oder, mit Rücksicht auf die Last $\frac{P}{2}$, welche unmittelbar in A aufruht:

$$V = nP, \text{ d. i. } = \frac{Q}{2}.$$

Wird, wie Fig. 373 darstellt, der untere Balken AA belastet, so bleiben die Kräfte der Streben EF, GH u. s. w., sowie die der Zugstangen CE, FG u. s. w. dieselben. Bei den Spannungen der Balken ist dagegen das Verhältniß umgekehrt. Hier sind die Druckkräfte des oberen Balkens BB in E, G, K u. s. w.

$$N_1 = \frac{P}{2}(cotg. \alpha + cotg. \beta),$$

$$N_2 = \frac{3P}{2}(cotg. \alpha + cotg. \beta) \text{ u. s. w.},$$

und es ist die ganze Druckkraft in einer Balkenhälfte BD:

$$N = \frac{n^2 P}{2} (cotg.\, \alpha + cotg.\, \beta);$$

dagegen sind die Zugkräfte des unteren Balkens in F, H u. s. w.

$$Z_1 = \frac{P}{2}(cotg.\, \alpha + 3\, cotg.\, \beta),\ Z_2 = \frac{P}{2}(3\, cotg.\, \alpha + 5\, cotg.\, \beta),$$

$$Z_3 = \frac{P}{2}(5\, cotg.\, \alpha + 7\, cotg.\, \beta),\ Z_4 = {}^7\!/_2\, P\, cotg.\, \alpha,$$

und es ist die Zugkraft jeder Balkenhälfte BC:

$$Z = \frac{P}{2}(16\, cotg.\, \alpha + 15\, cotg.\, \beta), \text{ oder allgemein:}$$

$$= \frac{P}{2}[n^2\, cotg.\, \alpha + (n^2 - 1)\, cotg.\, \beta].$$

Ist $\alpha = \beta$, so hat man

$N = n^2 P\, cotg.\, \alpha$ und $Z = (n^2 - {}^1\!/_2) P\, cotg.\, \alpha$, oder

$N = \frac{n^2 P a}{2h}$, und $Z = (n^2 - {}^1\!/_2) \frac{Pa}{2h}$,

wenn h den senkrechten Abstand AB der beiden Balken von einander und $a = CF = EG \ldots = \frac{AA}{2n} = \frac{l}{2n}$, die Entfernung der Knoten oder Auflagerungspunkte von einander bezeichnen. Macht man $\alpha = \beta = 45^0$, so fällt

$R_n = S_n = 0{,}707\,(2n - 1)\,P$,

$N = n^2 P$ und $Z = (n^2 - {}^1\!/_2)\, P$ aus.

Da sich die Streben in Folge des Druckes R_n leicht biegen können, so ist es zweckmäßig, sie möglichst kurz zu machen, also senkrecht zu stellen.

Es ist dann $\alpha = 90$ Grad, daher

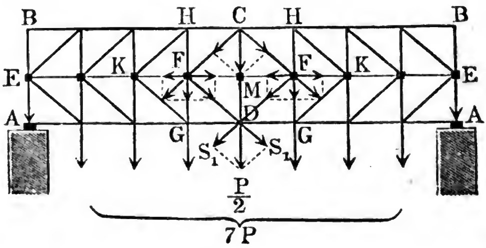
$$R_n = \frac{(2n-1)P}{2}, \text{ wogegen } S_n = \frac{(2n-1)P}{2\, sin.\beta}$$

bleibt, ferner

$$N = \frac{n^2 P}{2} cotg.\, \beta \text{ und } Z = \frac{(n^2-1)P}{2} cotg.\, \beta.$$

Die Anwendung von senkrechten Streben oder senkrechten Zugstangen ist besonders dann von Vortheil, wenn die Belastung auf keinem der beiden Streckbalken unmittelbar aufruht, sondern den Träger in einer zwischen beiden Balken befindlichen Horizontalen ergreift. Ein solcher Träger $AABB$, Fig. 374, besteht dann gleichsam aus zwei über einander lie-

Fig. 374.



genden einfachen Trägern AE und BE, wovon der eine dem ersten Systeme in Fig. 372, mit Belastung des oberen, und der andere dem zweiten Systeme in Fig. 373, mit Belastung des unteren Balkens, angehört. Unter der Voraussetzung, daß sich hier die Lasten $P, P \dots$ auf beide Trägersysteme gleich vertheilen, heben sich hier die Horizontalkräfte in jedem Lastpunkte gegenseitig auf, und es bleiben daher nur die Spannungen

$$R_n = \frac{(2n - 1)P}{4},\quad S_n = \frac{(2n - 1)P}{4 \sin. \beta}, \text{ und}$$

$$N = Z = \frac{n^2 P}{4} \operatorname{cotg.} \beta \text{ zurück.}$$

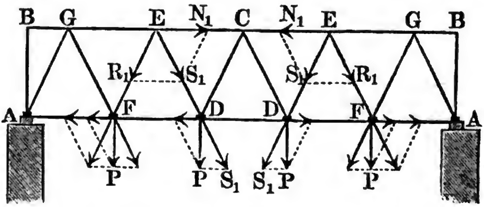
Ist wieder h die ganze Trägerhöhe AB und a die Entfernung der Lastpunkte von einander oder die Horizontalprojection MF, $FK \dots$ der Zugstangen, so hat man $\operatorname{cotg.} \beta = \frac{2a}{h}$, daher

$$S_n = \frac{2n - 1}{4} \frac{\sqrt{4a^2 + h^2}}{h} P \text{ und } N = Z = \frac{n^2 Pa}{2h}.$$

Insofern findet allerdings noch ein Unterschied in den Spannungen der beiden Trägerhälften AE und BE statt, als bei der ersteren die kürzeren Rahmenstücke DM, $FG \dots$ als Streben und die längeren DF, $GK \dots$ als Zugstangen, dagegen bei dem letzteren die längeren Rahmenstücke CF, HK als Streben, und die kürzeren CM, $HF \dots$ durch Zug wirken.

Ist die Anzahl der Trägerfelder $= 2n - 1$, also ungerade, wie z. B. der Träger $AABB$ in Fig. 375 darstellt, so sind

Fig. 375.



die Druckkräfte der Streben EF, $GA \dots$:

$$R_1 = \frac{P}{\sin. \alpha},\quad R_2 = \frac{2P}{\sin. \alpha},\quad R_3 = \frac{3P}{\sin. \alpha} \cdots,$$

sowie die Zugkräfte der Zugstangen DE, $FG \dots$

$$S_1 = \frac{P}{\sin. \beta},\quad S_2 = \frac{2P}{\sin. \beta},\quad S_3 = \frac{3P}{\sin. \beta},$$

und es bleiben die mittleren Streben CD, CD außer Wirkung.

Ferner sind die Drücke des oberen Streckbalkens

$N_1 = P(\operatorname{cotg.} \alpha + \operatorname{cotg.} \beta)$, $N_2 = 2P(\operatorname{cotg.} \alpha + \operatorname{cotg.} \beta)$,

sowie die Züge des unteren durch $P, P \dots$ belasteten Streckbalkens:

$Z_1 = P \operatorname{cotg.} \beta$, $Z_2 = P(2 \operatorname{cotg.} \beta + \operatorname{cotg.} \alpha)$, $Z_3 = 2P \operatorname{cotg.} \alpha$.

Der Gesammtdruck des oberen Streckbalkens in C, sowie der

Gesammtzug des unteren Balkens innerhalb DD ist daher im vorliegenden Falle:

$$N = Z = 3\,P\,(cotg.\,\alpha + cotg.\,\beta),$$

allgemein aber

$$N = Z = \frac{n\,(n-1)}{2}\,P\,(cotg.\,\alpha + cotg.\,\beta),$$

folglich für $\beta = \alpha$:

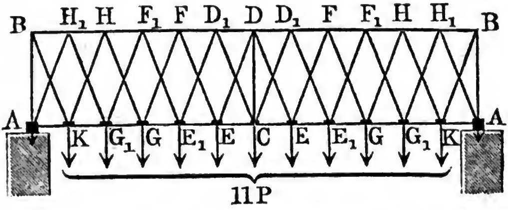
$$N = Z = n\,(n-1)\,P\,cotg.\,\alpha,$$

dagegen für $\alpha = 90^0$,

$$N = Z = \frac{n\,(n-1)}{2}\,P\,cotg.\,\beta.$$

Bei einem Träger $AABB$, Fig. 376, mit einfach ge-

Fig. 376.



kreuzten Streben nimmt jede der Streben DE, D_1E_1 den Druck $R_1 = \frac{P}{2\,sin.\,\alpha}$, ferner jede Strebe FG, F_1G_1 den Druck $R_2 = \frac{3\,P}{2\,sin.\,\alpha}$, sowie jede Strebe HK, H_1A den Druck $R_3 = \frac{5\,P}{2\,sin.\,\alpha}$ auf; dagegen ist die Spannung der Zugstangen CD_1, $S_1 = \frac{P}{2\,sin.\,\beta}$, die der Stangen EF und E_1F_1, $S_2 = \frac{3\,P}{2\,sin.\,\beta}$, die der Stangen GH und G_1H_1, $S_3 = \frac{5\,P}{2\,sin.\,\beta}$ und die der Stange KB, $S_4 = \frac{7\,P}{2\,sin.\,\beta}$ u. s. w. Außerdem trägt noch die Hängestange CD die Hälfte der Last P von C.

Ferner ist die Gesammtspannung des oberen Balkens in D:

$$N = \left(\frac{2\,n^2 - 1}{2}\,cotg.\,\alpha + n\,(n+1)\,cotg.\,\beta\right) P,$$

z. B. für $\beta = \alpha$,

$$N = (2\,n^2 + n - \tfrac{1}{2})\,P\,cotg.\,\alpha,$$

also für eine sehr große Anzahl ($4\,n$) von Trägerfeldern:

$$N = 2\,n^2\,P\,cotg.\,\alpha = \frac{n^2\,P\,a}{h},$$

wo a die Grundlinie $DF = D_1F_1$ der von je einer Strebe und einer Zugstange gebildeten gleichschenkligen Dreiecke ist. Im

letzteren Falle hat man auch $P = \frac{Q}{4n}$ und $a = \frac{l}{2n}$, daher die Spannung des oberen Balkens $N = \frac{Ql}{8h}$.

Die Gesammtspannung des unteren Balkens in C ist
$Z = ([n(n+2) - 1]\, cotg.\alpha + [n(n+1) - \frac{1}{2}]\, cotg.\beta)\, P$,
folglich für $\beta = \alpha$,

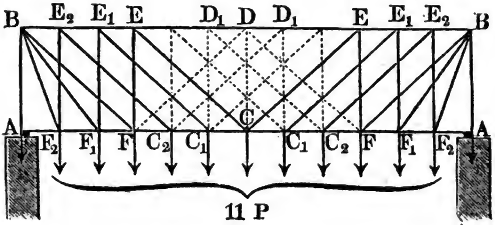
$$Z = (2n^2 + 3n - \frac{3}{2})\, P\, cotg.\alpha,$$

also für $n = \infty$,

$$Z = 2n^2 P\, cotg.\alpha = \frac{n^2 Pa}{h} = N.$$

Bei einem Träger $AABB$, Fig. 377, mit zweifach ge-

Fig. 377.



kreuzten verticalen Streben sind die Drücke der Streben EF, $R_1 = \frac{P}{2}$, und die der Streben E_1F_1, E_2F_2, $R_2 = R_3 = P$, sowie die Züge der Stangen CE, $S_1 = \frac{P}{2\, sin.\alpha}$, die der Stangen C_1E_1 und C_2E_2, $S_2 = S_3 = \frac{P}{sin.\alpha}$ und die der Stange FB, $S_4 = \frac{3P}{2\, sin.\alpha}$. Bezeichnen ferner α_1 und α_2 die Neigungswinkel der kürzeren Zugstangen F_1B und F_2B, so sind die Spannungen derselben

$$S_5 = \frac{2P}{sin.\alpha_1} \text{ und } S_6 = \frac{2P}{sin.\alpha_2}.$$

Der Gesammtdruck des oberen Balkens in D ist:

$$N = [n(\frac{3}{2}n - 1)\, cotg.\alpha + n(cotg.\alpha_1 + cotg.\alpha_2)]\, P$$
$$= \frac{3}{2}\frac{n^2 Pa}{h},$$

und der Gesammtzug des unteren Balkens in C:

$$Z = ([n(\frac{3}{2}n - 1) - \frac{1}{2}]\, cotg.\alpha + n(cotg.\alpha_1 + cotg.\alpha_2))\, P$$
$$= \frac{(3n^2 - 1)}{2}\frac{Pa}{h}.$$

Jede der Endstreben AB, AB hat den Druck

$$R = \left(\frac{6n - 1}{2}\right) P \text{ auszuhalten.}$$

In der Regel, zumal bei größeren Brücken, bringt man am mittleren Trägerstücke $EEFF$ noch die in der Abbildung punktirte **Verstrebung** an, was um so nöthiger ist, wenn der Träger außer dem constanten Gewichte noch eine **mobile** Last, z. B. die eines Wagenzuges zu tragen hat, wobei die stärkste Biegung des Trägers von der Mitte CD etwas zur Seite, z. B. nach C_1D_1 rückt. Setzt man die constante Last pr. Fuß Brückenlänge, $= p$, sowie die variable Last pr. Fuß Brückenlänge, $= q$ und bezeichnet auch hier l die ganze Brückenlänge AA, so hat man den Abstand der **größten Durchbiegungsstelle** von dem einen Trägerende:

$$x = \left[-\frac{p}{q} + \sqrt{\frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2}\right] l$$

und von dem anderen:

$$x_1 = l - x = \left[\frac{p+q}{q} - \sqrt{\frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2}\right] l.$$

Bei der Berechnung der Spannungen und Querschnitte der Strebebalken AA und BB ist in einem solchen Falle anzunehmen, daß der Träger die ganze Last $(p + q)\, l$, also jeder der m Lastpunkte die Kraft $P = \frac{(p + q)\, l}{m}$ aufzunehmen hat, und bei der Bestimmung der Spannungen und Querschnitte der Streben und Zugstangen ist außerdem die Berechnung noch so zu führen, als wenn von der Stelle der größten Durchbiegung aus die Brückenenden um

$$x_1 = \left[\frac{p+q}{q} - \sqrt{\frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2}\right] l$$

entfernt wären, also die ganze Brücke die Länge

$$2\,x_1 = \left[\frac{p+q}{q} - \sqrt{\frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2}\right] 2\,l$$

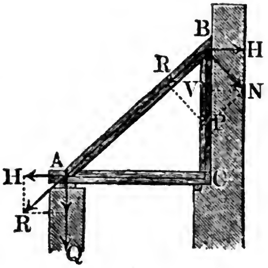
hätte. Für $\frac{p}{q} = 2$ ist z. B. $x_1 = 0{,}5505\, l$, und daher bei der letzten Trägerconstruction die Berechnung der Spannungen der Streben und Zugstangen statt für $6\,n - 1$, für $\frac{2x_1}{l}(6\,n - 1)$ $= 1{,}101\,(6\,n - 1)$ Lastpunkte durchzuführen, wobei natürlich wie oben, $2\,n$ die Anzahl der Trägerfelder bezeichnet und vorausgesetzt wird, daß ein Trägerfeld die Horizontalprojection $CF = FA = a = h\, cotg.\, \alpha$ zur Länge hat.

Da der Widerstand der Streben gegen das Biegen umgekehrt wie das Quadrat der Länge und direct wie der Cubus der Dicke derselben wächst (s. Seite 394), so soll man diesen Theil der Träger nicht allein möglichst kurz, sondern auch möglichst dick machen; man soll aus diesem Grunde die Anzahl der Verstrebungen nicht unnöthig vergrößern, und es ist auch zweckmäßig die Streben zu beiden Seiten von den Zugstangen umfassen zu lassen.

§. 57. Stabilität der Dachgespärre. Man kann voraussetzen, daß jeder Sparren von dem Gewichte des aufliegenden Daches u. s. w. einen gleichmäßig vertheilten Theil G aufnimmt und deshalb auch annehmen, daß bei einfacher Unterstützung in den Endpunkten, jede Stütze $\frac{1}{2} G$ trage, daß dagegen dann, wenn er überdies noch in der Mitte unterstützt ist, jede Stütze an den Enden $\frac{3}{16} G$ und die Stütze in der Mitte $\frac{5}{8} G$ aufnehme u. s. w. (vergl. §. 52, Seite 482).

1) Ruht der Sparren AB, Fig. 378, dessen Neigungswinkel $BAC = \alpha$ ist, mit seinem oberen Ende B auf einer Standsäule BC, deren Kopf nach der Neigung des Balkens abgeschrägt ist, so nimmt diese den Normaldruck $N = P \cos. \alpha$ auf, es ist folglich der horizontale Balkenschub

Fig. 378.



$$H = P \sin. \alpha \cos. \alpha$$
$$= \frac{1}{2} G \sin. \alpha \cos. \alpha$$
$$= \frac{1}{4} G \sin. 2\alpha$$
$$= \frac{1}{2} G \frac{ab}{l^2},$$

und die Verticalkraft in der Stütze BC:

$$V = P \cos. \alpha^2 = \frac{1}{2} G \cos. \alpha^2 = \frac{1}{2} G \left(\frac{b}{l}\right)^2,$$

wobei, wie auch im Folgenden, l die Länge AB, a die Verticalprojection BC und b die Horizontalprojection AC des Sparrens bezeichnet.

Ferner ist der Druck in der Sparrenaxe:

$$R = P \sin. \alpha = \frac{1}{2} G \sin. \alpha = \frac{1}{2} G \frac{a}{l},$$

und der Verticaldruck im Sparrenfuß A:

$$Q = G - V = G\left(1 - \frac{1}{2} \cos. \alpha^2\right) = G\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{l}\right)^2\right].$$

Ruht das Sparrenende B in einer horizontalen Ebene auf dem Säulenkopfe, so ist $P = \frac{1}{2} G$ und $R = N = 0$; legt er sich hingegen gegen eine Verticalebene an, so ist

$$H = P \, cotg. \alpha = \frac{1}{2} G \, cotg. \alpha = \frac{1}{2} G \frac{b}{a},$$

$$V = 0 \quad \text{und} \quad R = \frac{P}{\sin. \alpha} = \frac{G}{2 \sin. \alpha} = \frac{Gl}{2a}.$$

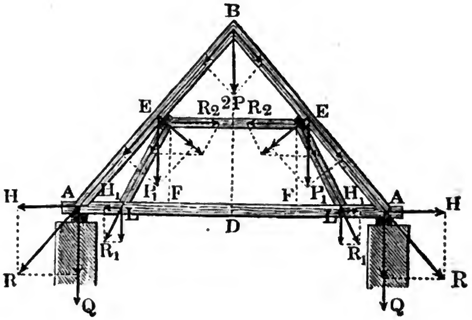
2) Legen sich die Sparren AB, AB, Fig. 379 (a. f. S.), mit ihren Unterflächen an die Stuhlfetten E, E an, so drückt jede derselben mit einer Normalkraft $N = P_1 \cos. \alpha = \frac{1}{2} G \cos. \alpha$ auf den Dachstuhl $LEEL$, und es ist der Sparrendruck zwischen B und E, $= \frac{P}{\sin. \alpha} = \frac{G}{4 \sin. \alpha}$, sowie die Vergrößerung desselben in E, $= P_1 \sin. \alpha = \frac{1}{2} G \sin. \alpha$, folglich der ganze Sparrendruck in A:

$$R = \frac{G}{4\,sin.\,\alpha} + \frac{1}{2}\,G\,sin.\,\alpha = \frac{G}{2}\left(\frac{1}{2\,sin.\,\alpha} + sin.\,\alpha\right)$$
$$= \frac{G}{2}\left(\frac{l}{2\,a} + \frac{a}{l}\right) = \frac{G}{4}\left(\frac{l^2 + 2\,a^2}{a\,l}\right),$$

und der Horizontalschub in A:

$$H = R\,cos.\,\alpha = \frac{R\,b}{l} = \frac{G\,b}{4\,a\,l^2}\,(l^2 + 2\,a^2).$$

Fig. 379.



Bezeichnet l_1 die Länge EL, a_1 die Verticalprojection EF, und b_1 die Horizontalprojection, sowie α_1 den Neigungswinkel der Stuhlsäule, so ist der Druck in der Stuhlsäule:

$$R_1 = \frac{P_1\,cos.\,\alpha^2}{sin.\,\alpha_1} = \frac{1}{2}\,G\,\frac{b^2\,l_1}{l^2\,a_1}$$

und der Horizontalschub in L:

$$H_1 = R_1\,cos.\,\alpha_1 = P_1\,cos.\,\alpha^2\,cotg.\,\alpha_1 = \frac{1}{2}\,G\,\frac{b^2\,b_1}{l^2\,a_1}.$$

Die Gesammtspannung des Balkens zwischen L und L ist

$$S = H + H_1 = \frac{G\,b^2}{2\,l^2}\left(\frac{l^2 + 2\,a^2}{2\,a\,b} + \frac{b_1}{a_1}\right).$$

Das Biegungsmoment des Balkens in Hinsicht auf L ist

$$M = R_1\,sin.\,\alpha_1\,.\,\overline{AL} = P_1\,cos.\,\alpha^2\,.\,\overline{AL}$$
$$= \frac{1}{2}\,G\,\frac{b^2}{l^2}\,(\tfrac{1}{2}\,b - b_1)$$

Der Druck im Spannriegel EE hat die Größe

$$R_2 = \frac{P_1\,cos.\,\alpha\,cos.\,(\alpha_1 - \alpha)}{sin.\,\alpha_1} = \frac{1}{2}\,G\,\frac{b\,(a\,a_1 + b\,b_1)}{a_1\,l^2}.$$

Sind die Sparren mit den Stuhlfetten fest verbunden, so geht $P_1 = \frac{1}{2}\,G$ vollständig auf den Dachstuhl über, und es ist dann

$$R = \frac{P}{sin.\,\alpha} = \frac{G}{4\,sin.\,\alpha} = \frac{G\,l}{4\,a},\ \text{sowie}$$
$$H = R\,cos.\,\alpha = \frac{G}{4}\,cotg.\,\alpha = \frac{G\,b}{4\,a}.$$

Ferner

$$R_1 = \frac{P_1}{sin.\alpha_1} = \frac{1}{2}\frac{G}{sin.\,\alpha_1} = \frac{G l_1}{2\,a_1},$$

$$H_1 = R_2 = P_1\,cotg.\,\alpha_1 = \frac{1}{2} G \frac{b_1}{a_1},$$

$$S = H + H_1 = \frac{1}{2}\,G\left(\frac{b}{2\,a} + \frac{b_1}{a_1}\right)$$

und das Biegungsmoment von AA:

$$M = P_1 \,.\, \overline{AL} = \frac{1}{2}\,G\,(\frac{1}{2}\,b - b_1).$$

Sind die Sparren nur durch einen Kehlbalken EE unterstützt, so ist

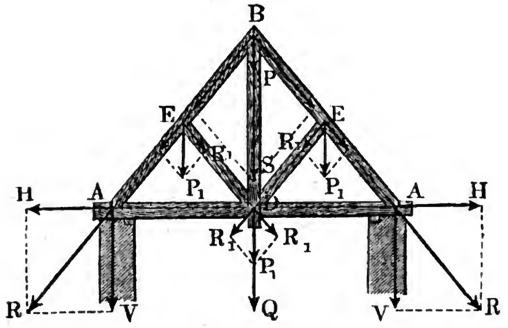
$$R = \frac{P + P_1}{sin.\,\alpha} = \frac{3}{4}\frac{G}{sin.\,\alpha} = \frac{3}{4}\frac{G l}{a},$$

$$H = (P + P_1)\,cotg.\,\alpha = \frac{3}{4}\,G\frac{b}{a},$$

$$R_1 = 0 \text{ und } R_2 = \frac{1}{2}\,G\frac{b}{a}.$$

3) Die Sparren des Gespärres ABA, in Fig. 380, seien

Fig. 380.



in der Mitte durch Streben DE, DE unterstützt und die Hängesäule BD trage nicht nur die Kräfte R_1, R_1 dieser Streben, sondern auch noch eine besondere Last Q in der Mitte des Balkens AA, auf den Forst B des Gespärres über. Es ist dann

$$R_1 = \frac{1}{2}G,\; R_1 = \frac{P_1}{2\,sin.\,\alpha} = \frac{G}{4\,sin.\,\alpha} = \frac{G l}{4\,a},$$

ferner die ganze Spannung der Hängesäule:

$$S = Q + P + P_1 = Q + G,$$

der Sparrendruck innerhalb BE,

$$= \frac{S}{2\,sin.\,\alpha} = \frac{Q + G}{2\,sin.\,\alpha} = \left(\frac{Q + G}{2}\right)\frac{l}{a},$$

daher der Sparrendruck in A:

$$R = \frac{P_1 + Q + G}{2\,sin.\,\alpha} = \frac{Q + \frac{3}{2}\,G}{2\,sin.\,\alpha} = (Q + \frac{3}{2}\,G)\frac{l}{2\,a},$$

und der Horizontalschub

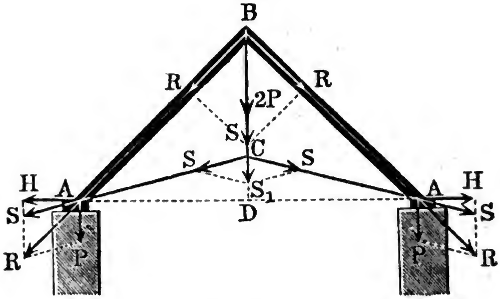
$$H = \left(\frac{Q + \sfrac{3}{2} G}{2}\right) cotg.\, \alpha = (Q + \sfrac{3}{2} G) \frac{b}{2a}.$$

Ohne die Streben DE, DE wäre $R_1 = 0$, $S = Q + G$,

$$R = \frac{Q + G}{2 \sin. \alpha} = (Q + G) \frac{l}{2a} \text{ und } H = (Q + G) \frac{b}{2a}.$$

4) Bei dem eisernen Dachgespärre ABA, Fig. 381, mit

Fig. 381.



den Spannstangen CA, CA und der Hängestange CB ist, wenn l_1 die Länge, a_1 die Verticalprojection CD und α_1 den Neigungswinkel CAD der Spannstangen CA, CA bezeichnet, der Schub in der Richtung des Sparrens:

$$R = \frac{P \cos. \alpha_1}{\sin. (\alpha - \alpha_1)} = \sfrac{1}{2} \frac{G \cos. \alpha_1}{\sin. (\alpha - \alpha_1)} = \sfrac{1}{2} \frac{G l}{a - a_1},$$

die Zugkraft in der Stange CA:

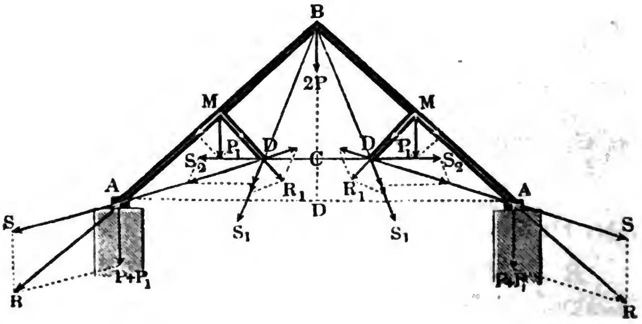
$$S = \frac{P \cos. \alpha}{\sin. (\alpha - \alpha_1)} = \sfrac{1}{2} \frac{G \cos. \alpha}{\sin. (\alpha - \alpha_1)} = \sfrac{1}{2} \frac{G l_1}{a - a_1},$$

und die Zugkraft in der Hängestange BC:

$$S_1 = 2 S \sin. \alpha_1 = \frac{G \cos. \alpha \sin. \alpha_1}{\sin. (\alpha - \alpha_1)} = \frac{G a_1}{a - a_1}.$$

5) Bei der Eisendachconstruction in Fig. 382, wo die Sparren durch die Streben MD, MD unterstützt und durch die

Fig. 382.



Zugstangen AD, AD, BD, BD und DD mit einander verbunden sind, ist, wenn c die Länge der Strebe MD und l_1 die Länge der Spannstange AD, sowie a_1 die Vertical-, ferner b_1 die Horizontalprojection und α_1 den Neigungswinkel derselben bezeichnet, der Sparrendruck in A:

$$R = \frac{(P + P_1) \cos. \alpha_1}{\sin. (\alpha - \alpha_1)} = {}^3/_4 \frac{G \cos. \alpha_1}{\sin. (\alpha - \alpha_1)} = {}^3/_4 G \frac{b_1}{c},$$

der Stangenzug in A:

$$S = \frac{(P + P_1) \cos. \alpha}{\sin. (\alpha - \alpha_1)} = {}^3/_4 \frac{G \cos. \alpha}{\sin. (\alpha - \alpha_1)} = {}^3/_4 G \frac{b l_1}{c l},$$

ferner der Schub der Strebe MD:

$$R_1 = P_1 \cos. \alpha = {}^1/_2 G \cos. \alpha = {}^1/_2 G \frac{b}{l},$$

und der Sparrendruck längs MB:

$$R_0 = R - P_1 \sin. \alpha = \frac{G}{2} \left(\frac{3 b_1}{2 c} - \frac{a}{l} \right).$$

Die Zugkraft der Spannstange BD beträgt:

$$S_1 = \frac{P_1 \cos. \alpha}{2 \sin. (\alpha - \alpha_1)} + \frac{(P + {}^1/_2 P_1) \cos. \alpha \sin. \alpha_1}{\sin. (\alpha - \alpha_1) \sin. (2\alpha - \alpha_1)}$$

$$= \frac{G \cos. \alpha}{2 \sin. (\alpha - \alpha_1)} \left({}^1/_2 + \frac{\sin. \alpha_1}{\sin. (2 \alpha - \alpha_1)} \right)$$

$$= \frac{G}{4} \frac{b l_1}{c l} \cdot \frac{a + a_1}{a - a_1},$$

und die der Spannstange DD:

$$S_2 = (P + {}^1/_2 P_1) \frac{\cos. \alpha}{\sin. (\alpha - \alpha_1)} \cdot \frac{\sin. 2 (\alpha - \alpha_1)}{\sin. (2 \alpha - \alpha_1)}$$

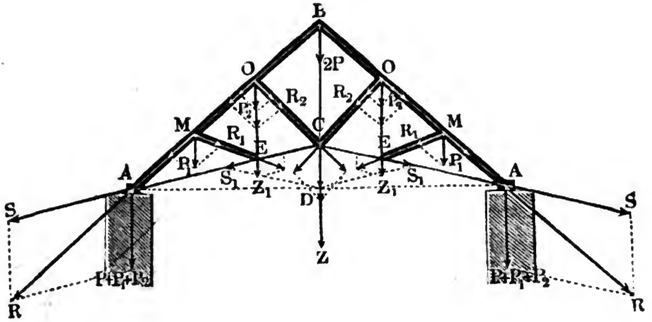
$$= \frac{G \cos. \alpha \cos. (\alpha - \alpha_1)}{\sin. (2 \alpha - \alpha_1)} = \frac{G b}{2 (a - a_1)}.$$

Uebrigens ist $a_1 = \frac{a}{2} - \frac{b c}{l}$ und

$$b_1 = \frac{b}{2} + \frac{a c}{l}.$$

6) Bei der Eisendachconstruction in Fig. 383, wo jeder

Fig. 383.



Sparren durch zwei Streben ME und OC unterstützt wird, hat man den Sparrenschub in A:

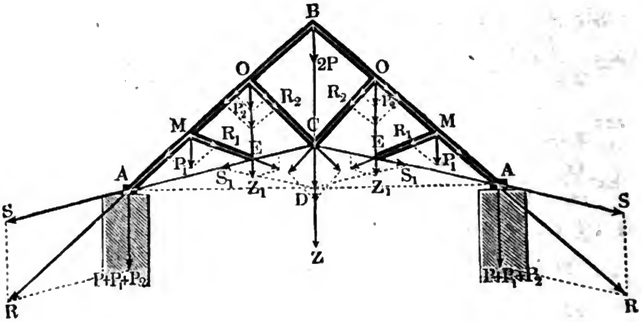
$$R = (P + P_1 + P_2)\frac{\cos.\alpha_1}{\sin.(\alpha - \alpha_1)} = \frac{5}{6}\frac{G\cos.\alpha_1}{\sin.(\alpha - \alpha_1)}$$
$$= \frac{5}{6}\frac{Gl}{a - a_1} = \frac{5}{6}G\frac{l}{h},$$

und die Zugkraft der Stange AC in A:

$$S = (P + P_1 + P_2)\frac{\cos.\alpha}{\sin.(\alpha - \alpha_1)} = \frac{5}{6}\frac{G\cos.\alpha}{\sin.(\alpha - \alpha_1)}$$
$$= \frac{5}{6}\frac{Gl_1}{a - a_1} = \frac{5}{6}G\frac{l_1}{h},$$

wenn man die Länge $a - a_1$ der Hängestange BC durch h bezeichnet. Die Länge der Hängestange OE ist $h_1 = \frac{2}{3}h$,

Fig. 384.



ferner ist für die Neigungswinkel β_1 und β_2 der Streben ME und OC:

$$tang.\beta_1 = \frac{2h - a}{b} \text{ und } tang.\beta_2 = \frac{3h - a}{b},$$

und es sind die Längen derselben:

$$c_1 = \frac{b}{3\cos.\beta_1} \text{ und } c_2 = \frac{b}{3\cos.\beta_2}.$$

Auch ist $l_1^2 = l^2 + h^2 - 2ah$.

Der Druck in der Strebe ME ist

$$R_1 = \frac{P_1\cos.\alpha}{\sin.(\alpha+\beta_1)} = \frac{1}{3}\frac{G\cos.\alpha}{\sin.(\alpha+\beta_1)} = \frac{1}{2}G\frac{c_1}{h},$$

ferner der Sparrenschub innerhalb MO:

$$R - \frac{P_1\cos.\beta_1}{\sin.(\alpha+\beta_1)} = R - \frac{1}{6}G\frac{l}{h} = \frac{2}{3}G\frac{l}{h},$$

und der Stangenzug innerhalb CE:

$$S_1 = S - \frac{R_1\cos.\beta_1}{\cos.\alpha_1} = S - \frac{1}{6}G\frac{l_1}{h} = \frac{2}{3}G\frac{l_1}{h}.$$

Ferner ist die Zugkraft der Hängestange OE:

$$Z_1 = \frac{R_1 \, sin. (\alpha_1 + \beta_1)}{cos. \, \alpha_1} = \frac{R_1 h}{3 c_1} = \frac{1}{6} G,$$

der Druck in der Strebe OC:

$$R_2 = (Z_1 + P_2) \frac{cos. \, \alpha}{sin. (\alpha + \beta_2)} = \frac{1}{2} \frac{G \, cos. \, \alpha}{sin. (\alpha + \beta_2)} = \frac{1}{2} G \frac{c_2}{h},$$

endlich ist der Sparrenschub innerhalb BC:

$$R_0 = \frac{1}{2} G \frac{l}{h}$$

und die Zugkraft der Hängestange BC:

$$Z = G \left(\frac{a}{h} - \frac{1}{3} \right).$$

Bilden die Axen der Zugstangen CA, CA eine gerade Linie, so ist $l_1 = b$ und $h = a$.

Bei der Berechnung des Dachgewichtes G ist anzunehmen, daß ein Quadratfuß Ziegeldach 20 bis 25 Pfund, ein Quadratfuß Schieferdach 15 Pfund, ferner ein Quadratfuß Kupfer-, Zink- oder Eisendach 4 bis 6 Pfund beträgt, ferner kann man das Gewicht eines leichten eisernen Dachgespärres pr. Quadratfuß Grundfläche, 3 bis 4 Pfund und das eines hölzernen Dachgespärres, 4 bis 10 Pfund, sowie das Gewicht des Schneees auf dem Dache, im äußersten Falle, = 20 Pfund annehmen. Endlich ist noch der Druck des stärksten Windes in verticaler Richtung auf das Dach pr. Quadratfuß Dachfläche, = $40 \, sin. \, 2 \alpha$ Pfund zu setzen.

Bei einem hölzernen Dache erhält ein Balken von l Fuß Länge die Höhe = $\left(b + \frac{l}{4}\right)$ Zoll, und die Breite = Höhe minus 1 bis 2 Zoll. Bei der gewöhnlichen Dielung ist die Entfernung der Balken von einander (Balkenweite), von Axe zu Axe gemessen, 3 bis 4 Fuß. Die Dachsparren sind im Mittel 7 bis 8 Zoll stark und 6 bis 7 Zoll breit, sowie die Streben und Stuhlsäulen 7 bis 9 Zoll dick und 6 bis 7 Zoll breit anzuwenden.

Die Hängesäulen sind entweder einfach oder doppelt; im ersteren Falle sind sie mit dem Balken oder dessen Träger (Unterzug) durch ein sogenanntes Hängeeisen verbunden, im letzteren Falle geht der Balken zwischen den beiden Hängesäulen hindurch. Die Querschnittsdimensionen dieser Säulen sind 9 bis 10 Zoll.

Bei den eisernen Dächern bestehen die Sparren und Streben aus gewalztem T-Eisen, dagegen die Spann- und Hängestangen aus gewalztem Rundeisen. Bei großen Spannweiten setzt man den Sparren aus zwei Eisenrippen und einer Einlage von Holz zusammen. Wegen der großen Druckfestigkeit des Gußeisens macht man auch wohl die Balken und Streben aus Gußeisen, und giebt ihnen einen doppelt Tförmigen Querschnitt, ähnlich dem der Eisenbahnschienen. Die Entfernung der einzelnen Gespärre von einander ist 5 bis $6\frac{2}{3}$ Fuß.

Bei einem eisernen Dache, wie Fig. 384, von 35 Fuß Spann-

weite haben die Sparren die in Fig. 385 und die Streben die in Fig. 386 angegebenen Querschnittsdimensionen, während die Spannstangen AC, AC, 1, die Hängestangen BC, $^3/_4$ und die Hängestangen OE, $^1/_2$ Zoll dick gemacht werden. Bei einem ähnlich construirten Dache von 60 Fuß Spannweite mit 3 Streben zu jeder Seite sind die Querschnittsdimensionen der Sparren, sowie der oberen und der beiden unteren Streben in Fig. 387, Fig. 388 und Fig. 389

Fig. 385.

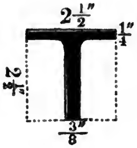


Fig. 386.

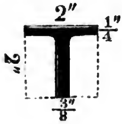


Fig. 387.

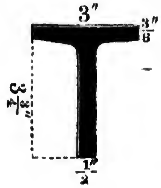


Fig. 388.

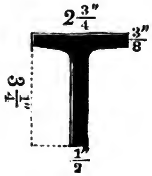
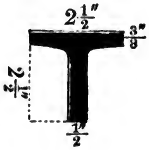


Fig. 389.



aufgetragen. Die Zugstangen AC, AC haben hier eine Stärke von $^4/_3$ und die Hängestangen die Stärken von 1, $^3/_4$ und $^5/_8$ Zoll. Das Verhältniß der Dachhöhe zur Spannweite ist bei beiden Constructionen $\frac{a}{2b} = {}^1/_5$, und das Verhältniß der Länge der mittleren Hängestange zur Dachhöhe, $\frac{h}{a} = {}^7/_8$.

Bei einem Dache wie Fig. 382 von 30 Fuß Spannweite mit gußeisernen Sparren haben die letzteren in der Mitte die in Fig. 390, und an den Enden die in Fig. 391 angegebenen Querschnittsdimensionen; hierbei sind die unteren Zugstangen 1, und die Hängestangen, sowie die obere Zugstange, $^3/_4$ Zoll dick. Anstatt der einfachen Sparren in Fig. 382 und Fig. 383 lassen sich auch aus Holz und Eisenblech zusammengesetzte Sparren anwenden, deren Querschnittsdimensionen aus Fig. 392 zu ersehen sind.

Fig. 390.

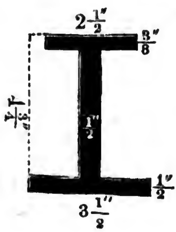


Fig. 391.

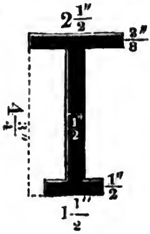


Fig. 392.



Zweites Capitel.

Mechanik der Umtriebsmaschinen.

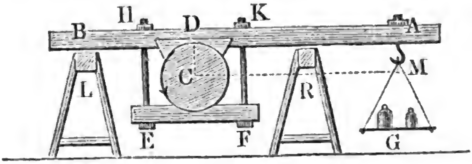
§. 58. Dynamometer. Die Hülfsmittel, wodurch die Kräfte von Maschinen bestimmt werden, sind entweder Gewichts- oder Federdynamometer. Zu den ersteren gehören die gleich- und ungleicharmigen Hebelwaagen, und ins Besondere die mehrarmigen Brückenwaagen, bei welchen das messende Gewicht in einem bestimmten Verhältnisse zur Last oder zu der zu messenden Kraft steht. Z. B. bei den Decimalwaagen ist dieses Verhältniß = $\frac{1}{10}$.

Bei den Federdynamometern wird die Größe einer Kraft durch den Grad der von ihr bewirkten Aus- oder Einbiegung einer Stahlfeder gemessen. Dieselben geben durch Verbindung mit einem Zeichnen- oder einem Zählapparate die Arbeit der Kraft bei Durchlaufung eines gewissen Weges an.

Zur Bestimmung der Kraft und des Arbeitsvermögens einer umlaufenden Welle, dient entweder ein Einschaltungs- oder ein Bremsdynamometer. Das erstere wird zwischen der Kraft- und Lastwelle eingeschaltet, und giebt die Kraft an, mit welcher die eine auf die andere Welle wirkt; das letztere wird bei abgehangener Last auf die eine oder andere Welle aufgelegt, und ersetzt die Last durch seine Reibung auf dem Umfange der Welle.

Bei dem Gebrauch des Bremsdynamometers AEB, Fig. 393, zieht man die Schrauben H, K so stark an und legt

Fig. 393.

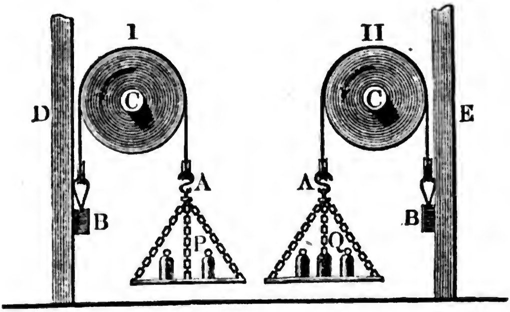


auf die Waagschale so viel Gewichte auf, daß die Welle bei frei schwebendem Arme AB eine gegebene Umdrehungszahl u annimmt. Ist dann noch a der Hebelarm CM des Gewichtes G in Hinsicht auf die Axe C der Welle, und G_1 die Kraft, welche man in A anzubringen hat, um das in D aufgehängte Dynamometer sammt Waagschale ins Gleichgewicht zu setzen, so hat man das gesuchte Arbeitsvermögen der Welle:

$$L = \frac{\pi u a}{30}(G + G_1).$$

Mittels eines **Gurtdynamometers** findet man die Leistung einer umlaufenden Welle C, Fig. 394, indem man die Spannungen

Fig. 394.



P und Q ermittelt, bei welchen die Welle, deren Umfang gleich p sein mag, u Umdrehungen pr. Minute macht. Es ist dann

$$L = \frac{up}{60}(Q - P).$$

Beispiel. Um die Leistung eines Wasserrades bei 6 Umdrehungen pr. Minute zu finden, hat man die Welle desselben mit einem Bremsdynamometer umgürtet, und gefunden: das aufzulegende Gewicht $G = 650$ Pfund, die niederziehende Kraft G_1 des unbelasteten Dynamometers $= 125$ Pfund, den Abstand a der Wellenaxe C von der Richtung der Kraft $G + G_1$, $= 10$ Fuß, und es ist hiernach die Leistung des Rades:

$$L = \frac{6.10.\pi}{30} \cdot (650 + 125) = 6{,}283 . 775 = 4870 \text{ Fußpfund}$$
$$= 9\tfrac{1}{2} \text{ Pferdekräfte.}$$

§. 59. Thierische Kräfte. Die Menschen und Thiere liefern bei einer mittleren Kraft K, mittleren Geschwindigkeit c und mittleren Arbeitszeit t das größte tägliche Arbeitsquantum Kct; ist aber die Geschwindigkeit $= v$ und die Arbeitszeit $= z$, so hat man die Kraft

$$P = \left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right)K$$

zu setzen und die tägliche Leistung $L = Pvz$ zu berechnen, welche stets kleiner als Kct ausfällt.

Die Anstrengung eines Geschöpfes vom Gewichte G beim Hinaufsteigen auf einer schiefen Ebene von der Neigung α gegen den Horizont ist $P = G \sin. \alpha$, und daher gleich der mittleren Kraft für $\sin. \alpha = \frac{K}{G}$. Meistens ist $\sin. \alpha = \frac{1}{6}$ bis $\frac{1}{5}$, daher $\alpha = 9\frac{1}{2}$ bis $11\frac{1}{2}$ Grad.

Folgende Tabelle giebt die mittleren Kräfte, Geschwindigkeiten u. s. w. der Menschen und Thiere.

Tabelle.

Die Leistungen der Menschen und Thiere, bei der mittleren Arbeitszeit von 8 Stunden.

Geschöpfe	Gewichte	Maschine	Mittlere Kraft K	Mittlere Geschwindigkeit c	Leistung pr. Sec. in Fußpfund	Tägliche Leistung in Fußpfund
Mensch .	140	ohne Masch.	28	2,5	70	2'016000
»	»	am Hebel	12	2,4	28,8	829440
»	»	a. d. Kurbel	16	2,4	38,4	1'105920
»	»	am Göpel	24	2,0	48,0	1'382400
»	»	am Tretrad, bei 24° Ansteigen	24	2,25	54	1'555200
»	»	am Steigrad	120	0,48	57,6	1'658880
Pferd . .	750	ohne Masch.	112	4,0	448	12'902400
»	»	am Göpel	90	2,9	261	7'516800
Ochse . .	600	ohne Masch.	112	2,5	280	8'064000
»	»	am Göpel	120	1,9	228	6'566400
Maulesel	500	ohne Masch.	94	3,5	329	9'475200
»	»	am Göpel	60	2,85	171	4'924800
Esel . .	360	ohne Masch.	70	2,5	175	5'040000
»	»	am Göpel	28	2,5	70	2'016000

Damit die Geschöpfe mit den hier aufgeführten Kräften und Geschwindigkeiten an Maschinen arbeiten, hat man diesen ein gewisses Hebelarmverhältniß zu geben. Ist P die Kraft, Q die gegebene Last, a der Hebelarm der ersteren und b der der letzteren, so gilt die Regel $Pa = Qb$; und man hat daher $b = \frac{P}{Q} a$,

für Haspel ist . . . . $a =$ 16 bis 18 Zoll,
für Hand- oder Menschengöpel . $a =$ 8 bis 12 Fuß,
für Pferdegöpel . . . . $a =$ 20 bis 30 Fuß,

und bei den Tret- und Laufrädern läßt man die Thiere nur 15 bis 25° steigen, so daß ihre Kraft 26 bis 42 Procent von ihrem Gewichte beträgt.

Bei dem Arbeiten der Thiere muß man unterscheiden, ob dasselbe in einem verticalen Emporheben oder in einem horizontalen Fortbewegen von Gewichten besteht.

Im letzteren Falle ist natürlich die Kraft des arbeitenden Thieres nur ein Theil der Last.

Für das verticale Emporheben hat man folgende Erfahrungswerthe:

Art der Arbeit	Gehobene Last	Geschwindigkeit	Arbeit pr. Secunde	Arbeitszeit	Tägliche Leistung
Ein Mensch steigt ohne Last eine sanfte Rampe oder Treppe hinauf . .	140	0,48	67,2	8	1'935000
Ein Arbeiter steigt mit einer Last auf der Schulter eine Treppe oder ein Gerüst hinan und geht leer zurück	140	0,13	18,2	6	393120
Ein Mann fährt eine Last mittels eines Schubkarrens auf einer Rampe von $^1/_{12}$ Ansteigen hinan .	128	0,064	8,2	10	295000
Ein Mann hebt ein Gewicht frei mit der Hand empor	40	0,55	22	6	475200
Ein Mann wirft mit der Schaufel Erde auf eine mittlere Höhe von 5 Fuß	5,4	1,28	6,9	10	248400
Vier Mann heben einen 112 Pfd. schweren Rammklotz täglich 10200 mal 4 Fuß hoch	28	1,13	31,6	10	1'137600

Für das horizontale Fortschaffen sind folgende Erfahrungswerthe bekannt:

Art der Arbeit	Last	Geschwindigkeit	Arbeit pr. Secunde	Arbeitszeit	Tägliche Leistung
Ein Mensch geht unbeladen auf horizontalem Wege	140	4,75	665	10	23'940000
Ein Mann trägt eine Last auf dem Rücken ununterbrochen fort	80	2,4	192	7	4'838400
Ein Mann trägt wiederholt eine Last auf dem Rücken und kommt leer zurück	140	1,6	224	6	4'838000
Ein Mann trägt wiederholt Lasten auf einer Trage und geht leer zurück	100	1,05	105	10	3'780000

Art der Arbeit	Last	Geschwindigkeit	Arbeit pr. Secunde	Arbeitszeit	Tägliche Leistung
Ein Arbeiter fährt Materialien auf einem Schubkarren und geht leer zurück	120	1,6	192	10	6′912000
Ein Arbeiter fährt wiederholt Lasten in einem kleinen zweirädrigen Karren, und geht leer zurück	200	1,6	320	10	11′520000
Ein Bergmann stößt auf einer Eisenbahn einen kleinen Hund	300	1,75	525	8	15′120000
einen großen Hund . .	800	0,88	704	8	20′275000
Ein Pferd trägt auf dem Rücken und geht im Schritt	240	3,5	840	10	30′240000
im Trabe	160	7	1120	7	28′224000
Ein Pferd zieht an einem Karren im Schritt und fortwährend belastet . .	1400	3,5	4900	10	176′400000
Desgl., aber mit Wiederholung und leer zurück	1400	1,9	2660	10	95′760000
Ein Pferd zieht ein Fuhrwerk, fortwährend belastet, im Trabe . . .	700	7	4900	4,5	79′380000

§. 60. Aufschlagwasser. Die Arbeit, welche ein fließendes Wasser durch seine lebendige Kraft verrichten kann, ist bei der Geschwindigkeit c und dem Quantum Q pr. Secunde:

$$L = \frac{c^2}{2g} Q\gamma = 0{,}016\ Qc^2\gamma = 0{,}9878\ Qc^2 \text{ Fußpfund}$$

und hiernach ist für $Q = 1$ Cubikfuß folgende Arbeitstabelle berechnet worden.

Ist F der Querschnitt des fließenden Wassers, so hat man $Q = Fc$ zu setzen.

Tabelle der Arbeitsfähigkeit (L Fußpfund) von $Q = 1$ Cubikfuß Wasser bei folgenden Geschwindigkeitswerthen (c Fuß).

$c =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0,988	3,951	8,891	15,81	24,70	35,56	48,40	63,22	80,01
10	98,8	119,5	142,2	166,9	193,6	222,3	252,9	285,5	320,1	356,6
20	395,1	435,6	478,1	522,6	569,0	617,4	667,8	720,1	774,5	830,8
30	889,0	949,1	1012	1076	1142	1210	1280	1352	1426	1502
40	1581	1661	1742	1826	1912	2000	2090	2182	2276	2372

Die Arbeit, welche das Wasser verrichtet, wenn seine Geschwindigkeit c allmälig in v übergeht, ist

$$L = \left(\frac{c^2 - v^2}{2g}\right) Q\gamma = 0{,}9878\,(c^2 - v^2)\,Q \text{ Fußpfund};$$

und die, welche es bei plötzlichem Umsetzen seiner Geschwindigkeit c in v liefert:

$$L = \frac{(c-v)\,v}{g}\,Q\gamma = 1{,}9757\,(c-v)\,vQ \text{ Fußpfund}.$$

Das Arbeitsquantum, welches eine Wassermenge Q bei Benutzung des Gefälles h, d. i. beim Herabsinken von einer senkrechten Höhe h verrichten kann, ist:

$$L = Qh\gamma = 61{,}74\,Qh \text{ Fußpfd.} = 0{,}1286\,Qh \text{ Pferdek.}$$

Folgende Tabelle giebt die Arbeitsfähigkeit von 1 bis 10 Cubikfuß Aufschlagewasser bei 1 Fuß Gefälle an.

$Q =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 Cubikfuß
$L =$	61,74	123,5	185,2	247,0	308,7	370,5	432,2	494,0	555,7	617,5 Fußpfd.
$=$	0,129	0,257	0,386	0,515	0,643	0,772	0,900	1,029	1,158	1,286 Pferdek.

Um das Arbeitsvermögen eines fließenden Wassers zu erhöhen, werden Wehre eingebaut, die zunächst ein Aufstauen des Wasserspiegels hervorbringen. Bei den Ueberfällen oder Ueberfallwehren fließt das Wasser über der festliegenden Wehrkappe, bei den Schleusenwehren hingegen wird es durch Spann- oder Ueberfallschützen aufgestaut. Bei den Ueberfällen ändert sich die Stauung mit dem Wasserquantum, bei den Schleusenwehren hingegen kann man dieselbe durch die Schützenstellung nach Umständen und Bedürfniß steigern oder mäßigen.

Damit das fließende Wasser selbst bei hohem Stande nicht aus seinem Bette trete, ist nöthig, daß die Höhe x des Wehres eine gewisse Höhe nicht überschreite. Ist a die anfängliche oder Unterwassertiefe AB, Fig. 395 und 396, h die Stauhöhe BD,

Fig. 395.

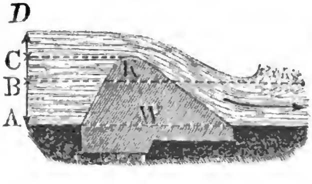
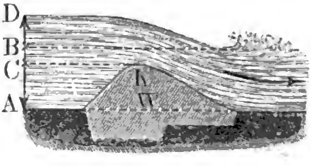


Fig. 396.



b die Wehrbreite und Q das über dem Wehre wegfließende Wasserquantum, so hat man zunächst zu untersuchen, ob Q kleiner oder größer als $4{,}2\,bh^{3/2}$ ist; im ersteren Falle hat man es mit einem vollkommenen Ueberfallwehre K, Fig. 395, zu thun, und die Höhe AC desselben ist:

$$x = a + h - 0{,}383 \left(\frac{Q}{b}\right)^{2/3} \text{ Fuß},$$

im zweiten aber ist ein unvollkommener Ueberfall K, Fig. 396, nöthig und die erforderliche Höhe AC desselben:

$$x = a + \tfrac{2}{3}h - 0{,}16 \; \frac{Q}{b\sqrt{h}} \text{ Fuß zu nehmen.}$$

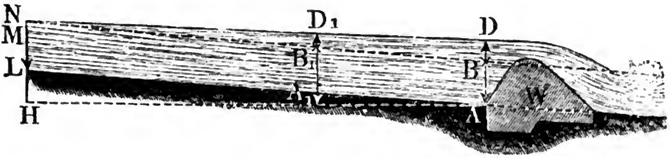
Diese Formeln setzen voraus, daß die Geschwindigkeit $c = \frac{Q}{b(a+h)}$ des zufließenden Wassers nicht über 3 Fuß betrage, und daß die Wehrkappe gut und glatt abgerundet sei.

Schleusenwehren hat man unter übrigens gleichen Verhältnissen kleinere Höhen zu geben als Ueberfallwehren, weil hier die Stauung durch die Schützenstellung noch erhöht werden kann.

Was die Stauung durch lichte Wehre oder Brückenpfeiler anlangt, so hat man die eine Stauung h herbeiführende Breite des Einbaues $y = b - \frac{0{,}141\,Q}{(a + \frac{2}{3}h)\sqrt{h}}$ Fuß, wenn b die Breite und a die Höhe des unaufgestauten Wassers bezeichnet.

Die Stauung oberhalb des Wehres hängt von den Verhältnissen zwischen der Tiefe a und Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$ des unaufgestauten Wassers ab. Ist die erstere gerade doppelt so groß als die letztere, so bildet die Oberfläche des aufgestauten Wassers nahe eine horizontale Ebene, Fig. 397, und es ist

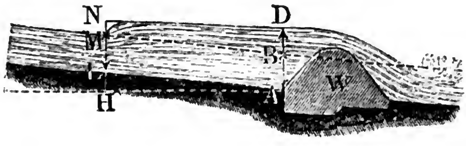
Fig. 397.



die Stauweite: $DM = s = \frac{h}{\alpha}$, wenn α den Abhang $\frac{HL}{AL}$ des Flußbettes bezeichnet.

Ist aber $a < 2 \cdot \frac{v^2}{2g}$, so fällt die Stauweite kleiner aus, es bildet sich eine sogenannte Wasserschwelle N, Fig. 398, von

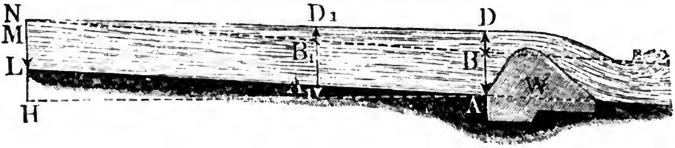
Fig. 398.



der Höhe $MN = z = \frac{v^2}{4g} - a + \sqrt{\frac{v^2}{2g}\left(a + \frac{v^2}{8g}\right)}$ in dem Abstande $DN = s = \frac{h - z}{\alpha}$ vom Wehre K.

Ist endlich, wie meistens, $a > 2 \cdot \frac{v^2}{2g}$, so erstreckt sich die Stauweite DN, Fig. 399, ohne Ende aufwärts fort, und

Fig. 399.



es ist die einer sehr kleinen Stauung y entsprechende Stauweite:

$$DN = s = \frac{h - \frac{1}{3}\left(a - \frac{v^2}{g}\right) Ln.\left(\frac{y}{h}\right)}{\alpha},$$

z. B. für $\frac{y}{h} = 0{,}1$ ist: $s = \frac{h + 0{,}768\left(a - \frac{v^2}{g}\right)}{\alpha}$,

und für $\frac{y}{h} = 0{,}02$, $s = \frac{h + 1{,}304\left(a - \frac{v^2}{g}\right)}{\alpha}$.

Die Abnahme der Stauhöhe auf einer Flußstrecke von der mäßigen Länge l ist auch:

$$\triangle a = \left(\frac{sin. \alpha - \zeta \frac{p}{F} \frac{v^2}{2g}}{1 - \frac{2}{a} \frac{v^2}{2g}}\right) l$$ zu setzen, wenn p und F den Umfang und Inhalt des unteren Querprofils bezeichnen. S. Seite 463.

Hat die Flußstrecke eine größere Länge, so muß man dieselbe in Theile theilen und die letzte Formel auf jeden derselben anwenden, schließlich aber die erhaltenen Werthe für $\triangle a$ addiren.

Um von einer Wasserkraft den möglichst größten Arbeitsgewinn zu ziehen, soll man den Aufschlag- und Abzugkanälen, wodurch das Wasser der Umtriebsmaschine zugeführt und von derselben abgeleitet wird, nur so viel Gefälle geben, als zur Erzeugung einer mäßigen Geschwindigkeit v von $1\frac{1}{2}$ bis 3 Fuß nöthig ist. Für diese können wir den nöthigen Abhang $\alpha = \frac{h}{l} = 0{,}008 \frac{p}{F} \cdot \frac{v^2}{2g}$, also bei dem Verhältnisse $\nu = \frac{a}{b}$ der mittleren Tiefe b zur Breite a,

$$\alpha = \frac{\nu + 2}{\nu} \cdot \frac{v^2}{7812a} = 0{,}000128 \cdot \frac{\nu + 2}{\nu} \frac{v^2}{a}$$ setzen.

§. 61. Hydraulische Umtriebsmaschinen. Die Umtriebsmaschinen, welche durch Wasser in Bewegung gesetzt werden, sind entweder **Rad-** oder **Kolbenmaschinen**; während jene stetig im Kreise umlaufen, haben diese eine absetzende Bewegung in gerader Linie. Die Radmaschinen oder sogenannten **Wasserräder** sind entweder **verticale** oder **horizontale Wasserräder**. Letztere werden auch sehr gewöhnlich **Turbinen** genannt. Zu den Kolbenmaschinen gehören die sogenannten **Wasserdruck-** oder **Wassersäulenmaschinen**.

Bezeichnet r den Halbmesser und v die Umfangsgeschwindigkeit eines **Wasserrades**, so ist die Anzahl der Umdrehungen desselben pr. Minute

$$u = \frac{30\,v}{\pi r} = 9{,}549\,\frac{v}{r},$$

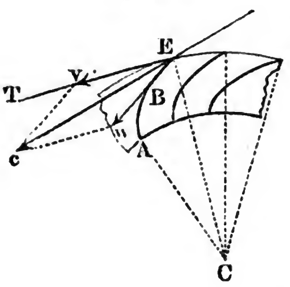
sowie umgekehrt,

$$v = \frac{\pi u r}{30} = 0{,}10472\,ur.$$

Gewöhnlich bezieht man v und r auf den äußeren sowie v_1 und r_1 auf den inneren Radumfang. Bezeichnet c die absolute Geschwindigkeit des eintretenden Wassers und α den Eintrittswinkel, d. i. den Winkel, welchen die Richtung derselben mit der Bewegungsrichtung des Rades an der Eintrittsstelle einschließt, so ist die relative Eintrittsgeschwindigkeit des Wassers in tangentieller Richtung $= c\,cos.\,\alpha - v$, und daher erforderlich, daß $c\,cos.\,\alpha > v$ sei. Der **Geschwindigkeitscoefficient** $\varkappa = \frac{c}{v}$ ist $3/2$ bis $5/2$, und $\alpha = 7\frac{1}{2}^0$ bis $22\frac{1}{2}^0$, wonach $cos.\,\alpha = 0{,}991$ bis $0{,}924$ ausfällt.

Bei den meisten Rädern führt man das Wasser ohne Stoß und zwar so in das Rad ein, daß seine relative Eintrittsgeschwindigkeit w, Fig. 400, die Richtung des äußeren Schaufelendes BE hat, folglich die absolute Geschwindigkeit c die Diagonale des aus v und w zu construirenden Parallelogramms bildet. Die relative Eintrittsgeschwindigkeit ist

Fig. 400.



$$w = \sqrt{c^2 + v^2 - 2\,c\,v\,cos.\,\alpha}$$
$$= v\sqrt{1 + \varkappa^2 - 2\,\varkappa\,cos.\,\alpha},$$

annähernd für kleine Werthe von α,

$$w = v\,(\varkappa - 1) = c - v.$$

Ist β der Schaufelwinkel BET, unter welchem sich das Schaufelende BE an den Radumfang anschließt, so hat man

$$sin.\,\beta = \frac{c\,sin.\,\alpha}{w},$$

oder annähernd, bei kleinen Werthen von α und β:

$$sin.\,\beta = \frac{c\,sin.\,\alpha}{c - v} = \frac{\varkappa\,sin.\,\alpha}{\varkappa - 1} \text{ auch } \beta = \frac{\varkappa\,\alpha}{\varkappa - 1} = 3\,\alpha \text{ bis } 5/3\,\alpha.$$

Wird das Wasser am inneren Radumfange eingeführt, so muß man in den letzten Formeln v_1 statt v einsetzen.

Bei den Wassersäulenmaschinen ist die Kolbengeschwindigkeit v variabel. Bezeichnet s den Kolbenschub und t die ganze Zeit eines Kolbenspieles, sowie n die Anzahl der Kolbenspiele pr. Minute, so hat man die mittlere Kolbengeschwindigkeit

$$v = \frac{2s}{t} = \frac{ns}{30}, \text{ sowie umgekehrt, } n = \frac{30v}{s}.$$

Während die mittlere Kolbengeschwindigkeit einer Wassersäulenmaschine 1 bis $1\frac{1}{4}$ Fuß beträgt, ist die Umfangsgeschwindigkeit eines verticalen Wasserrades 4 bis 10, und die einer Turbine 10 bis 50 Fuß. Letztere wächst überhaupt mit der Quadratwurzel aus dem Gefälle h.

Ist $L = Pv$ die effective Leistung einer hydraulischen Umtriebsmaschine, Q das Aufschlagquantum pr. Secunde und h das nutzbare Gefälle, also $Qh\gamma$ die Totalleistung, so hat man den Wirkungsgrad derselben:

$$\eta = \frac{L}{Qh\gamma} = \frac{Pv}{Qh\gamma}, \text{ also umgekehrt,}$$

$$L = Pv = \eta\, Qh\gamma, \text{ und die Umtriebskraft}$$

$$P = \frac{L}{v} = \frac{\eta\, Qh\gamma}{v}.$$

In folgender Tabelle sind die Grenzwerthe der Gefälle, Aufschlagmengen und Wirkungsgrade der vorzüglichsten hydraulischen Umtriebsmaschinen für eine effective Leistung von 1 bis 60 Pferdekräften angegeben.

Namen der Umtriebsmaschine	Gefälle h Fuß	Aufschlagquantum Q Cubikfuß pr. Secunde	Wirkungsgrad $\eta = \frac{L}{Qh\gamma}$
Oberschlägige Wasserräder	24 bis 40	$1\frac{1}{2}$ bis 16	0,70 b. 0,80
	16 » 24	2 » 20	0,65 » 0,75
	8 » 16	$2\frac{1}{2}$ » 12	0,50 » 0,60
Rückenschlägige Wasserräder mit Leitschaufelschütze	10 » 30	3 24	0,60 » 0,75
Kropfräder mit Leitschaufelschütze	8 » 16	4 » 70	0,60 » 0,70
Kropfräder mit Ueberfallschütze	5 » 10	4 » 70	0,65 » 0,70
Kropfräder mit Spannschütze	3 » 6	4 » 80	0,40 » 0,55
Ponceleträder	2 » 6	4 » 120	0,55 » 0,65
Unterschlägige Räder im Gerinne	1 » 3	8 » 120	0,30 » 0,40
Unterschlägige Räder im unbegrenzten Wasser	$\frac{1}{4}$ » 1	25 » 120	0,20 » 0,30
Turbinen mit allseitiger Beaufschlagung	1 » 60	$\frac{1}{4}$ » 120	0,60 » 0,75
Turbinen mit partieller Beaufschlagung	20 » 200	$\frac{1}{8}$ » 40	0,50 » 0,65
Wassersäulenmaschinen	50 » 800	$\frac{1}{4}$ » 20	0,70 » 0,80

Bei der Umsetzung von Fußpfund in Meterkilogramm, Pferdekräfte u. s. w. kann man von der Tabelle auf Seite 335 Gebrauch machen, und beim Umsetzen von Fußcubikfuß in Metercubikmeter u. s. w. ist folgende Tabelle in Anwendung zu bringen.

Fußcubikfuß					Meter-Cubikmeter
preußisch	österreichisch	sächsisch	badische	englisch	
1	0,9717	1,5086	1,1979	1,1242	0,009703
1,0290	1	1,5525	1,2328	1,1569	0,009985
0,6628	0,6441	1	0,7940	0,7452	0,006431
0,8347	0,8112	1,2593	1	0,9385	0,008100
0,8895	0,8643	1,3419	1,0654	1	0,008630
103,06	100,14	155,48	123,45	115,77	1

§. 62. Verticale Zellenräder. Die Zellenräder werden hauptsächlich durch das Gewicht des von den Radzellen aufgenommenen Wassers in Umtrieb gesetzt, und sind entweder oberschlägige oder rückenschlägige Wasserräder. Diese Räder haben je nach ihrer Höhe, die Umfangsgeschwindigkeit $v = 4$ bis 8 Fuß und laufen hiernach pr. Minute $u = 4$ bis 6 mal um. Die absolute Eintrittsgeschwindigkeit ist

$$c = \varkappa v = {}^3/_2\, v \text{ bis } {}^5/_2\, v = 6 \text{ bis } 12 \text{ Fuß}.$$

Das zur Erzeugung der Geschwindigkeit nöthige Gefälle ist

$$h_0 = 1{,}1 \frac{c^2}{2g} = 1{,}1\, \varkappa^2 \frac{v^2}{2g} = 0{,}0176\, \varkappa^2 v^2,$$

im Mittel $= 0{,}07\, v^2$ Fuß, also für $v = 4$ Fuß, $h_0 = 1{,}12$ Fuß und für $v = 8$ Fuß, $h_0 = 4{,}5$ Fuß.

Bei den oberschlägigen Wasserrädern fällt das Wasser 1 bis 3 Schaufeln unterhalb des Radscheitels ein, daher ist, wenn h das ganze Radgefälle bezeichnet, der erforderliche Halbmesser eines solchen Rades, $r = \frac{h - h_0}{2}$ reichlich.

Wenn das Unterwasser im Abzugsgraben einen sehr veränderlichen Stand hat, so muß man noch einen Theil des Gefälles auf das Freihängen verwenden. Auch wendet man in diesem Falle rückenschlägige Wasserräder mit Vortheil an, weil hier in der Regel das Unterwasser in derselben Richtung abfließt, in welcher das Rad umläuft. Für die letzteren Räder ist gewöhnlich $r = {}^2/_3\, h$ bis ${}^3/_4\, h$.

Die Kranzbreite oder Zellentiefe der Zellenräder ist $d = 10$ bis 12 Zoll, und der Füllungscoefficient ist bei den oberschlägigen Rädern, $\varepsilon = \frac{Q}{dev} = {}^1/_4$, bei den rückenschlägigen Rädern, $\varepsilon = \frac{Q}{dev} = {}^1/_3$.

Wird das Wasser am inneren Radumfange eingeführt, so muß man in den letzten Formeln v_1 statt v einsetzen.

Bei den Wassersäulenmaschinen ist die Kolbengeschwindigkeit v variabel. Bezeichnet s den Kolbenschub und t die ganze Zeit eines Kolbenspieles, sowie n die Anzahl der Kolbenspiele pr. Minute, so hat man die mittlere Kolbengeschwindigkeit

$$v = \frac{2s}{t} = \frac{ns}{30}, \text{ sowie umgekehrt, } n = \frac{30\,v}{s}.$$

Während die mittlere Kolbengeschwindigkeit einer Wassersäulenmaschine 1 bis $1\frac{1}{4}$ Fuß beträgt, ist die Umfangsgeschwindigkeit eines verticalen Wasserrades 4 bis 10, und die einer Turbine 10 bis 50 Fuß. Letztere wächst überhaupt mit der Quadratwurzel aus dem Gefälle h.

Ist $L = Pv$ die effective Leistung einer hydraulischen Umtriebsmaschine, Q das Aufschlagquantum pr. Secunde und h das nutzbare Gefälle, also $Qh\gamma$ die Totalleistung, so hat man den Wirkungsgrad derselben:

$$\eta = \frac{L}{Qh\gamma} = \frac{Pv}{Qh\gamma}, \text{ also umgekehrt,}$$

$$L = Pv = \eta\, Qh\gamma, \text{ und die Umtriebskraft}$$

$$P = \frac{L}{v} = \frac{\eta\, Qh\gamma}{v}.$$

In folgender Tabelle sind die Grenzwerthe der Gefälle, Aufschlagmengen und Wirkungsgrade der vorzüglichsten hydraulischen Umtriebsmaschinen für eine effective Leistung von 1 bis 60 Pferdekräften angegeben.

Namen der Umtriebsmaschine	Gefälle h Fuß	Aufschlag-quantum Q Cubikfuß pr. Secunde	Wirkungsgrad $\eta = \frac{L}{Qh\gamma}$
Oberschlägige Wasserräder	24 bis 40	$1\frac{1}{2}$ bis 16	0,70 b. 0,80
	16 » 24	2 » 20	0,65 » 0,75
	8 » 16	$2\frac{1}{2}$ » 12	0,50 » 0,60
Rückenschlägige Wasserräder mit Leitschaufelschütze	10 » 30	3 24	0,60 » 0,75
Kropfräder mit Leitschaufelschütze	8 » 16	4 » 70	0,60 » 0,70
Kropfräder mit Ueberfallschütze	5 » 10	4 » 70	0,65 » 0,70
Kropfräder mit Spannschütze	3 » 6	4 » 80	0,40 » 0,55
Ponceleträder	2 » 6	4 » 120	0,55 » 0,65
Unterschlägige Räder im Gerinne	1 » 3	8 » 120	0,30 » 0,40
Unterschlägige Räder im unbegrenzten Wasser	$\frac{1}{4}$ » 1	25 » 120	0,20 » 0,30
Turbinen mit allseitiger Beaufschlagung	1 » 60	$\frac{1}{4}$ » 120	0,60 » 0,75
Turbinen mit partieller Beaufschlagung	20 » 200	$\frac{1}{8}$ » 40	0,50 » 0,65
Wassersäulenmaschinen	50 » 800	$\frac{1}{4}$ » 20	0,70 » 0,80

Bei der Umsetzung von Fußpfund in Meterkilogramm, Pferdekräfte u. s. w. kann man von der Tabelle auf Seite 335 Gebrauch machen, und beim Umsetzen von Fußcubikfuß in Metercubikmeter u. s. w. ist folgende Tabelle in Anwendung zu bringen.

Fußcubikfuß					Meter-Cubikmeter
preußisch	österreichisch	sächsisch	badische	englisch	
1	0,9717	1,5086	1,1979	1,1242	0,009703
1,0290	1	1,5525	1,2328	1,1569	0,009985
0,6628	0,6441	1	0,7940	0,7452	0,006431
0,8347	0,8112	1,2593	1	0,9385	0,008100
0,8895	0,8643	1,3419	1,0654	1	0,008630
103,06	100,14	155,48	123,45	115,77	1

§. 62. Verticale Zellenräder. Die Zellenräder werden hauptsächlich durch das Gewicht des von den Radzellen aufgenommenen Wassers in Umtrieb gesetzt, und sind entweder oberschlägige oder rückenschlägige Wasserräder. Diese Räder haben je nach ihrer Höhe, die Umfangsgeschwindigkeit $v = 4$ bis 8 Fuß und laufen hiernach pr. Minute $u = 4$ bis 6 mal um. Die absolute Eintrittsgeschwindigkeit ist

$$c = \varkappa v = \frac{3}{2} v \text{ bis } \frac{5}{2} v = 6 \text{ bis } 12 \text{ Fuß}.$$

Das zur Erzeugung der Geschwindigkeit nöthige Gefälle ist

$$h_0 = 1{,}1 \frac{c^2}{2g} = 1{,}1\, \varkappa^2 \frac{v^2}{2g} = 0{,}0176\, \varkappa^2 v^2,$$

im Mittel $= 0{,}07\, v^2$ Fuß, also für $v = 4$ Fuß, $h_0 = 1{,}12$ Fuß und für $v = 8$ Fuß, $h_0 = 4{,}5$ Fuß.

Bei den oberschlägigen Wasserrädern fällt das Wasser 1 bis 3 Schaufeln unterhalb des Radscheitels ein, daher ist, wenn h das ganze Radgefälle bezeichnet, der erforderliche Halbmesser eines solchen Rades, $r = \frac{h - h_0}{2}$ reichlich.

Wenn das Unterwasser im Abzugsgraben einen sehr veränderlichen Stand hat, so muß man noch einen Theil des Gefälles auf das Freihängen verwenden. Auch wendet man in diesem Falle rückenschlägige Wasserräder mit Vortheil an, weil hier in der Regel das Unterwasser in derselben Richtung abfließt, in welcher das Rad umläuft. Für die letzteren Räder ist gewöhnlich $r = \frac{2}{3} h$ bis $\frac{3}{4} h$.

Die Kranzbreite oder Zellentiefe der Zellenräder ist $d = 10$ bis 12 Zoll, und der Füllungscoefficient ist bei den oberschlägigen Rädern, $\varepsilon = \frac{Q}{dev} = \frac{1}{4}$, bei den rückenschlägigen Rädern, $\varepsilon = \frac{Q}{dev} = \frac{1}{3}$.

Hiernach bestimmt sich die Radweite im ersteren Falle,

$$e = \frac{Q}{\varepsilon d v} = \frac{4\,Q}{d v}, \text{ und im zweiten, } e = \frac{3\,Q}{d v},$$

z. B. für $d = 1$ und $v = 6$ Fuß,

$$e = \frac{2}{3}\,Q \text{ und } e = \frac{1}{2}\,Q.$$

Uebrigens ist Q aus der Leistung L Pferdekräfte, wenn man $\eta = 0{,}70$ setzt, mittels der Formel $Q = 11\,\frac{L}{h}$ Cubikfuß zu berechnen.

Die Breite e_1 des eintretenden Wasserstrahles ist 2 bis 4 Zoll kleiner als die Radweite e, folglich die Strahldicke an der Eintrittsstelle: $d_1 = \frac{Q}{c e_1} = \frac{Q}{\varkappa v e_1} = \frac{\varepsilon}{\varkappa}\,\frac{e}{e_1}\,d = \frac{\varepsilon}{\varkappa}\,d$ reichlich, z. B. für $\varkappa = 2$ und $\varepsilon = \frac{1}{4}$, $d_1 = \frac{d}{8}$, dagegen für $\varkappa = 2$ und $\varepsilon = \frac{1}{3}$, $d_1 = \frac{d}{6}$.

Der Schaufelwinkel β ist 15 bis 30 Grad, ersteres bei hohen und letzteres bei kleinen Rädern; folglich für $\varkappa = 2$ der Eintrittswinkel $\alpha = \left(\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\right)\beta = \frac{\beta}{2} = 7\frac{1}{2}$ bis 15 Grad und die relative Eintrittsgeschwindigkeit $w = (1 - \varkappa)\,c = \frac{1}{2}\,c = v$.

Der Bogen, welchen der eintretende Wasserstrahl am Radumfange einnimmt, ist

$$b_1 = \frac{d_1}{sin.\,\alpha} = \frac{\varepsilon}{\varkappa}\,\frac{d}{sin.\,\alpha} = \frac{\varepsilon}{\varkappa - 1}\,\frac{d}{sin.\,\beta},$$

also für $\varkappa = 2$,

$$b_1 = \frac{\varepsilon d}{sin.\,\beta} = \frac{d}{4\,sin.\,\beta} \text{ bis } \frac{d}{3\,sin.\,\beta}.$$

Z. B. für $\beta = 20$ Grad,

$$b_1 = 0{,}73\,d \text{ bis } 0{,}97\,d.$$

Bei den unventilirten oberschlägigen Rädern macht man den Bogen des Radumfanges zwischen zwei Schaufeln $b = \frac{3}{2}\,b_1$ nahe, wonach dann die Anzahl der Radschaufeln

$$n = \frac{2\,\pi r}{b} = \frac{4\,\pi r}{3\,b_1} = \frac{4\,(\varkappa - 1)\,\pi}{3\,\varepsilon}\,\frac{r\,sin.\,\beta}{d},$$

also für $\varkappa = 2$,

$$n = \frac{4\pi}{3\varepsilon}\,\frac{r\,sin.\,\beta}{d}, \text{ und für } \varepsilon = \frac{1}{4},$$

$$n = 16{,}76\,\frac{r\,sin.\,\beta}{d} \text{ folgt.}$$

Führt man noch $d = 1$ und $\beta = 20$ Grad ein, so erhält man $n = 5{,}7\,r$, wo r in Fußen zu geben ist. Gewöhnlich nimmt man $n = 5\,r$ bis $6\,r$.

Bei ventilirten rückenschlägigen Rädern kann man recht gut $b = b_1$ machen, wonach dann

$$n = \frac{2\,\pi r}{b} = \frac{2\,\pi r}{b_1} = \frac{2\,(\varkappa - 1)\,\pi}{\varepsilon}\,\frac{r\,sin.\,\beta}{d},$$

also für $\varkappa = 2$,

$$n = \frac{2\pi}{\varepsilon} \frac{r \sin. \beta}{d}, \text{ und für } \varepsilon = \frac{1}{3},$$

$$n = 18,85 \frac{r \sin. \beta}{d} \text{ folgt.}$$

Für $d = 1$ Fuß und $\beta = 20$ Grad folgt $n = 6,5\,r$.

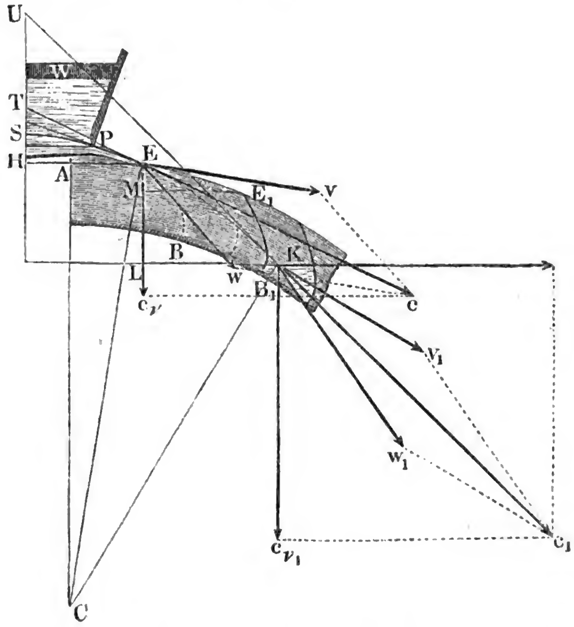
Uebrigens muß die Schaufelzahl ein Vielfaches der Zahl $n_1 = 2 + 0,6\,r$ der Radarme sein.

Aus der Schaufelzahl n folgt der Theilwinkel des Rades $\beta = \frac{360^0}{n}$.

Die Kropf- oder Riegelschaufel, oder, wenn die ganze Schaufel nur aus einem Stücke besteht, das innere Ende der ganzen Schaufel stellt man rechtwinkelig gegen den Radboden, und der Schaufelwinkel, welchen die nach den beiden Enden der Schaufel laufenden Radhalbmesser zwischen sich einschließen, ist je nachdem das Rad schneller oder langsamer umläuft, $\beta_1 = \beta$ bis $\frac{3}{2}\beta$.

Steht die Eintrittsstelle E, Fig. 401, um den Winkel

Fig. 401.



$ACE = \theta$ vom Radscheitel A ab, so ist die Neigung des mit der Geschwindigkeit c einzuführenden Wasserstrahles:

$$\nu = \theta + \alpha,$$

und es bestimmen sich die Coordinaten des Scheitels S der Parabel, in welcher das Wasser einfällt, durch die Formeln

$$SH = x_0 = \frac{c^2 \, sin. \nu^2}{2g} \text{ und}$$

$$HE = y_0 = \frac{c^2 \, sin. \, 2\nu}{2g}.$$

Uebrigens ist θ durch die Formel

$$cos. \, \theta = \frac{h - h_0}{r} - 1 \text{ bestimmt.}$$

Legt man die Mitte P der Schützenmündung um eine gewisse Höhe z über den Eintrittspunkt E, so sind die Coordinaten von P:

$$x_1 = x_0 - z \text{ und } y_1 = y_0 \sqrt{\frac{x}{x_0}},$$

und es ist für den Neigungswinkel ν_1 des Wasserstrahles beim Austritte aus der Schützenmündung:

$$tang. \, \nu_1 = \frac{2x_1}{y_1},$$

woraus sich dann die Neigung $(90 - \nu_1)$ der Mündungs- oder Schutzebene bestimmen läßt.

Ist z. B. das Gefälle $h = 30$ Fuß, die Umfangsgeschwindigkeit des Rades, $v = 6$ Fuß und wird $z = 2$ angenommen, so folgt $c = 2v = 12$ Fuß, $h_0 = 0{,}0176 \, . \, 144 = 2{,}53$ Fuß, folglich der Radhalbmesser $r = \dfrac{h - h_0}{2} = 13{,}735$ Fuß reichlich.

Macht man $r = 13{,}8$ Fuß, so ist $cos. \, \theta = \dfrac{27{,}47}{13{,}8} - 1 = 0{,}9906$, wonach $\theta = 7^0, 52'$ folgt.

Nimmt man $\alpha = 12^1/_2{}^0$ an, so folgt $\nu = 20^0{,}22'$, und $x_0 = 0{,}016 \, . \, 144 \, . \, (sin. \, 20^0{,}22')^2 = 2{,}304 \, . \, 0{,}1211 = 0{,}279$ Fuß $= 3^1/_3$ Zoll, und $y_0 = 2{,}304 \; sin. \, (40^0, 44') = 1{,}503$ Fuß $= 18$ Zoll.

Legt man die Mitte der Schutzmündung 3 Zoll über der Eintrittsstelle, so hat man für dieselbe

$$x_1 = x_0 - z = {}^1/_3 \text{ Zoll}, \; y_1 = y_0 \sqrt{\frac{x_1}{x_0}} = 18 \sqrt{{}^1/_9} = 6 \text{ Zoll},$$

und $tang. \, \nu_1 = \dfrac{2x_1}{y_1} = {}^1/_9$, wonach die Neigung der Mündungsaxe $\nu_1 = 6^0{,}22'$, und folglich die des Schutzbrettes $= 90^0 - \nu_1 = 83^0{,}38'$ folgt.

Das Wasserquantum in einer Radzelle ist $V = \dfrac{60Q}{nu}$, und folglich der Querschnitt desselben $F = \dfrac{60\,Q}{nue}$. Mit Hülfe desselben läßt sich auch die Tiefe ML der Oberfläche K des Wassers in der Zelle finden, bei welcher das Anfüllen so eben beendigt ist. Während das Ende E der Schaufel BE mit der Geschwindigkeit v den Weg EE_1 durchläuft, legt das Wasserelement E in verticaler Richtung den Weg EL gleichförmig beschleunigt, sowie in horizontaler Richtung den Weg LK gleichförmig, im Ganzen aber den parabolischen Weg EK zurück. Es ist daher

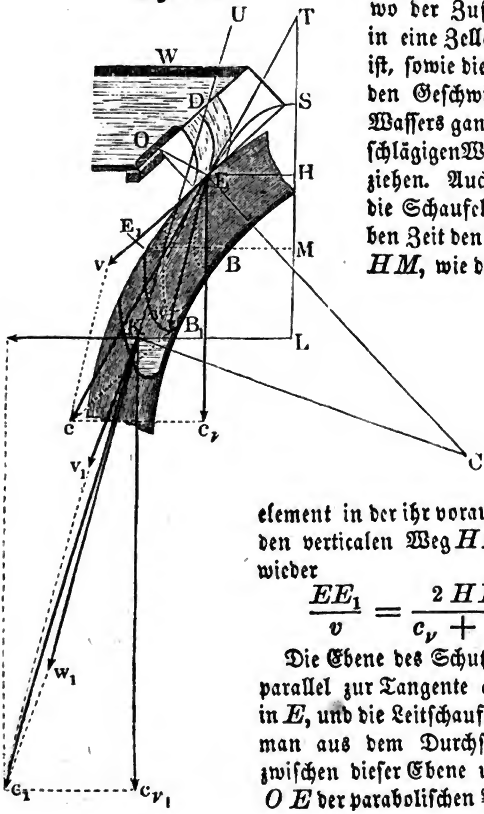
$$\frac{EE_1}{v} = \frac{2\,EL}{c_\nu + c_{\nu_1}},$$

wenn c_ν und c_{ν_1} die verticalen Componenten der Anfangs- und Endgeschwindigkeit c und c_1 bezeichnen.

Um den letzteren Ausdruck berechnen zu können, muß man erst c mittels des Neigungswinkels ν in einen horizontalen und einen verticalen Componenten (c_ν) zerlegen, in K die Tangente KU an die parabolische Bahn EK legen und zu dem gefundenen horizontalen Componenten von c, welcher auch zugleich der von der Geschwindigkeit c_1 in K ist, den verticalen Componenten c_{ν_1}, sowie die mittlere Geschwindigkeit c_1 finden. Wird nun durch die Annahme von EE_1 oder deren Verticalprojection EM, der letzten Gleichung Genüge gethan, so hat man auch dadurch den Stand des Wasserspiegels K im ersten Augenblicke der vollständigen Füllung gefunden; außerdem muß man einen anderen Werth von EE_1 annehmen und die Vergleichung von Neuem anstellen.

Bei einem rückenschlägigen Wasserrade mit Coulisseneinlauf oder Leitschaufelapparat ODE, Fig. 402, ist die Bestimmung der Stelle K, wo der Zufluß des Wassers in eine Zelle soeben beendigt ist, sowie die der entsprechenden Geschwindigkeit c_1 des Wassers ganz wie beim oberschlägigen Wasserrade zu vollziehen. Auch hier durchläuft die Schaufel BE in derselben Zeit den senkrechten Weg HM, wie das letzte Wasserelement in der ihr vorausgehenden Zelle den verticalen Weg HL. Es ist also wieder

Fig. 402.



$$\frac{EE_1}{v} = \frac{2\,HL}{c_\nu + c_{\nu_1}}.$$

Die Ebene des Schutzbrettes legt man parallel zur Tangente am Radumfange in E, und die Leitschaufel DE beschreibt man aus dem Durchschnittspunkte O zwischen dieser Ebene und der Normale OE der parabolischen Bahn SEK des

einfallenden Wassers. Die absolute Geschwindigkeit c des in E einfallenden Wassers bestimmt sich aus der Tiefe h_0 des Punktes E unter dem Wasserspiegel W im Aufschlaggerinne durch die Formel

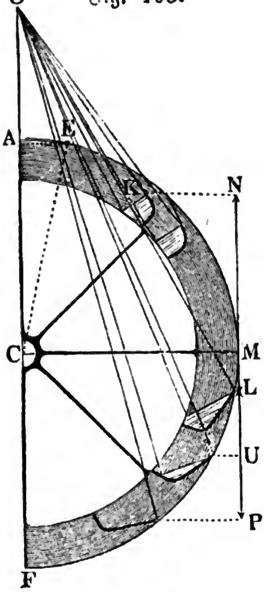
$$c = 0{,}9\sqrt{2gh_0}.$$

Für tiefer und höher liegende Eintrittsstellen hat h_0 und folglich auch c_0 größere und kleinere Werthe, und es ist daher für jede derselben das Centrum der zugehörigen Leitschaufel nach der angegebenen Regel besonders zu bestimmen.

Die Entfernung der Leitschaufeln von einander, am Radumfange gemessen, ist 4 bis 6 Zoll und der Krümmungshalbmesser OE derselben, 12 bis 15 Zoll. Es ist dafür zu sorgen, daß die Einmündung des obersten Leitschaufelcanales im Gerinne noch immer einige Zoll unter dem Oberwasserspiegel W liege.

Die Wasserspiegel in den sämmtlichen Zellen eines verticalen Wasserrades AMF, Fig. 403, bilden concentrische Cylinderflächen, deren Axe O um die Höhe

Fig. 403.



$$CO = k = \left(\frac{30}{\pi u}\right)^2 g$$

$$= \frac{2850}{u^2} \text{ Fuß}$$

über der Radaxe C liegt.

Ist die Umdrehungszahl u nur 3 bis 5, so kann man aber bei Bestimmung der Leistung eines Wasserrades diese Flächen noch als horizontale Ebenen behandeln.

Die ganze Leistung oder mechanische Arbeit eines Zellenrades pr. Secunde ist durch die Formel

$$L = \left(\frac{(c_1 \cos.\alpha_1 - v_1)\, v_1}{g} + h_1 + \xi h_2\right) Q\gamma$$

bestimmt, worin die Buchstaben folgende Bedeutungen haben. Q ist das Aufschlagquantum pr. Secunde, γ die Dichtigkeit des Wassers und zwar 61,74 Pfund, wenn Q in Cubikfuß ausgedrückt wird; c_1 die Geschwindigkeit des Wassers in K (Fig. 401 und Fig. 402), sowie v_1 die Radgeschwindigkeit an derselben Stelle, und α_1 der Winkel $c_1 K v_1$ zwischen den Richtungen dieser Geschwindigkeiten; ferner bezeichnet g die Beschleunigung der Schwere, $= 31{,}25$ Fuß, wonach $\frac{1}{g} = 0{,}032$ ausfällt, h_1 ist die Höhe NL, Fig. 403, des wasserhaltenden Bogens von K bis zur Stelle L gemessen, wo der Austritt beginnt, h_2 die Höhe

LP des Ausgußbogens, von der letzten Stelle bis zu derjenigen gemessen, wo das letzte Wasserelement aus dem Rade geflossen ist, und ξ das Verhältniß des durch die Simpson'sche Regel zu bestimmenden mittleren Querschnitts des Wasserkörpers in einer Zelle während des Ausgusses zu dem anfänglichen Querschnitte $F = \frac{60\,Q}{nue}$ bei Beginn des Ausgusses.

Bezeichnet F_1 den Querschnitt dieses Wasserkörpers, wenn die Zelle um die Höhe $LU = \frac{1}{2} LP$ gesunken ist, so hat man

$$\xi = \frac{F + 4F_1}{6F}.$$

Annähernd ist erfahrungsmäßig

$$L = \left(\frac{(c - v)\,v}{g} + 0{,}8\,h_1\right) Q\gamma$$
$$= [1{,}97\,(c - v)v + 49{,}39 h_1] Q \text{ Fußpfund}$$

zu setzen, wobei sich aber c und v auf die Eintrittsstelle E (Fig. 401 und 402) beziehen und h_1 die ganze Höhe von dieser Stelle bis zum Radfuße F (Fig. 403) bezeichnet.

§. 63. Mittelschlägige Schaufelräder. Die Schaufelräder im Kropfgerinne, oder sogenannten Kropfräder, erhalten eine Kranzbreite $d = 12$ bis 16 Zoll, einen Spielraum im Kropfe von $\frac{1}{2}$ bis 1 Zoll, und die Zellenfüllung $\varepsilon = \frac{Q}{dev} = \frac{1}{2}$, folglich die Weite $e = \frac{2\,Q}{dv}$, z. B. für $d = \frac{5}{4}$ Fuß, $e = 1{,}6\,\frac{Q}{v}$ Fuß. Die Anzahl der Radschaufeln ist auch hier $5\,r$ bis $6\,r$, wenn r den Radhalbmesser in Fußen angiebt. Die Schaufeln stehen entweder radial oder sind so geneigt, daß sie beim Austritte aus dem Unterwasser eine verticale Lage annehmen. Man setzt sie auch wohl aus zwei Stücken zusammen. Die übrigen Verhältnisse sind bei verschiedener Einführung des Wassers verschieden.

1) Bei einem Schaufelrade mit Leitschaufelschütze ist gewöhnlich $v = 5$ Fuß und r ungefähr $= h$, ferner $c = 2 \,.\, v = 10$ Fuß, und, wegen der größeren Widerstände in den Leitschaufelcanälen, das Einführungsgefälle

$$h_0 = 1{,}25\,\frac{c^2}{2\,g} = 1{,}25\,\frac{\varkappa^2 v^2}{2\,g} = 0{,}08\,v^2.$$

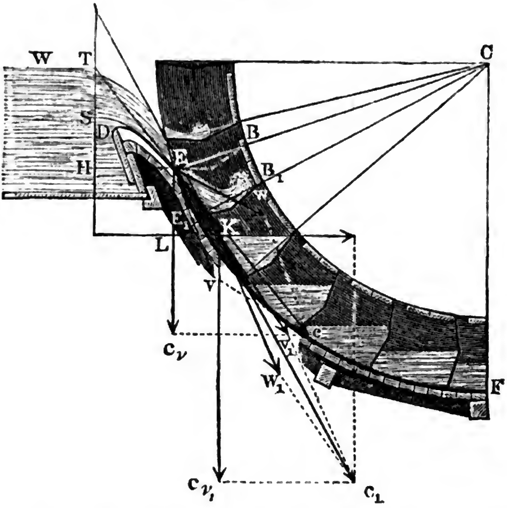
Bei dem Wirkungsgrad $\eta = \frac{2}{3}$, ist das der Leistung L Pferdekräfte entsprechende Aufschlagquantum $Q = 11{,}5\,\frac{L}{h}$ Cubikfuß.

Die Strahldicke d_1 beim Eintritte in das Rad ist auch hier $\frac{\varepsilon}{\varkappa}\,d$ reichlich, folglich für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und $\varkappa = 2$, $d_1 = \frac{1}{4}\,d$. Der Eintrittswinkel α ist $= 15$ bis 20 Grad, der Bogen, welchen der Strahl am Radumfange einnimmt, ist $b_1 = \frac{d_1}{sin.\,\alpha}$, z. B. für $\alpha = 15^0$, $b_1 = 3{,}86\,d_1 = 0{,}965\,d$, also ungefähr $= d$, und die Anzahl der Leitschaufelcanäle, bei 5 Zoll Ent-

fernung, $n_1 = \frac{b_1}{5} = 0,77\, d_1 = 0,19\, d$. Bei veränderlichem Stande des Oberwasserspiegels ist natürlich n_1 noch größer zu machen. Die Construction des Leitschaufelapparates ist dieselbe wie beim rückenschlägigen Rade.

2) Bei einem Schaufelrade BCF, Fig. 404, mit Ueberfallschütze ist die Umfangsgeschwindigkeit $v = 4$ bis 5 Fuß,

Fig. 404



$c = 2v$ und die Tiefe der Eintrittsstelle E unter dem noch ungesenkten Oberwasserspiegel W, $h_0 = 1,1\,\frac{c^2}{2g} = 0,0176\, x^2 v^2$.

Ferner ist hier $r = 1,25\, h$ bis $1,5\, h$ und, wenn man $\eta = 0,6$ annimmt, $Q = 13\,\frac{L}{h}$ Cubikfuß. Aus dem Eintrittswinkel $cEv = \alpha = 15$ bis 20^0, und dem Winkel $ECF = \theta$, um welchen der Eintrittspunkt E vom Radfuße F, oder der Radhalbmesser CE von der Verticalen CF abweicht, folgt die Neigung der Eintrittsgeschwindigkeit $\overline{Ec} = c$, $\nu = \theta - \alpha$, woraus sich nun auch die Coordinaten $SH = a = \frac{c^2 \sin. \nu^2}{2g}$ und $HE = \frac{c^2 \sin. 2\nu}{2g}$ des Parabelscheitels S berechnen lassen. Uebrigens ist $\cos.\theta = 1 - \frac{h - h_0}{r}$. Die bewegliche Ueberfallschaufel DE nimmt bei einer Länge von 8 bis 12 Zoll meist nur einen Theil des Parabelbogens SE ein, und die Tiefe der Ueberfallschwelle D unter dem Oberwasserspiegel W ist

$$h_0 - z = \left(\frac{\frac{3}{2}\, Q}{\mu e \sqrt{2g}}\right)^{2/3} = \left(\frac{1,6\, Q}{\sqrt{2g}}\right)^{2/3} = 0,345 \left(\frac{Q}{e}\right)^{2/3} \text{ Fuß}.$$

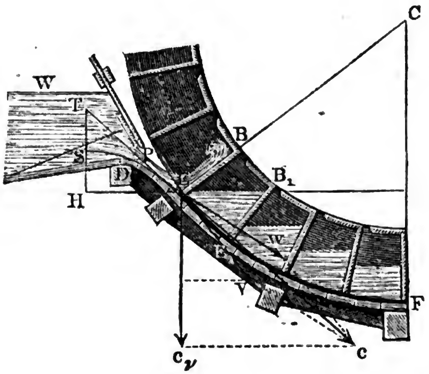
Die Tiefe EL des Punktes K, in welchem die Anfüllung der Schaufelräume zu Ende geht, ist ganz wie bei einem Zellenrade mittels der Formel

$$\frac{EE_1}{v} = \frac{2\,EL}{c_\nu + c_{\nu_1}}$$

zu bestimmen, auch ergiebt sich auf dieselbe Weise die Eintrittsgeschwindigkeit c_1, sowie die Radgeschwindigkeit v_1 und der Winkel $c_1 E v_1 = \alpha_1$.

3) Die Schaufelräder mit Spannschütze, wie Fig. 405, läßt man mit der größeren Geschwindigkeit $v = 6$ Fuß umlaufen, wonach für $\varkappa = 2$, die Eintrittsgeschwindigkeit $c = 12$ Fuß ausfällt. Das Gefälle zur Erzeugung von c, oder die Tiefe von E unter dem Oberwasserspiegel W ist

Fig. 405.



$$h_0 = 1{,}15\,\frac{c^2}{2g} = 1{,}15\,\varkappa^2\,\frac{v^2}{2g} = 0{,}0184\,\varkappa^2 v^2,$$

z. B. für $c = \varkappa v = 12$, $h_0 = 2{,}65$ Fuß.

Ferner ist $r = 1{,}5\,h$, bis $2{,}5\,h$ und $\eta = 0{,}5$ angenommen, $Q = 15{,}5\,\frac{L}{h}$ Cubikfuß. Der Eintrittswinkel ist $\alpha = 10$ bis 20 Grad, und den Neigungswinkel $ECF = \theta$ bestimmt die Formel $\cos.\,\theta = 1 - \frac{h - h_0}{r}$. Aus beiden Winkeln ergiebt sich die Neigung der Richtung der Eintrittsgeschwindigkeit gegen den Horizont $\nu = \theta - \alpha$, woraus sich wieder die Coordinaten

$$SH = a = \frac{c^2 \sin.\,\nu^2}{2g} \text{ und}$$

$$HE = b = \frac{c^2 \sin.\,2\,\nu}{2g}$$

des Parabelscheitels S bestimmen lassen.

Die Schutzmündung P legt man so nahe wie möglich an das Rad, weshalb auch das Schutzbrett eine Neigung gegen den Horizont erhält. An den kreisförmigen Kropf EF schließt sich der parabolische Kropf DE an, welcher längs des Parabelbogens SE hinläuft. Ist z die Höhe der Kropfschwelle D über E, so hat man den Querschnitt der Schützenmündung:

$$F_1 = \frac{Q}{0{,}95\sqrt{2g(h_0 - z)}} = 0{,}133\,\frac{Q}{\sqrt{h_0 - z}} \text{ Quadratfuß}$$
$$= 19{,}15\,\frac{Q}{\sqrt{h_0 - z}} \text{ Quadratzoll.}$$

Wenn die Radschaufel BE bei ihrem Durchgange durch die unterste Eintrittsstelle E bis an das Wasser über der vorausgehenden Schaufel reicht, so ist auch hier die Füllung des Raumes zwischen beiden Schaufeln beendigt und es beginnt daher in E schon die vollständige Wirkung des Wassers durch Druck, auch fällt dann c_1 mit c, v_1 mit v und α_1 mit α zusammen.

Die Leistung eines Schaufelrades ist durch die Formel

$$L = \left(\frac{(c_1 \cos.\alpha_1 - v_1)\,v_1}{g} + \xi h_1\right) Q\gamma$$

zu bestimmen, und es ist hier ξ das Verhältniß $\frac{Q_1}{Q}$ des nach Abzug der im Spielraume des Kropfes verlorenen Wassermenge erhaltenen, wirksamen Aufschlagquantums Q_1 zur ganzen Aufschlagmenge Q.

Im Mittel ist den Erfahrungen entsprechend:

$$L = \left(\frac{(c - v)\,v}{g} + 0{,}75\,h_1\right) Q\gamma$$
$$= [1{,}97\,(c - v)\,v + 46{,}3\,h_1]\,Q \text{ Fußpfund}$$

zu setzen. Hierbei beziehen sich c und v auf die Eintrittsstelle, und es bezeichnet h_1 die Tiefe des Unterwasserspiegels unter der Eintrittsstelle E. Fließt das Wasser im Abzugsgraben mit derselben Geschwindigkeit v ab, wie das Rad umläuft, so kann man das Rad bis zur halben Kranzbreite ins Unterwasser tauchen lassen, wobei man das Gefälle erspart, welches durch den Abfall unter dem Radfuß verloren geht.

§. 64. Unterschlägige Schaufelräder. Die unterschlägigen Kropfräder sind nach denselben Regeln zu berechnen und zu construiren, wie die mittelschlägigen Kropfräder. Es ist hier bei dem Kropfgefälle $h_1 = \frac{1}{4}h$ bis $\frac{3}{4}h$, $\eta = 0{,}40$ bis $0{,}50$ zu setzen, und daher $Q = 19{,}4\,\frac{L}{h}$ bis $15{,}5\,\frac{L}{h}$ Cubikfuß.

Für die unterschlägigen Räder im Schnurgerinne ist

$$L = \frac{(c_1 - v_1)\,v_1}{g}\,Q_1\gamma = 1{,}975\,(c_1 - v_1)\,v_1\,Q_1 \text{ Fußpfund}$$
$$= 0{,}004114\,(c_1 - v_1)\,v_1\,Q_1 \text{ Pferdekräfte}$$

und die vortheilhafteste Umdrehungsgeschwindigkeit

$$v_1 = 0{,}45\,c_1 = 0{,}425\sqrt{2gh_1}$$

zu setzen. Die entsprechende Maximalleistung ist

$$L = 0{,}441\,Q_1 h_1 \gamma = 27{,}2\,Q_1 h_1 \text{ Fußpfund}$$
$$= 0{,}0567\,Q_1 h_1 \text{ Pferdekräfte.}$$

Wegen des Wasserverlustes hat man aber effectiv, $\eta = 0{,}30$ bis $0{,}40$ und daher

$L = 18{,}52\, Qh$ bis $24{,}7\, Qh$ Fußpfund, oder
$= 0{,}0386\, Qh$ bis $0{,}0515\, Qh$ Pferdekräfte zu setzen.

Das Wasserquantum, welches zwischen den Schaufeln hindurch geht, ohne zum Stoß zu gelangen, läßt sich, je nachdem die Anzahl n_1 der ins Wasser getauchten Schaufeln größer oder kleiner als $\frac{c}{c-v}$ ist,

$$Q_2 = Q - Q_1 = \frac{1}{3n_1^2}\left(\frac{c}{c-v}\right)^2 Q, \text{ od.} = \left[1 - \tfrac{1}{3} n_1 \left(\frac{c-v}{c}\right)\right] Q$$

setzen.

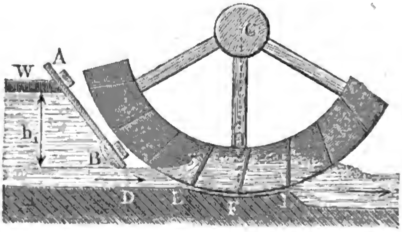
Außerdem geht auch noch eine gewisse Wassermenge Q_3 durch Abfluß im Spielraume zwischen Rad und Gerinne verloren. Bezeichnet d_1 die Höhe des Wasserstrahles vor dem Aufschlagen auf eine Schaufel, e_1 die Gerinnweite, σ die Weite des Spielraumes, n die Anzahl sämmtlicher Radschaufeln u. s. w., so ist, je nachdem sich die Sohle des Abzugsgerinnes in einem Abfall, oder direct an das Aufschlaggerinne anschließt:

$$Q_3 = 0{,}7\left[\sigma + \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 r\right] e_1 c, \text{ oder}$$

$$Q_3 = 0{,}7\left[\sigma + \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 r\right] e_1 \sqrt{c^2 - 2g\left(\frac{c-v}{v}\right) d_1}.$$

Wenn man das Gerinne am Fuße des Rades so kröpft, daß wie in Fig. 406, mindestens zwei Schaufeln von demselben kreisförmig umgeben werden, so fällt Q_2 ganz und Q_3 nahe $=$ Null aus.

Fig. 406.



Es ist der Radhalbmesser $CF = r = 6$ bis 12 Fß., die Neigung des Schutzbrettes $AB = 60^0$ und das Gefälle des Einlaufgerinnes $DE, = \frac{1}{20}$ der Länge.

Die Strahldicke oder Mündungshöhe $BD = d_1$ ist $= \frac{1}{3}$ der Kranzbreite $FH = d$, und die Strahlbreite oder Mündungsbreite e_1 knapp der Radweite $e = \frac{2Q}{vd}$ zu machen.

Die frei- oder im unbegränzten Wasser hängenden Räder (Schiffmühlenräder) geben in Folge des größeren Wasserverlustes den Wirkungsgrad $\eta = 0{,}30$.

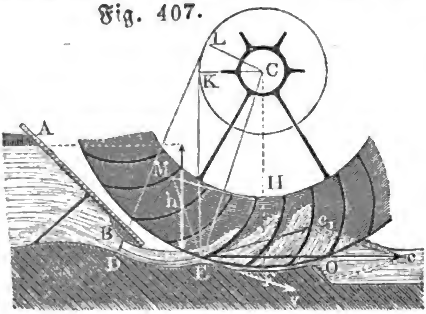
Bei dem Ponceletrade CEO, Fig. 407 (a. f. S.), ist auf den Wirkungsgrad $\eta = 0{,}60$ bis $0{,}65$ zu rechnen, und daher das der Leistung L und dem Gefälle h entsprechende Aufschlagquantum $Q = 13{,}0 \frac{L}{h}$ bis $11{,}9 \frac{L}{h}$ Cubikfuß zu setzen.

Die absolute Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser in das Rad eintritt, ist $c = 0{,}95\sqrt{2gh}$, und die vortheilhafteste Umfangsgeschwindigkeit des Rades:

$$v = c : \varkappa = \frac{1}{2} c = 0{,}475\sqrt{2gh} = 3{,}74\sqrt{h} \text{ Fuß.}$$

Die mittlere Eintrittsstelle E, sowie die mittlere Austrittsstelle O kann man um den Winkel $FCE = FCO = \lambda = 20$ Grad vom Radfuße F abstehen lassen. Führt man dann das Wasser in horizontaler Richtung zum Rade, so ist der Winkel, welchen die Eintrittsgeschwindigkeit c mit dem Radumfange in E einschließt, $\overline{cEv} = \alpha$ ebenfalls $= 20$ Grad, und daher für den Schaufelwinkel

Fig. 407.



$$vEc_1 = \beta, \; cotg.\,\beta = cotg.\,\alpha - \frac{v}{c\,sin.\,\alpha} = 1{,}2855,$$

wonach $\beta = 38$ Grad folgt. Die Kranzbreite FH ist $= d = 0{,}4\,h$, ferner der Krümmungshalbmesser der Schaufel: $ME = a = 1{,}37\,d = 0{,}55\,h$, und der Radhalbmesser $r = 2\,h$. Die Strahldicke beim Eintritte E in das Rad ist $d_1 = 0{,}125\,h$, und hiernach die Rad- und Gerinnweite

$$e_1 = e = \frac{Q}{d_1 c} = \frac{Q}{0{,}119\,h\sqrt{2gh}} = 0{,}1063\,\frac{Q}{h^{3/2}}.$$

Um das Wasser in allen Tiefen unter demselben Winkel α gegen den Radumfang einzuführen, giebt man dem Einlauf eine bogenförmige Gestalt, wobei die Axe des Strahles von der Schutzmündung B bis zum Eintritte E eine Kreisevolvente bildet, deren Grundkreis aus der Axe C des Rades mit dem Halbmesser $CK = CL = r\,sin.\,\lambda = 0{,}342\,r$ beschrieben wird. Die Schutzmündung ist möglichst nahe an das Rad zu legen, und deshalb die Schütze 50 bis 60 Grad zu neigen. Dem Abfall hinter dem Rade gebe man die Höhe $0{,}4\,h$. Je nach der Höhe des Rades erhält es 32 bis 48 Schaufeln aus Eisenblech.

Die theoretische Leistung eines Ponceletrades giebt die Formel

$$L = \frac{2\,v\,(c\,cos.\,a - v)}{g}\,Q\gamma$$

an, welche für $v = \frac{1}{2}\,c\;cos.\,\alpha$ den Maximalwerth

$$L_m = \frac{c^2\,cos.\,\alpha^2}{2\,g}\,Q\gamma \text{ hat.}$$

Von der Leistung des Wassers in einem verticalen Wasserrade verzehrt noch die Zapfenreibung einen Theil. Ist G das Gewicht des Wasserrades sammt Wasser u. s. w., ϱ der Zapfenhalbmesser und φ der Reibungscoefficient, so beträgt dieser Arbeitsverlust

$$L_1 = \varphi G \frac{\varrho}{r} v = \frac{\pi u \varrho}{30} \varphi G = 0{,}105\, \varphi u G \varrho,$$

z. B. für $\varphi = 0{,}075$, $L_1 = 0{,}0079\, u G \varrho$.

Das Gewicht des armirten Wasserrades läßt sich annähernd $G = 2800 \frac{L}{\varepsilon u}$ Pfund setzen, wenn L in Pferdekräften gegeben ist.

§. 65. Horizontale Wasserräder. Die horizontalen Wasserräder oder die sogenannten Turbinen, sowie auch die nach dem Turbinenprincip construirten verticalen Wasserräder sind entweder ein- oder zwei- oder allseitig beaufschlagt. Zu den horizontalen Wasserrädern mit einseitiger Beaufschlagung gehören die Turbinen von Burdin, sowie die von Poncelet oder die sogenannten Tangentialräder AEA, Fig. 408 und Fig. 409. Bei den Tangentialrädern von Zupinger tritt das Wasser von außen, und bei denen von Schwamkrug von innen in das Rad. Bei jenen ist der Eintrittswinkel $\overline{cEv} = \alpha = 8$ bis 12 Grad, bei diesen ist dieser Winkel $cEv_1 = \alpha = 18$ bis 24 Grad. Der Schaufelwinkel oder der Winkel, unter welchem sich das Schaufelende bei der Eintrittsstelle an den Radumfang anschließt, ist $\beta = 2\alpha$ zu machen. Bei den Tangentialrädern in Fig. 409, mit äußerer Beaufschlagung ist das Verhältniß $\frac{r}{r_1}$ der Radhalbmesser $CE = r$ und $CF = r_1$, $\nu = 5/4$ bis $4/3$, und für den Austrittswinkel oder den Winkel $TFc_2 = \delta$, unter welchem die Schaufeln bei der Austrittsstelle F an den inneren oder äußeren Radumfang anstoßen, ist bestimmt durch die Formel

Fig. 408.

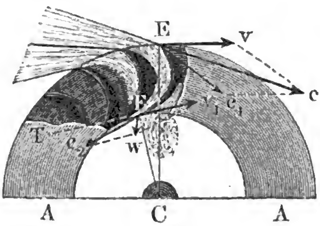
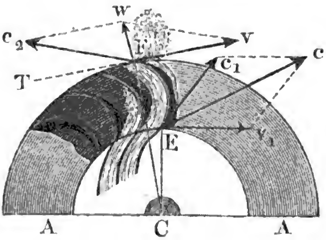


Fig. 409.



$$\sin.\delta = \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \sin.2\alpha = \nu^2 \sin.2\alpha.$$

Ist h_1 die Druckhöhe des Wassers in der Zuleitungsröhre oder das um die Reibungsverluste in dieser Röhre verminderte Radgefälle, so läßt sich die absolute Eintrittsgeschwindigkeit des Wassers: $c = 0{,}95 \sqrt{2gh} = 7{,}51 \sqrt{h}$ Fuß setzen.

Die Tangentialräder wendet man in der Regel bei hohen Gefällen $h = 50$ bis 300 Fuß an, und geben im Mittel den Wirkungsgrad $\eta = 0{,}60$. Das entsprechende Aufschlagquantum ist $Q = 13{,}0 \frac{L}{h}$ Cubikfuß, und die Summe der Querschnitte sämmtlicher Ausflußmündungen des Einlaufes:

$$F = \frac{Q}{c} = \frac{13{,}0\,L}{7{,}51\,h\sqrt{h}} = 1{,}73 \frac{L}{h^{3/2}} \text{ Quadratfuß.}$$

Giebt man das Verhältniß $\lambda = \frac{b}{2\pi r}$ zwischen dem Bogen b, an welchem der Eintritt des Wassers erfolgt, zum ganzen Radumfange $2\pi r$, sowie das Verhältniß $\psi = \frac{e}{r}$ der Radweite e zum Radhalbmesser r, so hat man

$$r = \sqrt{\frac{F}{2\pi\lambda\psi \sin.\alpha}},$$

woraus dann $b = \lambda . 2\pi r$ und die Radweite $e = \psi r$ folgt. Gewöhnlich nimmt man $\lambda = \frac{1}{6}$ bis $\frac{1}{12}$ und $\psi = \frac{1}{6}$ bis $\frac{1}{4}$. Je nach der Größe des Radhalbmessers, erhalten diese Turbinen 48 bis 60 Schaufeln. Die vortheilhafteste Umfangsgeschwindigkeit dieser Räder ist $v = \frac{c}{2\cos.\alpha}$, und die entsprechende effective Radleistung:

$$L = \left(0{,}9 - \left[0{,}1 \left(\frac{1}{2\nu\cos.\alpha}\right)^2 + (\nu\, tang.\alpha)^2\right]\right) Q h \gamma.$$

Diese Formeln gelten auch für Tangentialräder mit innerer Beaufschlagung, wenn man r mit r_1 und v mit v_1 vertauscht.

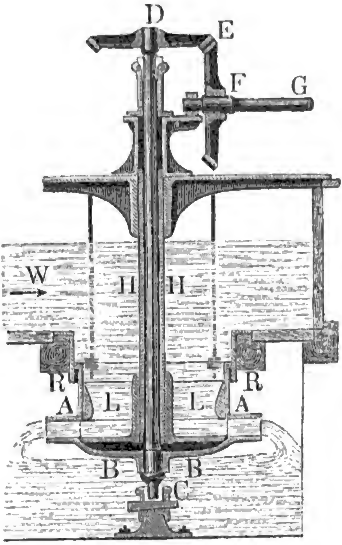
Die Turbinen mit allseitiger Beaufschlagung sind in der Regel Reactionsräder, wo die Radkanäle vom durchfließenden Wasser ganz ausgefüllt werden. Bei den vollkommneren Reactionsturbinen wird das Wasser durch einen besonderen Leitschaufelapparat in das Rad eingeführt. Bei den Fourneyron'schen Turbinen fließt das Wasser von innen nach außen, dagegen bei den Francis'schen Turbinen von außen nach innen, ferner bei den Turbinen von Henschel, Jonval und Fontaine von oben nach unten oder auch von unten nach oben durch das Rad. Diese Turbinen werden vorzüglich bei mittleren und kleineren Gefällen mit Vortheil angewendet, wo sie einen Wirkungsgrad 0,60 bis 0,75 liefern; bei sehr hohen Gefällen fallen sie zu klein aus und machen deshalb eine übermäßige Anzahl von Umdrehungen pr. Minute nöthig, dagegen sind sie bei kleinen Gefällen und variablen Wasserständen noch mit Vortheil anzuwenden, weil sie auch unter Wasser umgehen

können, ohne einen bedeutenden Verlust an Leistung zu erleiden. Es ist hier $\eta = 0{,}55$ bis $0{,}65$. Setzen wir für die Turbinen mit mittleren Gefällen ($h = 10$ bis 30 Fuß) $\eta = 0{,}65$ und für die mit kleineren Gefällen, wenn dieselben zumal unter Wasser gehen, $\eta = 0{,}60$, so erhalten wir die der Leistung L Pferdekräfte entsprechende Wassermenge, im ersten Falle, $Q = 11{,}94\,\frac{L}{h}$ und im zweiten Falle

$Q = 12{,}95\,\frac{L}{h}$ Cubikfuß.

Bei der in Fig. 410 abgebildeten Fourneyron'schen Turbine mit niedrigem Drucke sinkt das zur Seite, bei W zufließende Wasser in dem Reservoir RR, und durch den Leitschaufelapparat LL bis zum Rade AA, welches durch den Teller BB mit der stehenden Umtriebswelle CD verbunden ist. Letztere trägt mittels des Räderwerkes DEF die Umtriebskraft auf die liegende Welle FG über, und ist von einer Röhre HH umgeben, an welcher der unten durch einen Teller begrenzte Leitschaufelapparat fest sitzt.

Fig. 410.



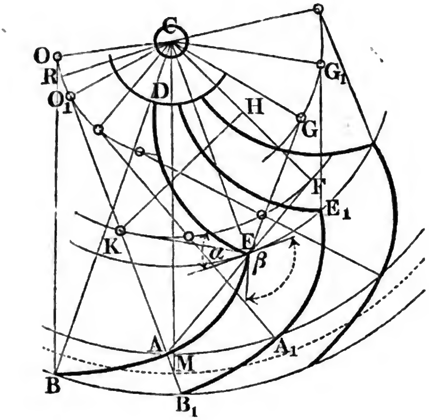
Ist die Turbine eine sogenannte Hochdruckturbine, so muß man das Wasser durch eine Röhre in das oben zu verschließende Reservoir HR einführen. Die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in dieser Röhre soll nur 3 Fuß betragen, wonach dann die entsprechende Geschwindigkeitshöhe $z = 0{,}114$ Fuß, und die nöthige Röhrenweite $d = 7{,}82\sqrt{Q}$ Zoll folgt.

Die Dimensionen und mechanischen Verhältnisse einer Fourneyron'schen Turbine (s. AE, Fig. 411 a. f. S.) sind folgende. Der innere geometrische Radhalbmesser ist $CE = r_1 = 3{,}91\sqrt{Q}$ Zoll und der äußere geometrische Radhalbmesser $CM = r = \nu r_1 = \frac{5}{4}r$ bis $\frac{3}{2}r$. Ferner der Leitschaufelwinkel an der Eintrittsstelle E ist $\alpha = 15$ bis 30 Grad und der Radschaufelwinkel an eben dieser Stelle:
$\beta = 2\alpha + 20$ bis $2\alpha + 30$ Grad zu machen. Die vortheilhafteste innere Radgeschwindigkeit ist durch die Formel

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{\frac{2\,sin.\,\beta\,cos.\,\alpha}{sin.\,(\beta-\alpha)} + 0{,}1\left[\left(\frac{sin.\,\beta}{sin.\,(\beta-\alpha)}\right)^2 + \nu^2\right]}}$$

bestimmt, woraus dann die äußere der Austrittsgeschwindigkeit c_2 gleiche Radgeschwindigkeit

Fig. 411.



$$v = \nu\,v_1 = \frac{r}{r_1}\,v_1,$$

die Umdrehungszahl

$$u = \frac{30\,v}{\pi\,r} = 9{,}55\,\frac{v}{r} = 9{,}55\,\frac{v_1}{r_1}$$

und die Summe von dem Querschnitte der Austrittsöffnungen des Rades, $F_2 = \frac{Q}{v}$ folgt. Ferner ist die Austrittsgeschwindigkeit des Wassers aus dem Leitschaufelapparate: $c = \frac{v_1\,sin.\,\beta}{sin.\,(\alpha-\beta)}$, und hiernach die Summe von den Querschnitten der Austrittsmündungen dieses Apparates: $F = \frac{Q}{c} = \frac{Q\,sin.\,(\alpha-\beta)}{v_1\,sin.\,\beta}$.

Das Verhältniß $\lambda = \frac{e}{d}$ der Höhe e des Rades oder der Ausströmungsöffnungen des Leitschaufelapparates zur Weite d derselben, wird je nach der Größe des Gefälles, $= 2$ bis 5 gemacht und das Schaufelblech ungefähr von der Stärke $s = 0{,}015\,r$ angewendet. Hieraus berechnet sich mittels der Formel

$$e = \frac{F}{2\,\pi\,r_1\,sin.\,\alpha}\left(1 + \frac{2\,\pi\,r\,sin.\,\alpha\,.\,\lambda\,s}{F}\right)$$

die Höhe e des Rades.

Ferner die Anzahl der Leitschaufeln $n_1 = \frac{\lambda\,F}{e^2}$, sowie die der Radschaufeln $n = \frac{sin.\,\beta}{sin.\,\alpha}\;n_1 = \frac{\lambda\,F\,sin.\,\beta}{e^2\,sin.\,\alpha}$.

Endlich ist der Schaufelwinkel δ an der mittleren Austrittsstelle M durch die Formel

$$sin.\,\delta = \frac{F_2 + n\,s\,e}{2\,\pi\,r\,e}$$ zu berechnen.

Auch folgt aus n_1 der Theilwinkel $\varphi_1 = \frac{360^0}{n_1}$ des Leitschaufelapparates, sowie aus n der Theilwinkel $\varphi = \frac{360^0}{n}$ des Rades.

Um die Schaufelbögen zu finden, lege man an $CM = r$, den Winkel $CMR = \delta$ an, fälle von C aus das Perpendikel CR gegen die letzte Linie und schneide sowohl von M als auch von R aus, zu beiden Seiten $MA = MB_1 = RO = RO_1 = r\, sin.\, \delta\, tang. \frac{\varphi}{2}$ ab. Es ist dann AB_1 die geometrische Breite einer Austrittsmündung, ohne Rücksicht auf die Schaufeldicke, und es sind O und O_1 die Mittelpunkte der Schaufelbögen AB und $A_1 B_1$. Ferner lege man die Linie $AF = CE = r_1$ unter dem Winkel $RAF = 180^0 - \beta$ an RA an, ziehe CF und errichte in der Mitte H von CF das Perpendikel HK; der Durchschnitt K desselben mit RA ist der Mittelpunkt des inneren Schaufelbogens AE. Legt man endlich noch den Winkel α an die beiden Endpunkte des Halbmessers CE als CEG und ECG an, so erhält man im Durchschnittspunkte G das Centrum des Leitschaufelbogens DE. Die aus C mit CO, CK und CG beschriebenen Kreise enthalten natürlich auch die Mittelpunkte der Kreisbögen der übrigen Schaufeln.

Bei einer Turbine ohne Leitschaufeln ist $\alpha = 90$ Grad anzusetzen; ferner macht man hier $\beta = 140$ bis 160 Grad, $r_1 = 4{,}78 \sqrt{Q}$ Zoll, und $r = \nu r_1 = 1{,}15 r_1$ bis $1{,}30 r_1$.

Setzt man

$$1 - 0{,}1\, \frac{tang.\, \beta^2}{\nu^2} = \varphi \text{ und } \sqrt{\frac{1{,}1}{1 - \left(\frac{tang.\, \beta}{\nu^2}\right)^2}} = \chi,$$

so erhält man durch die Formel

$$v = \sqrt{\left(\frac{\chi - \sqrt{\chi^2 - \psi}}{\psi \sqrt{\chi^2 - \psi}}\right) g h}$$

die vortheilhafteste Umdrehungsgeschwindigkeit, woraus dann $v_1 = \frac{r_1}{r} v$ und $u = \frac{30\, v}{\pi r} = 9{,}55\, \frac{v}{r}$, sowie $c = - v_1\, tang.\, \beta$ folgt, und sich nun die Summen der Querschnitte der Ausmündungen: $F = \frac{Q}{c}$ und $F_2 = \frac{Q}{c_2} = \frac{Q}{v}$ leicht berechnen lassen. Die Radhöhe ist $e = \frac{F}{2 \pi r_1}$, ferner, wenn $\lambda = \frac{c}{d}$ das Dimensionsverhältniß der Ausflußmün-

dungen des Rades bezeichnet, die Anzahl der Radschaufeln: $n = \frac{\lambda F_2}{e^2}$, und endlich ist für den Austrittswinkel δ:

$$sin. \delta = \frac{F_2 + nse}{2 \pi r e}.$$

Wenn man bei den Leitschaufelturbinen die Radschaufeln nicht bis zum innern Radumfange reichen läßt, oder nur die äußeren Schaufelstücke $AB, A_1 B_1$ einsetzt, so hat man $\beta = 90^0$ in Ansatz zu bringen. Um eine kleinere Umdrehungszahl $u = \frac{30 v}{\pi r}$ zu erhalten, kann man auch den äußeren Radhalbmesser $CM = r$, Fig. 412, beliebig vergrößern und statt der

Fig. 412.

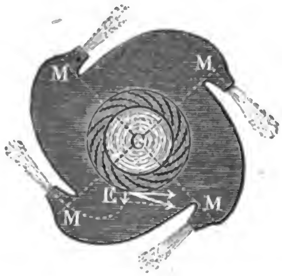
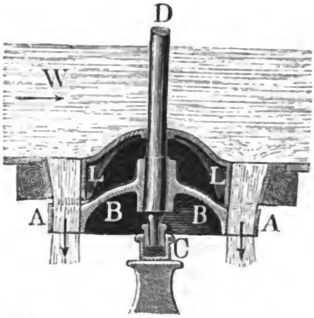


Fig. 413.



Radschaufeln, getrennte Mundstücke M, M ... einsetzen. Es fällt natürlich dann die obige Bestimmung von n ganz weg, auch kann man hier δ = Null machen.

Die Turbinen von Francis mit äußerer Beaufschlagung sind nach denselben Regeln zu construiren wie die Fourneyron'schen Turbinen, nur hat man hier r mit r_1 und v mit v_1 zu vertauschen.

Bei den Turbinen von Henschel u. s. w. bildet der Leitschaufelapparat ein förmliches Rad LL, Fig. 413, nur sind die Schaufeln desselben umgekehrt geneigt, als die Schaufeln des darunter befindlichen Rades AA, welches übrigens auch hier durch einen Teller BB mit der stehenden Welle CD fest verbunden ist. Wird das Rad von einer Röhre umgeben, welche oben luftdicht abschließt und unten unter Wasser ausmündet, so wirkt das Wasser drückend und saugend auf das Rad, und es ist daher auch hier das wirksame Gefälle h vom Ober- bis Unterwasserspiegel zu messen.

Bei diesen Turbinen macht man $\alpha = 15$ bis 25^0, sowie $\beta = 100$ bis 120^0 und bestimmt die vortheilhafteste Radgeschwindigkeit durch die Formel

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{2 sin. \beta cos. \alpha}{sin. (\beta - \alpha)} + 0,1 . \left[1 + \left(\frac{sin. \beta}{sin. (\beta - \alpha)}\right)^2\right]}}.$$

Hieraus folgt die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser in das Rad tritt, $c = \frac{v \sin. \beta}{\sin. (\beta - \alpha)}$, ferner der Querschnitt sämmtlicher Austrittsmündungen des Leitschaufelapparates: $F = \frac{Q}{c}$ und der der Ausflußmündungen des Rades:

$$F_2 = \frac{Q}{c_2} = \frac{Q}{v}.$$

Ist r_1 der innere und r_2 der äußere Radhalbmesser, so hat man den mittleren Radhalbmesser $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$, und die Radweite, in radialer Richtung gemessen: $e = r_2 - r_1$. Gewöhnlich macht man $e = \varrho r = 0{,}4\, r$, wonach dann

$$r_1 = r\,(1 - \tfrac{1}{2}\varrho) = 0{,}8 r \text{ und}$$
$$r_2 = r\,(1 + \tfrac{1}{2}\varrho) = 1{,}2 r \text{ folgt.}$$

Das Verhältniß $\lambda = \frac{e}{d}$ der Länge e zur Weite d der Austrittsmündungen des Leitschaufelapparates ist $= 2$ bis 4 zu setzen und der Radhalbmesser durch die Formel

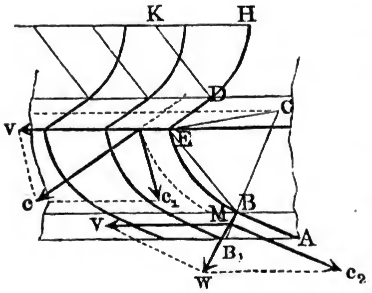
$$r = \sqrt{\frac{F}{2 \pi \varrho \sin. \alpha}} \left(1 + \lambda s \sqrt{\frac{\pi \sin. \alpha}{2 \varrho F}}\right) \text{ zu bestimmen.}$$

Annähernd ist $r = \sqrt{\frac{F}{2 \pi \varrho \sin. \alpha}}$, und die Schaufelstärke $s = 0{,}02\, r = 0{,}02 \sqrt{\frac{F}{2 \pi \varrho \sin. \alpha}}$.

Nun folgt die Radweite $e = \varrho r$, die Anzahl der Leitschaufeln $n_1 = \frac{F}{d e} = \frac{\lambda F}{e^2}$, sowie die der Radschaufeln: $n = \frac{\sin. \beta}{\sin. \alpha} \cdot n_1$ und endlich ist für den Austrittswinkel δ des Rades: $\sin. \delta = \frac{F_2 + n s e}{2 \pi r e}$, und die Umdrehungszahl

$$u = \frac{30\, v}{\pi r} = 9{,}55\, \frac{v}{r}.$$

Fig. 414.

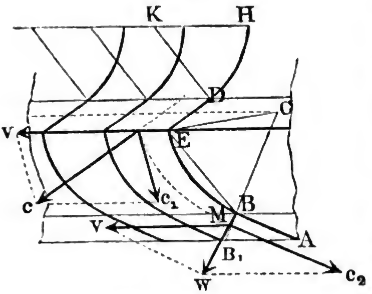


Die Höhe a des Leitschaufelapparates, sowie die des Rades, macht man $= 0{,}5\, r$ bis $0{,}6\, r$.

Die Leit- und Radschaufeln bilden windschiefe Flächen, deren Erzeugungslinie rechtwinkelig auf der Radaxe steht und durch die in Fig. 414 abgewickelten Leitlinien HE und EA geht. Die un=

teren Stücke dieser Linien sind gerade, unter den Winkeln α und δ gegen den Horizont geneigte Linien DE und BA. Die oberen Stücke derselben sind dagegen Kreisbögen DH und BE. Der Mittelpunkt K des Bogenstückes DH einer Leitschaufel ist der Durchschnittspunkt des Perpendikels DK auf dem unteren Schaufelstücke mit der oberen Begrenzungslinie dieses Apparates; um dagegen den Mittelpunkt C des Bogenstückes BE einer Radschaufel zu finden, errichte man BC rechtwinkelig auf AB, mache die Winkel CBE und $BEC = \frac{\beta + \delta}{2}$; der Durchschnitt C zwischen EC und BC ist das gesuchte Centrum.

Fig. 415.



Die Leistungen aller Reactionsturbinen mit Leitschaufelapparat sind durch die Formel

$$L = Pv$$

$$= \left[h - \left(\zeta\left(\frac{sin.\,\beta}{\nu\,sin.\,(\beta - \alpha)}\right)^2 + \zeta_1 + 4\left(sin.\,\frac{\delta}{2}\right)^2\right)\frac{v^2}{2g}\right]Q\gamma$$

bestimmt, in welcher man die Widerstandscoefficienten ζ und ζ_1 für den Leitschaufelapparat und für das Rad $= 0{,}05$ bis $0{,}10$ anzunehmen hat und worin bei den Henschel'schen Turbinen $\nu = 1$ zu setzen ist.

Durch die Schützenstellung wird noch ein neues Hinderniß erzeugt, welches die Leistung der Turbine bis auf jeden beliebigen Grad herabzieht. Ueberdies wird aber die Leistung durch die nach §. 16, Seite 361, zu berechnende Zapfenreibung noch um einige Procent vermindert.

§. 66. Wassersäulenmaschinen. Wassersäulenmaschinen finden vorzüglich bei hohen Gefällen von mindestens 50 Fuß, und bei kleinen oder mäßigen Aufschlagmengen ihre Anwendung; ihr Wirkungsgrad η steigert sich auf 0,70 bis 0,80, ist also größer als bei Hochdruckturbinen. Sie lassen sich nicht allein zur Erzeugung von auf- und nieder- oder hin- und hergehenden, sondern auch zur Hervorrufung von stetig rotirenden Bewegungen anwenden.

Man läßt den Treibkolben einer Wassersäulenmaschine mit einer mittleren Geschwindigkeit v von 1 bis $1\frac{1}{4}$ Fuß, und das Wasser in der Einfallröhre mit der Geschwindigkeit v_1 von 5 bis 6 Fuß sich bewegen; ist daher Q das Aufschlagquantum der Maschine, so hat man sowohl für eine doppeltwirkende als auch für eine zweicylindrig einfachwirkende Wassersäulenmaschine die Weite des Treibcylinders:

$d = \sqrt{\frac{4\,Q}{\pi\,v}} = 1{,}13\sqrt{\frac{Q}{v}}$, also für $v = 1$, $d = 1{,}13\sqrt{Q}$ Fuß, und die der Einfallröhre:

$$d_1 = 0{,}4\,d = 0{,}45\sqrt{\frac{Q}{v}} = 0{,}45\sqrt{Q}\ \text{Fuß};$$

für eine eincylindrige einfachwirkende Maschine dagegen:

$$d = 1{,}60\sqrt{\frac{Q}{v}}\ \text{und}\ d_1 = 0{,}64\sqrt{\frac{Q}{v}}\ \text{Fuß}.$$

Den Kolbenhub s nimmt man $= \frac{5}{2}\,d$ bis $6\,d$; hiernach hat man die Anzahl der vollständigen Kolbenspiele pr. Minute: $n = \frac{30\,v}{s}$, also für $v = 1$, $n = \frac{30}{s}$.

Die Wandstärke der Einfallröhren ist nach der Formel $e = 0{,}0025\,p\,d_1 + 0{,}75$ Zoll, dagegen die des Treibcylinders nach der Formel $e = 0{,}0025\,p\,d + 1{,}25$ Zoll zu berechnen, wobei der Wasserdruck p in Atmosphären und die Weiten d und d_1 in Zollen gegeben sein müssen.

Der hydrostatische Druck auf die Treibkolbenfläche ist bei der senkrechten Höhe h der drückenden Wassersäule: $P = F\,h\,\gamma$ $= 61{,}74\,F\,h$ Pfund, oder, wenn man F in Quadratzoll giebt, $P = \frac{F\,h\,\gamma}{144} = 0{,}4288\,F\,h$ Pfund.

Denselben Druck übt auch das Wasser auf den Boden des Treibcylinders aus, und ist daher auch bei der Feststellung und Unterstützung des letzteren mit zu berücksichtigen. Der Kolbendruck pr. Quadratzoll ist $p = \frac{h\gamma}{144} = 0{,}4288\,h$ Pfund und in Atmosphären: $p = \frac{h}{32{,}84} = 0{,}03045\,h$. In Folge der Kolbenreibung wird diese Kraft noch um $4\,\varphi\,\frac{b}{d}\,P$ vermindert, bleibt also die Umtriebskraft

$$P_1 = \left(1 - 4\,\varphi\,\frac{b}{d}\right)P = \left(1 - 4\,\varphi\,\frac{b}{d}\right)F\,h\,\gamma$$

übrig, oder wenn man den Reibungscoefficienten $\varphi = \frac{1}{4}$ setzt,

$$P_1 = \left(1 - \frac{b}{d}\right)F\,h\,\gamma.$$

Die Breite b des Liderungskranzes ist $0{,}1\,d$ bis $0{,}2\,d$, also im Mittel ist $\frac{b}{d} = 0{,}15$, und daher $P_1 = 0{,}85\,F\,h\,\gamma$ oder, wenn man F in Quadratzollen giebt, $P = 0{,}3645\,F\,h$ Pfd.

Wenn die schmiedeeiserne Kolbenstange die Kolbenkraft nur durch Zug fortpflanzt, so ist der nöthige Durchmesser derselben: $d_3 = 0{,}05\,d\,(\sqrt{p} + 0{,}25)$, und wenn dieselbe, wie z. B. bei doppeltwirkenden Maschinen, abwechselnd durch Druck und Zug wirkt, so soll sie die Stärke $d_3 = 0{,}08\,d\,(\sqrt{p} + 0{,}25)$ Zoll erhalten, wobei p den Kolbendruck in Atmosphären angiebt. Gußeiserne Kolbenstangen

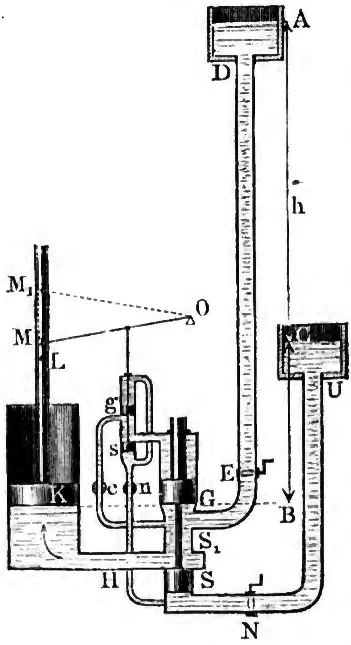
macht man 1,7, stählerne 0,6 und hölzerne dreimal so dick als schmiedeeiserne. Die innere Steuerung der Wassersäulenmaschinen besteht gewöhnlich aus **Kolben**, jedoch wendet man in neueren Zeiten auch **Ventile** und **Schieber** hierzu an. Wegen der Incompressibilität des Wassers kann der Steuerkolben u. s. w. nicht ohne Weiteres unmittelbar von der Treibkolbenstange in Bewegung gesetzt werden, weil während der Umsteuerung der Treibkolben eine kurze Zeit lang sowohl von der Einfall- als auch von der Austrageröhre abgesperrt wird. Um die erforderliche mittelbare Umsteuerung zu erlangen, läßt man den Steuerkolben entweder

1) durch ein fallendes Gewicht bewegen, welches von der Treibkolbenstange emporgehoben wird, oder setzt ihn

2) durch eine besondere kleine Hülfsmaschine in Bewegung, welche von der Treibkolbenstange der Hauptmaschine direct bewegt wird; oder

3) man setzt zwar die Steuerung unmittelbar durch die Kraftmaschine oder Treibkolbenstange in Bewegung; verbindet aber die nach dem Treibcylinder führende Communicationsröhre mittels besonderer durch belastete Ventile verschlossener Kanäle so mit der Einfall- und mit der Austrageröhre, daß im Augenblicke des Absperrens, bei der Fortbewegung des Treibkolbens, ein Mal Wasser aus der zweiten Röhre angesaugt und das andere Mal Wasser in die erste Röhre zurückgedrängt wird.

Fig. 416.



Die wesentliche Einrichtung einer einfach wirkenden Wassersäulenmaschine mit Kolbensteuerung und Hülfsmaschine ist in Fig. 416 dargestellt. Das in der Einfallröhre DE zufließende Wasser wird durch das Communicationsrohr H in den Treibcylinder geführt und drückt hier den Treibkolben K empor. Der Letztere hebt gegen Ende des Hubes mittels des Bolzens L den um O drehbaren Hebel MO sammt den daran hängenden Kolben s und g empor, welche die Steuerung des Treibkolbens G der Hülfsmaschine bilden. Am Ende des Treibkolben-

hubes steigt die Kolbenverbindung SG empor, weil nun der Raum über G nicht mehr mit der Einfallröhre DE, sondern mit der Austrageröhre NU in Verbindung gesetzt ist. Während dann der Steuerkolben in S_1 steht, geht der belastete Treibkolben K nieder und drückt das von ihm verdrängte Wasser durch die Austrageröhre NU in den Abflußkasten CU. Gegen Ende des Kolbenniederganges drückt ein anderer auf der Kolbenstange sitzende Bolzen den Steuerhebel $M_1 O$ sammt der Kolbenverbindung gs wieder nieder; es geht in Folge dessen auch das Kolbensystem GS wieder in die erste Lage zurück und beginnt so ein neues Spiel der Maschine. Um sowohl den Auf- und Niedergang des Treibkolbens als auch den des Steuerkolbensystems GS und den Gang der Steuerung überhaupt zu reguliren, sind noch vier Regulirungshähne oder Ventile bei E, N, e und n angebracht.

Die theoretische Leistung einer einfachwirkenden Wassersäulenmaschine ist folgende:

$$L = \left[h - \left(4\,\varphi\,\frac{b}{d}\,(h_1 + h_2) + \left(\frac{\varkappa_1}{\nu_1^2 d_1^4} + \frac{\varkappa_2}{\nu_2^2 d_2^4}\right)\frac{1}{2g}\left(\frac{4\,Q}{\pi}\right)^2\right)\right] Q\gamma,$$ wobei bezeichnet:

h das nutzbare Gefälle AC, h_1 die Tiefe AB des mittleren Kolbenstandes unter dem Oberwasserspiegel, $h_2 = h_1 - h$ die Tiefe BC desselben unter dem Unterwasserspiegel, d den Durchmesser des Treibkolbens K, d_1 die Weite der Einfall- und d_2 die der Austrageröhre, ferner b die Breite des Liderungskranzes von K, $\varphi = 0{,}25$, den Reibungscoefficienten desselben, $\varkappa_1 = 20$ bis 40, den Widerstandscoefficienten, für die Einfallröhre und $\varkappa_2 = 10$ bis 15, den für die Austrageröhre, endlich ν_1 das Verhältniß $\frac{t_1}{t}$ der Aufgangszeit t_1 und $\nu_2 = \frac{t_2}{t}$ das der Niedergangszeit t_2 zur ganzen Zeit t eines Spieles. Im vortheilhaftesten Gange ist $\frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt[3]{\frac{\varkappa_1 d_2^4}{\varkappa_2 d_1^4}}$.

Die Höhe a_1 des Steuerkolbens S macht man gleich der dreifachen Höhe a des rectangulären Communicationsrohres und den Hub s_1 desselben $= a + a_1 = 4a$. Gewöhnlich giebt man den Einfall-, Austrage- und Communicationsröhren einerlei Querschnitt, macht hiernach $a = \frac{\pi d_1^2}{4d}$ und folglich $s_1 = \frac{\pi d_1^2}{d}$.

Damit sich je nach dem Stande der Hülfssteuerkolben g, s das Hauptsteuerkolbensystem GS in Folge des Wasserdruckes auf- oder abwärts bewege, muß den Gleichungen:

1) $d_2^2 - d_3^2 = 8\,\varphi\,b_1\,(d_1 + d_2 + d_3)$ und

2) $d_2^2 - 2\,d_1^2 + \left(\frac{h_1 + h_2}{h}\right)d_3^2 = \frac{8\,R}{\pi h \gamma}$ Genüge ge-

schehen, in welchen d_1 den Durchmesser des Steuerkolbens S, d_2 den des Gegenkolbens G, d_3 den seiner Kolbenstange, R das Gewicht der Kolbenverbindung GS, b_1 die Breite der Liderungskränze von S und G, und φ den Reibungscoefficienten bezeichnet.

Man macht aber der Sicherheit wegen d_2 noch etwas größer und d_3 etwas kleiner, und nimmt die überflüssige Kraft beim Auf- oder Niedergang des Steuerkolbens durch Regulirungshähne weg, regulirt also den Auf- und Niedergang des Steuerkolbens eben so wie den des Treibekolbens.

Das Steuerwasserquantum ist pr. Spiel

$V_1 = \frac{\pi (d_2^2 - d_3^2) s_1}{4}$, daher pr. Secunde:

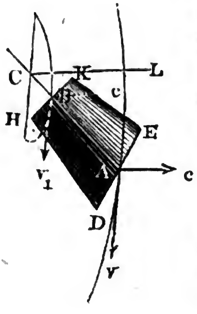
$$Q_1 = \frac{n}{60} \frac{\pi (d_2^2 - d_3^2) s_1}{4} \text{ und } \frac{Q_1}{Q} = \frac{(d_2^2 - d_3^2) s_1}{d^2 s}.$$

Um bei einem veränderlichen Kraftbedürfniß in jedem Augenblicke eine Umtriebskraft zur Verfügung zu haben, wendet man auch Wassersäulenmaschinen an, welche aus einem sogenannten Accumulator gespeist werden. Derselbe besteht in einem großen Cylinder, welcher von oben durch einen stark belasteten Kolben abgesperrt ist, und unten mit einer durch eine Dampfmaschine bewegte Pumpe in Verbindung steht, wodurch das nöthige Kraftwasser zugedrückt wird.

Um eine stetige Rotationsbewegung zu erhalten, wendet man eine zweicylindrige Wassersäulenmaschine mit doppeltwirkenden Kolben an und läßt dieselben, mittels zweier um einen Quadranten von einander abstehender Kurbelmechanismen, auf eine gemeinschaftliche Schwungradwelle wirken.

§. 67. Windräder und Windmühlen. Die günstigste Windgeschwindigkeit für Windmühlen ist 20 bis 25 Fuß. Für gewöhnliche Windräder mit einer beinahe horizontal liegenden und dem Windstrome entgegengerichteten Axe kann man bei der Windgeschwindigkeit c, der Umfangsgeschwindigkeit $v = \frac{5}{2} c$, Flügelanzahl n und Flügelfläche $= F$ Quadratfuß, die Leistung setzen:

Fig. 417.



$$L = 0{,}0005\, n F c^3 \text{ Fußpfund.}$$

Es wächst also dieselbe mit der Summe der Flügelflächen und mit dem Cubus der Windgeschwindigkeit. Die Länge $CA = l$, Fig. 417, einer Windruthe, von Wellmittel C bis äußerste Spitze A gemessen, mißt 20 bis 35 Fuß; die Länge $AB = l_1$, der Flügelfläche ist $\frac{5}{6} l$ bis $\frac{6}{7} l$; ferner die mittlere Breite b derselben $\frac{1}{3} l$ bis $\frac{1}{5} l$, also 4 bis 10 Fuß, die Anzahl der Flügel beträgt in der Regel 4,

seltener 5 bis 6; die Neigung der Flügelwelle gegen den Horizont, 5 bis 15 Grad. Für ein Rad mit 4 Flügeln von der mittleren Länge $l_1 = 25$ Fuß und Breite $b = 6$ Fuß ist hiernach $nF = 4 \,.\, 25 \,.\, 6 = 600$ Quadratfuß und die Leistung $L = 0{,}3 \,.\, c^3$, also bei 20 Fuß Windgeschwindigkeit, $L = 2400$ Fußpfund $= 4{,}7$ Pferdekräfte.

Die Flügelfläche $DEHK$ erhält, wenn sie eben ist, eine Neigung DAv oder HBv_1 von 12^0 bis 18^0 gegen ihre Umdrehungsebene, so daß der Wind unter einem Winkel EAc oder KBc von 78 bis 72 Grad stößt. Die Leistung fällt circa noch 15 Procent größer aus, wenn man die Flügelfläche windschief macht, ihre äußerste Sprosse ungefähr nur 6^0, ihre mittlere 10^0 und ihre innerste 23^0 von der Umdrehungsebene abweichen läßt.

Theoretisch ist die Kraft, mit welcher der Wind bei der Geschwindigkeit c und Dichtigkeit γ (0,0825 Pfund) ein mit der Geschwindigkeit v ausweichendes und unter dem Stoßwinkel α ihm entgegengestelltes Flügelelement normal stößt:

$$N = \frac{3(c\,sin.\,\alpha - v\,cos.\,\alpha)^2}{2g} F\gamma,$$

und es sind die rechtwinkeligen Componenten desselben:

die Axenkraft $R = N\,sin.\,\alpha$ und

die Umdrehungskraft $P = N\,cos.\,\alpha$.

Das entsprechende Arbeitsquantum ist:

$$L = Pv = 3 \,.\, \frac{(c\,sin.\,\alpha - v\,cos.\,\alpha)^2}{2g} v\,cos.\,\alpha\,F\gamma$$

$$= 0{,}00396\,Fv\,(c\,sin.\,\alpha - v\,cos.\,\alpha)^2 cos.\,\alpha \text{ Fßpfd.},$$

und fällt am größten aus bei dem Stoßwinkel α, welcher durch die Gleichung

$$tang.\,\alpha = \frac{3v}{2c} + \sqrt{\left(\frac{3v}{2c}\right)^2 + 2}$$

bestimmt ist.

Da v, und nach Befinden auch α, für verschiedene Flügelelemente verschieden ist, so hat man sich bei Bestimmung der ganzen Flügelleistung der Simpson'schen Regel zu bedienen.

Die Reibung an dem 9 bis 18 Zoll starken Wellenhalse vermindert diese Leistung noch um 15 bis 30 Procent. Ist G das Gewicht des ganzen Rades und r der Halshalbmesser, so hat man diesen Arbeitsverlust:

$$L_1 = \varphi\,G\,\frac{r}{l}\,v.$$

Drittes Kapitel.

Die Wärme und die Mechanik der Dampfmaschinen.

§. 68. Thermometerscalen. Die Temperatur wird durch die Thermometer von Fahrenheit, Celsius und Réaumur angegeben. Der Fundamentalabstand, d. i. der Abstand zwischen dem Frost- und Siedepunkte des Wassers wird bei dem ersten in 180, beim zweiten, nach der sogenannten Centesimaleintheilung, in 100, und bei der dritten in 80 gleiche Theile oder Grade eingetheilt. Der Nullpunkt ist bei der Fahrenheit'schen Scala 32 unter dem Frostpunkte, und fällt bei der Centesimal- und bei der Réaumur'schen Eintheilung mit diesem zusammen. Es finden hiernach folgende Beziehungen Statt:

F.	*C.*	*R.*
t	$\frac{5}{9}(t - 32^0)$	$\frac{4}{9}(t - 32^0)$
$\frac{9}{5}t + 32^0$	t	$\frac{4}{5}t$
$\frac{9}{4}t + 32^0$	$\frac{5}{4}t$	t

F bedeutet Fahrenheit'sche, *C* Centesimal- und *R* Réaumur'sche Grade.

In folgender Tabelle ist die Centesimalscala durch Grade der beiden andern Scalen ausgedrückt.

C.	*R.*	*F.*	*C.*	*R.*	*F.*	*C.*	*R.*	*F.*
150	120,0	302,0	140	112,0	284,0	130	104,0	266,0
149	119,2	300,2	139	111,2	282,2	129	103,2	264,2
148	118,4	298,4	138	110,4	280,4	128	102,4	262,4
147	117,6	296,6	137	109,6	278,6	127	101,6	260,6
146	116,8	294,8	136	108,8	276,8	126	100,8	258,8
145	116,0	293,0	135	108,0	275,0	125	100,0	257,0
144	115,2	291,2	134	107,2	273,2	124	99,2	255,2
143	114,4	289,4	133	106,4	271,4	123	98,4	253,4
142	113,6	287,6	132	105,6	269,6	122	97,6	251,6
141	112,8	285,8	131	104,8	267,8	121	96,8	249,8

C.	R.	F.	C.	R.	F.	C.	R.	F.
120	96,0	248,0	80	64,0	176,0	40	32,0	104,0
119	95,2	246,2	79	63,2	174,2	39	31,2	102,2
118	94,4	244,4	78	62,4	172,4	38	30,4	100,4
117	93,6	242,6	77	61,6	170,6	37	29,6	98,6
116	92,8	240,8	76	60,8	168,8	36	28,8	96,8
115	92,0	239,0	75	60,0	167,0	35	28,0	95,0
114	91,2	237,2	74	59,2	165,2	34	27,2	93,2
113	90,4	235,4	73	58,4	163,4	33	26,4	91,4
112	89,6	233,6	72	57,6	161,6	32	25,6	89,6
111	88,8	231,8	71	56,8	159,8	31	24,8	87,8
110	88,0	230,0	70	56,0	158,0	30	24,0	86,0
109	87,2	228,2	69	55,2	156,2	29	23,2	84,2
108	86,4	226,4	68	54,4	154,4	28	22,4	82,4
107	85,6	224,6	67	53,6	152,6	27	21,6	80,6
106	84,8	222,8	66	52,8	150,8	26	20,8	78,8
105	84,0	221,0	65	52,0	149,0	25	20,0	77,0
104	83,2	219,2	64	51,2	147,2	24	19,2	75,2
103	82,4	217,4	63	50,4	145,4	23	18,4	73,4
102	81,6	215,6	62	49,6	143,6	22	17,6	71,6
101	80,8	213,8	61	48,8	141,8	21	16,8	69,8
100	80,0	212,0	60	48,0	140,0	20	16,0	68,0
99	79,2	210,2	59	47,2	138,2	19	15,2	66,2
98	78,4	208,4	58	46,4	136,4	18	14,4	64,4
97	77,6	206,6	57	45,6	134,6	17	13,6	62,6
96	76,8	204,8	56	44,8	132,8	16	12,8	60,8
95	76,0	203,0	55	44,0	131,0	15	12,0	59,0
94	75,2	201,2	54	43,2	129,2	14	11,2	57,2
93	74,4	199,4	53	42,4	127,4	13	10,4	55,4
92	73,6	197,6	52	41,6	125,6	12	9,6	53,6
91	72,8	195,8	51	40,8	123,8	11	8,8	51,8
90	72,0	194,0	50	40,0	122,0	10	8,0	50,0
89	71,2	192,2	49	39,2	120,2	9	7,2	48,2
88	70,4	190,4	48	38,4	118,4	8	6,4	46,4
87	69,6	188,6	47	37,6	116,6	7	5,6	44,6
86	68,8	186,8	46	36,8	114,8	6	4,8	42,8
85	68,0	185,0	45	36,0	113,0	5	4,0	41,0
84	67,2	183,2	44	35,2	111,2	4	3,2	39,2
83	66,4	181,4	43	34,4	109,4	3	2,4	37,4
82	65,6	179,6	42	33,6	107,6	2	1,6	35,6
81	64,8	177,8	41	32,8	105,8	1	0,8	33,8

C.	R.	F.	C.	R.	F.	C.	R.	F.
0	0,0	32,0	—10	— 8,0	14,0	—20	—16,0	— 4,0
—1	—0,8	30,2	—11	— 8,8	12,2	—21	—16,8	— 5,8
—2	—1,6	28,4	—12	— 9,6	10,4	—22	—17,6	— 7,6
—3	—2,4	26,6	—13	—10,4	8,6	—23	—18,4	— 9,4
—4	—3,2	24,8	—14	—11,2	6,8	—24	—19,2	—11,2
—5	—4,0	23,0	—15	—12,0	5,0	—25	—20,0	—13,0
—6	—4,8	21,2	—16	—12,8	3,2	—26	—20,8	—14,8
—7	—5,6	19,4	—17	—13,6	1,4	—27	—21,6	—16,6
—8	—6,4	17,6	—18	—14,4	—0,4	—28	—22,4	—18,4
—9	—7,2	15,8	—19	—15,2	—2,2	—29	—23,2	—20,2

In der Folge kommen nur Centesimalgrade vor.

§. 69. Ausdehnung durch die Wärme. Ist δ der Coefficient der Längenausdehnung eines Körpers, d. i. nimmt eine Einheit seiner Länge bei Zunahme seiner Temperatur um δ zu, und ist l die Länge des Körpers bei der Temperatur 0, so hat man dieselbe bei den Temperaturen t_1 und t_2:

$l_1 = (1 + \delta t_1)\, l$, und $l_2 = (1 + \delta t_2)\, l$, daher auch

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t_2}.$$

Hiernach läßt sich die Länge l_1 eines Körpers von einer Temperatur t_1 auf eine andere Temperatur t_2 reduciren. Es ist nämlich:

$$l_2 = \left(\frac{1 + \delta t_2}{1 + \delta t_1}\right) l_1, \text{ annähernd } = [1 + \delta\,(t_2 - t_1)]\, l_1.$$

Bei den amorphen oder nicht krystallisirten Körpern ist der Coefficient der Flächenausdehnung doppelt und der der Volumenausdehnung dreimal so groß als der der Längenausdehnung; man hat also für die Inhalte F_1 und F_2 der Querschnitte eines und desselben Körpers bei den Temperaturen t_1 und t_2:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{1 + 2\,\delta t_1}{1 + 2\,\delta t_2},$$

und für die Volumen V_1 und V_2:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1 + 3\,\delta t_1}{1 + 3\,\delta t_2}.$$

Bei Anwendung der letzteren Formel auf Gase ist eine constante Pressung vorauszusetzen. Siehe §. 36, Seite 426.

Diese Formeln finden auch ihre Anwendung bei den Metall- und Luftthermometern und Pyrometern, wo man aus der Größe der Ausdehnung auf die Temperatur schließt.

Tabelle
der Ausdehnungen der Körper bei der Wärmezunahme von 0 bis 100 Grad C.

Körper.	Volumenausdehnung (300 δ).	Flächenausdehnung (200 δ).	Längenausdehnung (100 δ).	Reciproke der letzteren.
Glas . . .	0,002584	0,001723	0,000861	1161
Platin . . .	0,002652	0,001768	0,000884	1131
Stahl:				
ungehärtet .	0,003236	0,002158	0,001079	927
gehärtet . .	0,003719	0,002479	0,001240	807
Gußeisen . .	0,003327	0,002218	0,001109	901
Stabeisen . .	0,003546	0,002364	0,001182	846
Gold . . .	0,004398	0,002932	0,001466	682
Kupfer . . .	0,005155	0,003436	0,001718	582
Messing . .	0,005603	0,003735	0,001868	535
Zinn . . .	0,006699	0,004466	0,002233	448
Silber . . .	0,005729	0,003819	0,001910	524
Blei	0,008545	0,005697	0,002848	351
Zink	0,008825	0,005883	0,002942	340
Quecksilber .	0,018018	0,012012	0,006006	55,5 . 3
Wasser . . .	0,042102	0,028068	0,014034	23,8 . 3
Luft	0,3665	0,2443	0,1222	2,727 . 3

Die Ausdehnungskraft der Wärme ist $P = \delta t . F E$, wenn F den Querschnitt, E den Elasticitätsmodul des Körpers und t die entsprechende Temperaturerhöhung bezeichnet. Die Elasticitäts- und Festigkeitsmodel der Metalle nehmen bei höheren Temperaturen ab, im Mittel ist bei $t = 200$ Grad, E ungefähr $\frac{1}{6} E$ kleiner, ferner für $t = 550$ Grad, bei Schmiedeeisen statt K, $K_1 = 0,43\, K$, und bei Kupfer statt K, $K_1 = 0,32\, K$ zu setzen.

Die **scheinbare** oder **relative Ausdehnung** ist die Differenz der Ausdehnungen zweier Körper. Z. B. die scheinbare Raumausdehnung des Quecksilbers in einer Glasröhre bei der Temperaturerhöhung von 0 auf 100°:

$$= 0,018018 - 0,002584 = 0,015434;$$

ebenso die absolute Längenausdehnung eines **Rostpendels**, welches aus Stangen von den Längen l_1 und l_2 mit den Ausdehnungscoefficienten δ_1 und δ_2 zusammengesetzt ist:

$$\lambda = (\delta_1 l_1 - \delta_2 l_2)\, t, \text{ also} = \text{Null, für}$$

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\delta_2}{\delta_1},$$ z. B. wenn dasselbe aus Eisen- und Messingstäben besteht:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{1868}{1182} = 1{,}58.$$

Die Ausdehnung des Wassers ist bei verschiedenen Temperaturen sehr verschieden; bei 3,9 Grad ist die Dichtigkeit desselben ein Maximum. Folgende Tabelle giebt die Dichtigkeitszustände des Wassers bei anderen Temperaturen an.

Tabelle
der Dichtigkeit des Wassers bei verschiedenen Temperaturen.

Temperatur.	Dichtigkeit.	Volumen.	Temperatur.	Dichtigkeit.	Volumen.
0°	1,00000	1,00000	50°	0,98856	1,01157
4	1,00011	0,99989	60	0,98387	1,01640
10	0,99986	1,00014	70	0,97855	1,02192
20	0,99841	1,00159	80	0,97270	1,02807
30	0,99580	1,00422	90	0,96638	1,03479
40	0,99256	1,00750	100	0,95968	1,04102

§. 70. Schmelz- und Siedepunkte. Bei einer durch den sogenannten Schmelz- oder Gefrierpunkt angegebenen Temperatur gehen feste Körper in flüssige, oder umgekehrt, flüssige in feste über. Hierbei treten in der Regel auch ansehnliche Dichtigkeitsveränderungen ein; so z. B. nimmt das Wasser beim Gefrieren um $^1/_{14}$ seines Volumens zu, so daß Eis vom specifischen Gewichte 0,92 entsteht. Auch Eisen, Wismuth u. s. w. dehnen sich beim Festwerden etwas aus, Quecksilber, Silber, Blei, Zink u. s. w. ziehen sich hingegen zusammen. Für die Technik ist besonders das Schwinden der Metalle nach dem Gusse von Wichtigkeit. Dieses ist bedingt durch das Ausdehnen oder Zusammenziehen beim Erstarren und durch das Zusammenziehen beim Erkalten. Folgendes sind die vorzüglichen

Schwindmaaße nach der Seitenlänge.

Für Gußeisen, $= {}^1/_{96} =$ 0,0104.
» Messing, $= {}^1/_{65} =$ 0,0154.
» Glockenmetall (100 Kupfer + 18 Zinn), $= {}^1/_{63} =$ 0,0159.
» Kanonenmetall (100 Kupfer + $12^1/_2$ Zinn), $= {}^1/_{134} =$ 0,0075.
» Zink, $= {}^1/_{62} =$ 0,0161.
» Blei, $= {}^1/_{92} =$ 0,0109.
» Zinn, $= {}^1/_{147} =$ 0,0068.
» Wismuth, $= {}^1/_{265} =$ 0,0038.

Die Schwindmaaße nach der Fläche sind doppelt und die nach dem Volumen dreimal so groß, als die nach der Seite.

Das **Schwinden** des frischen Holzes beim Austrocknen und das **Quellen** oder **Anschwellen** des letzteren beim Anschwängern mit Wasser ist für die Technik nicht minder beachtenswerth. Die Länge in der Richtung der Holzfasern bleibt hierbei fast unverändert. Es ist anzunehmen, daß im Mittel das Laubholz in der Richtung des Spiegels um 3 und in der der Jahresringe um 6 Procent, also im Ganzen um 9, das Nadelholz aber in der ersten Richtung um 2 und in der zweiten um 4, also im Ganzen um 6 Procent schwindet oder anschwillt.

Die **Schmelzpunkte** oder die Temperaturen, bei welchen feste Körper flüssig werden, enthält folgende Tabelle.

Substanz.	Schmelzgrad.	Substanz.	Schmelzgrad.
Platin . . .	2500° C.	Blei	320° C.
Schmiedeeisen .	1500 bis 1600	Wismuth	260
Stahl . . .	1300 bis 1400	Zinn	230
Gußeisen, graues	1200	Legirung:	
„ weißes	1050	1 Zinn + 3 Blei	289
Gold . . .	1100 bis 1250	1 „ + 1 „	241
Silber . . .	1000	3 „ + 1 Wismuth . . .	200
Bronze . . .	900	3 „ + 1 Blei	186
Antimon . .	450	2 „ + 1 Wismuth . .	167,7
Zink	360	3 „ + 1 Blei	167,7
Schwefel . .	109	1 „ + 1 Wismuth . .	141,2
Gelbes Wachs	61	4 „ + 1 Blei + 5 Wismuth	118,9
Phosphor . .	43	3 „ + 2 „ + 5 „	100
Seife . . .	33	3 „ + 5 „ + 8 „	100
Eis	0,0	1 „ + 1 „ + 4 „	94
Terpentinöl .	—10	Kupferschlacken	1345
Quecksilber .	—39	Puddelschlacken	1430

Das **Wedgwood'sche** Pyrometer, womit man noch oft die Schmelzgrade angiebt, fängt bei $1077\frac{1}{2} F$ mit Null an, und jeder der 240 Grade von W wird $= 130^0 F$ gesetzt. Hiernach ist z. B. $24^0 W = 1077\frac{1}{2} + 24 \, . \, 130 = 1077\frac{1}{2} + 3120 = 4197\frac{1}{2} F$ und $1000^0 C = 1832 F = \frac{1832 - 1077{,}5}{130} W = 5^0{,}8 W$. Nach **Guyton-Morveau** ist der Nullpunkt von W bei $510 F$, und ein Grad $W = 61{,}2^0 F$; daher $1000^0 C = \frac{1832 - 510}{61{,}2} = 21^0{,}6 W$.

Das **Sieden** oder der Uebergang einer Flüssigkeit in Dampf hängt von der Temperatur und dem Drucke zugleich ab. Ist dieser gleich dem Drucke einer Atmosphäre, so hat man folgende **Siedepunkte:**

für Quecksilber . . = 360° C.,
» Leinöl . . . = 316°,
» Schwefelsäure . = 310°,
» Schwefel . . = 299°,
» Phosphor . . = 290°,

für Wasser . . . = 100° C.,
» Alkohol (v. spec. Gewicht 0,813) = 78°,6,
» Schwefeläther . = 37°,8,
» salpetrige Säure = 28°,
» schweflige Säure = —10°.

Die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft = 1 gesetzt, hat man die des Quecksilberdampfes = 6,976,
des Alkoholdampfes . = 1,613,
des Wasserdampfes . = $^5/_8$ = 0,625.

§. 71. Specifische Wärme. Wärmeeinheit (calorie) wird derjenige Wärmeaufwand genannt, durch welchen 1 Pfund Wasser 1 Grad Temperaturerhöhung erleidet. Um Q Pfund Wasser um t Grad wärmer zu machen, ist das Wärmequantum $W = Q\,t$ cal. nöthig, und Q Pfund einer andern Substanz erfordern zu ihrer Temperaturerhöhung von t^0 $W = \omega\, Q\, t$, wenn der Coefficient ω die specifische Wärme dieser Substanz ausdrückt.

1) Tabelle der specifischen Wärmen fester und flüssiger Körper.

Körper.	Spec. Wärme.	Körper.	Spec. Wärme.	Körper.	Spec. Wärme.
Alkohol (absol.)	0,7000	Kohle . .	0,2411	Schwefelsäure	0,3350
Antimon . . .	0,0508	Coaks . .	0,2031	Silber . .	0,0570
Blei . . .	0,0314	Kupfer .	0,0952	Stahl . .	0,1184
Eichenholz . .	0,5700	Marmor .	0,2099	Wasser . .	1,0000
Eisen	0,1138	Messing .	0,0939	Wismuth .	0,0308
Glas	0,1777	Platin . .	0,0324	Ziegelstein .	0,2150
Gold	0,0324	Quecksilber	0,0333	Zink . . .	0,0956
Gußeisen . . .	0,1298	Schwefel .	0,2026	Zinn . . .	0,0562

Bei hohen Temperaturen fallen diese Zahlen etwas größer aus.

2) Tabelle der specifischen Wärme von Gasen und Dämpfen.

Körper.	Specifische Wärme		
	für Luft = 1	für Wasser = 1	
	bei gleichem Druck.	bei gleichem Volumen.	bei gleichem Druck.
Aetherdampf	2,0235	0,3411	0,4810
Alkoholdampf	1,8986	0,3200	0,4513
Atmosphärische Luft . . .	1,0000	0,1686	0,2370
Kohlenoxydgas . . .	1,0793	0,1758	0,2479
Kohlensaures Gas . .	0,9104	0,1535	0,2164
Sauerstoffgas	0,9180	0,1548	0,2182
Stickstoffgas	1,0265	0,1730	0,2440
Wasserdampf	1,9794	0,3337	0,4750
Wasserstoffgas	14,3231	2,4146	3,4046

Das Verhältniß der specifischen Wärme der Luft bei constantem Druck zu der bei constantem Volumen ist erfahrungsmäßig: $\varkappa$ = 1,41 zu setzen.

Die latente Wärme des Wassers bei 0⁰, ist 79 Cal.
» » » » gesättigten Wasserdampfes bei 100⁰, = 540 Cal.
» » » » Alkoholdampfes bei 79⁰, = 219 Cal.
» » » » Schwefeläthers bei 38⁰, = 97 Cal.

Nach Regnault ist die specifische Wärme des gesättigten Wasserdampfes durch die Formel

$$\omega_1 = 1 + 0{,}00002\,t + 0{,}0000003\,t^2,$$

ferner die latente Wärme durch die Formel
$\omega_2 = 606{,}5 - 0{,}695\,t - 0{,}00002\,t^2 - 0{,}0000003\,t^3$, und die Gesammtwärme: $\omega = \omega_2 + \omega_1 t = 606{,}5 + 0{,}305\,t$ Cal.

Hiernach ist folgende Tabelle berechnet worden:

Temperatur des gesättigten Wasserdampfes.	Gesammte Wärmemenge.	Latente Wärmemenge.	Temperatur des gesättigten Wasserdampfes.	Gesammte Wärmemenge.	Latente Wärmemenge.
0⁰	606,5	606,5	110⁰	640,0	529,4
10	609,5	599,5	120	643,1	522,3
20	612,6	592,6	130	646,1	515,1
30	615,7	585,7	140	649,2	508,0
40	618,7	578,7	150	652,2	500,7
50	621,7	571,6	160	655,3	493,6
60	624,8	564,7	170	658,3	486,2
70	627,8	557,6	180	661,4	479,0
80	630,9	550,6	190	664,4	471,6
90	633,9	543,5	200	667,5	464,3
100	637,0	536,5	210	670,5	456,8

§. 72. Bewegung der Wärme. Die Abkühlung eines Körpers oder der Ausfluß seiner Wärme erfolgt theils durch Ausstrahlung, theils durch Fortleitung, und ist jedenfalls der Abkühlungsfläche proportional. Die Abkühlungsgeschwindigkeit wird durch die ausfließende Wärmemenge pr. Flächen- und in der Zeiteinheit gemessen; ist daher die Abkühlungsfläche F, so hat man das in der Zeiteinheit ausfließende Wärmequantum $W = W_1 + W_2 = Fv$. Die ausstrahlende Wärmemenge läßt sich $W_1 = \mu_1 a^t (a^\theta - 1) F$ setzen, wo die constante Grundzahl $a = 1{,}0077$ ist, t die Temperatur der Umgebung, t_1 die des abkühlenden Körpers, $\theta = t_1 - t$ die Temperaturdifferenz und μ_1 einen von der Natur der Abkühlungsfläche abhängigen Ausflußcoefficienten bezeichnet. Die durch unmittelbare Berührung fortgeleitete Wärmemenge ist:
$W_2 = \mu_2 \theta^{1,233} F = \mu_2 \theta \theta^{0,233} F$, wo μ_2 einen von der Form des abkühlenden Körpers abhängigen Ausflußcoefficienten bezeichnet. Die Potenzen $1{,}0077^t$, $1{,}0077^\theta$ und $\theta^{0,233}$ lassen sich mittels der folgenden Tabelle leicht bestimmen.

Temperatur θ Grad	Potenz $1{,}0077^{\theta}$	Potenz $\theta^{0.233}$	Temperatur θ Grad	Potenz $1{,}0077^{\theta}$	Potenz $\theta^{0.233}$
10	1,080	1,710	110	2,325	2,990
20	1,165	2,010	120	2,510	3,051
30	1,259	2,209	130	2,711	3,108
40	1,359	2,362	140	2,927	3,163
50	1,467	2,488	150	3,160	3,214
60	1,584	2,596	160	3,412	3,263
70	1,711	2,691	170	3,684	3,309
80	1,847	2,776	180	3,978	3,353
90	1,994	2,853	190	4,295	3,396
100	2,153	2,924	200	4,637	3,437

Wenn man die Abkühlungsfläche F in Quadratfuß angiebt, und die Stunde als Zeiteinheit annimmt, so hat man für μ_1 folgende Werthe einzuführen:

Gußeisen, neu	77,9	Polirtes Silber	8,19
Gußeisen, oxydirt	82,6	Versilbertes Papier	10,32
Eisenblech, polirt	11,1	Glas	71,5
Verbleites Eisenblech	15,9	Bausteine und Holz	88,5
Ordinäres Eisenblech	68,1	Pulverisirte Körper	86,0
Oxydirtes Eisenblech	82,6	Kienruß	98,5
Kupfer	3,93	Oelfarbenanstrich	91,2
Zink	5,90	Wollen- und Seidenstoffe	90,4
Zinn	5,28	Wasser	130,5
Polirtes Messing	6,34	Oel	177,9

Der Ausflußcoefficient der Wärmeleitung ist für ein kugelförmiges Gefäß von r Zoll Halbmesser:

$$\mu_2 = 0{,}1934 \left(1 + \frac{2{,}796}{r}\right)$$

ferner für ein liegendes cylindrisches Gefäß von r Zoll Halbmesser

$$\mu_2 = 0{,}2238 \left(1 + \frac{0{,}7097}{r}\right),$$

dagegen für einen stehenden Cylinder vom Halbmesser r und der Höhe h Zoll:

$$\mu_2 = 0{,}1918 \left(1 + \frac{0{,}2938}{r}\right)\left(1 + \frac{2{,}229}{h}\right).$$

Endlich ist für eine verticale ebene Abkühlungsfläche von der Höhe h Zoll:

$$\mu_2 = 0{,}1918 \left(1 + \frac{2{,}229}{\sqrt{h}}\right) \text{ Wärmeeinheiten.}$$

Wenn z. B. ein horizontal liegender Blechkessel von 30 Zoll Durchmesser und 180 Zoll Länge, Luft von 150 Grad Wärme enthält, während die Umgebung eine Wärme von 20 Grad hat, so ist unter der Voraussetzung, daß diese Temperaturen auf eine constante Höhe erhalten werden, $a^t = a^{20} = 1{,}165$,

$a' - 1 = a^{130} - 1 = 1{,}711;\ \theta^{0{,}233} = 130^{0{,}233} = 3{,}108,$
$\mu_1 = 68{,}1$, und $\mu_2 = 0{,}2238\left(1 + \frac{0{,}7097}{15}\right) = 0{,}2344,$
daher die effective Abkühlungsgeschwindigkeit

$$v = 68{,}1 . 1{,}165 . 1{,}711 + 0{,}2344 . 130 . 3{,}108$$
$$= 135{,}7 + 94{,}7 = 230{,}4 \text{ Fuß}.$$

Wenn von der Oberfläche 127,6 Quadratfuß dieses Kessels die Hälfte, also $F = 63{,}8$ Quadratfuß der Abkühlung ausgesetzt ist, so folgt hiernach der stündliche Verlust an Wärme desselben in Folge der Abkühlung:

$$W = Fv = 63{,}8 . 230{,}4 = 14700 \text{ Wärmeeinheiten}.$$

Das Wärmeabsorptionsvermögen der Körper ist das Vermögen, strahlende Wärme aufzunehmen, und verhält sich genau wie das Ausstrahlungsvermögen; das Reflexionsvermögen der Wärme ist dagegen das Complement des Ausstrahlungsvermögens.

§. 73. **Die Wasserdämpfe.** Die Expansivkraft p des gesättigten Wasserdampfes hängt von der Temperatur desselben ab, und läßt sich durch verschiedene empirische Formeln aus dieser berechnen. Für Spannungen von 1 bis 4 Atmosphären hat man einfach:

$$p = \left(\frac{75 + t}{175}\right)^6 \text{ Atmosphären}$$
$$= \left(\frac{75 + t}{112{,}59}\right)^6 \text{ Pfund auf den Quadratzoll;}$$

umgekehrt, im ersten Falle:

$$t = 175 \sqrt[6]{p} - 75^0, \text{ im zweiten:}$$
$$t = 112{,}59 \sqrt[6]{p} - 75^0.$$

Für Spannungen über 4 Atmosphären gilt die Formel:

$$p = \left(\frac{39{,}8 + t}{139{,}8}\right)^5 \text{ Atmosphären}$$
$$= \left(\frac{39{,}8 + t}{82{,}35}\right)^5 \text{ Pfund auf den Quadratzoll;}$$

umgekehrt, im ersten Falle:

$$t = 139{,}8 \sqrt[5]{p} - 39^0{,}8, \text{ im zweiten:}$$
$$t = 82{,}35 \sqrt[5]{p} - 39^0{,}8.$$

Die Spannung des überhitzten oder ungesättigten Dampfes folgt dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze (S. 426), wonach

$$\frac{p}{p_1} = \frac{1 + 0{,}00367t}{1 + 0{,}00367t_1}\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{1 + 0{,}00367t}{1 + 0{,}00367t_1} . \frac{V_1}{V} \text{ ist.}$$

Das specifische Dampfvolumen oder das Verhältniß des Dampfvolumens V zu dem gleich schweren Wasservolumen V_1 läßt sich bei gesättigtem Dampfe nach Fairbairn's Versuchen: $\mu = \frac{V}{V_1} = 25{,}62 + \frac{1659{,}2}{p + 0{,}024127}$ setzen, wobei die Dampfspannung p in Atmosphären auszudrücken ist. Die

Dichtigkeit des gesättigten Dampfes ist hiernach $\gamma = \frac{61,74}{\mu}$ Pfd. zu setzen; für **überhitzten Dampf** ist dagegen

$$\gamma = \frac{0,05129\, p}{1 + 0,00367\, t} \text{ Pfund.}$$

Folgende Tabelle enthält die Temperaturen, specifischen Dampfvolumina und Dichtigkeiten des **gesättigten Wasserdampfes** bei den Spannungen von 0,01 bis 10 Atmosphären.

Tabelle

über die Spannung und Dichtigkeit des gesättigten Wasserdampfes.

Dampfspannung			Temperatur des Dampfes in Centesimalgraden.	Specifisches Dampfvolumen.	Dichtigkeit, oder Gewicht von 1 Cubikfuß Dampf in Neupfund.
in Atmosphären.	Höhe der Quecksilbersäule in Zollen.	Druck pr. Quadratzoll in Neupfd.			
0,01	0,29	0,141	7,1	48644	0,00127
0,05	1,45	0,705	33,3	22409	0,00276
0,1	2,90	1,41	46,2	13393	0,00461
0,2	5,80	2,82	60,4	7428	0,00831
0,3	8,70	4,23	69,5	5145	0,01200
0,4	11,60	5,64	76,2	3938	0,01568
0,5	14,5	7,05	81,7	3191	0,01935
0,6	17,4	8,46	86,3	2684	0,02300
0,7	20,3	9,87	90,3	2317	0,02665
0,8	23,2	11,28	93,9	2039	0,03028
0,9	26,1	12,69	97,1	1821	0,03390
1,0	29,0	14,10	100,0	1645,7	0,03752
1,1	31,9	15,51	102,7	1501,6	0,04111
1,2	34,8	16,92	105,2	1381,1	0,04470
1,3	37,7	18,33	107,5	1278,7	0,04828
1,4	40,6	19,74	109,7	1190,7	0,05185
1,5	43,5	21,15	111,7	1114,2	0,05541
1,6	46,4	22,56	113,7	1047,2	0,05896
1,7	49,3	23,97	115,5	987,9	0,06250
1,8	52,2	25,38	117,3	935,2	0,06602
1,9	55,1	26,79	119,0	887,9	0,06953
2,0	58,0	28,20	120,6	845,3	0,07304
2,2	63,8	31,02	123,6	771,6	0,08001
2,4	69,6	33,84	126,5	710,1	0,08694
2,6	75,4	36,66	129,1	657,9	0,09384
2,8	81,2	39,48	131,6	613,1	0,1007
3,0	87,0	42,30	133,9	574,3	0,1075
3,2	92,8	45,12	136,1	540,2	0,1143
3,4	98,6	47,94	138,2	510,2	0,1210
3,6	104,4	50,76	140,2	483,4	0,1277
3,8	110,2	53,58	142,1	459,5	0,1344
4,0	116,0	56,40	144,0	437,9	0,1410
4,2	121,8	59,22	145,8	418,4	0,1476
4,4	127,6	62,04	147,5	400,7	0,1541
4,6	133,4	64,86	149,1	384,4	0,1606
4,8	139,2	67,68	150,7	369,6	0,1670
5,0	145,0	70,50	152,2	355,9	0,1735
5,5	159,5	77,55	155,9	326,0	0,1894
6,0	174,0	84,60	159,2	301,0	0,2051
6,5	188,5	91,65	162,4	280,0	0,2205
7,0	203,0	98,70	165,3	261,8	0,2358
7,5	217,5	105,75	168,2	246,1	0,2509
8,0	232,0	112,80	170,8	232,4	0,2657
8,5	246,5	119,85	173,3	220,3	0,2803
9,0	261,0	126,90	175,8	209,5	0,2947
9,5	275,5	133,95	178,1	199,8	0,3090
10,0	290,0	141,00	180,3	191,1	0,3230

§. 74. Brennstoffe. Die Wärmemengen, welche verschiedene Brennstoffe bei ihrer Verbrennung liefern, nebst den hierzu nöthigen Luft- und den sich hieraus bildenden Gasmengen sind in folgender Tabelle aufgezeichnet. Von den hier angeführten Wärmemengen können aber mittels eines Brennheerdes nur 55 bis 65 Procent zu Gute gemacht werden, worauf bei Berechnung einer Anlage stets Rücksicht zu nehmen ist.

Tabelle

über die Erwärmungskraft u. s. w. verschiedener Brennstoffe.

Brennstoffe.	Wärmemenge w von 1 Pfd. Brennstoff.	Kalte Luft zum Verbrennen von 1 Pfd. Brennstoff.	Aus der Verbrennung hervorgehende Gasmenge, reducirt	
			auf 0°.	auf 300°.
	Calories	Cubikfuß	Cubikfuß	Cubikfuß
Holz, trocken	4000	152	163	343
Holz mit 0,30 Wasser .	3000	106	120	252
Holzkohle	7000	247	247	519
Lohkuchen, trocken . .	3400	147	158	331
Lohkuchen, m. 0,20 Wasser	2400	102	116	244
Torf, trocken mit 0,05 Asche	5300	184	194	408
Torf, mit 0,30 Wasser .	3700	129	142	298
Torfkohle, mit 0,20 Asche	6400	230	230	483
Mittlere Steinkohle . .	8000	270	279	587
Koaks, mit 0,02 Asche .	7900	281	281	591
Koaks, mit 0,15 Asche .	6800	244	244	531

Kennt man die Brennstoffmenge K Pfund, welche auf einem Brennheerde verbrannt wird, so erhält man durch Multiplication derselben mit einem Werthe in der ersten Columne die erzeugte Wärmemenge $W = wK$, durch Multiplication mit dem entsprechenden Werthe der zweiten Columne die nöthige kalte Luft, und durch Multiplication mit dem angehörigen Werthe aus der letzten Columne, die durch den Schornstein abzuführende Gasmenge.

Bezeichnet $\gamma = 61,74$ Pfund die Dichtigkeit des Wassers und μ das specifische Dampfvolumen, so ist das Gewicht von dem Dampfvolumen V, $G = \frac{V\gamma}{\mu}$; bezeichnet ferner ω die Gesammtwärme, welche zur Erzeugung von 1 Pfund Dampf nöthig ist, so hat man die dem Dampfvolumen entsprechende Wärmemenge $W = \omega G = \omega \, . \, \frac{V\gamma}{\mu}$.

Ist t die Temperatur des Dampfes und t_1 die des Wassers, woraus derselbe erzeugt wird, so hat man

$$\omega = 606,5 + 0,305\,t - t_1.$$

Endlich hat man $wK = \omega G$, daher

$$K = \frac{\omega}{w} G = \frac{\omega}{w} \cdot \frac{V\gamma}{\mu}, \text{ sowie}$$

$$G = \frac{w}{\omega} K, \text{ und } V = \frac{\mu}{\gamma} G = \frac{\mu}{\gamma} \cdot \frac{w}{\omega} K.$$

Im Mittel läßt sich setzen: $\omega = 540 - t_1$, oder $t_1 = 10$ angenommen, $\omega = 530$, und nimmt man an, daß bei Verbrennung von 1 Pfund Kohlenstoff, $w = 7500$ Wärmeeinheiten erzeugt werden, so erhält man

$$G = \frac{7500}{530} K = 14{,}15 K, \text{ sowie}$$

$$K = 0{,}07067\, G = 0{,}07067 \frac{V\gamma}{\mu}.$$

Es werden also hiernach durch Verbrennung von 1 Pfund Kohlenstoff 14,15 Pfund Wasser in Dampf verwandelt.

Wegen des Verlustes der mit der Verbrennungsluft, sowie der durch Abkühlung abströmenden Wärme u. s. w. ist aber die effective Verdampfungskraft einer Kesselanlage im Mittel nur $^2/_3$ von der theoretischen Verdampfungskraft und daher auch das bei Verbrennung von 1 Pfund Kohlenstoff zu erlangende Dampfquantum $= {^2/_3} \,.\, 14{,}15 = 9{,}43$ Pfund.

Für die zur Dampferzeugung dienenden Steinkohlen sind folgende Mittelwerthe in Anwendung zu bringen.

Steinkohlen.	Gewicht roher Steinkohle pr. Tonne, zu je 4 Scheffel.	Wassergehalt in Proc. der rohen Kohle.	Unverbrennliche Rückstände in Proc. der rohen Kohle.	Effective Verdampfungskraft; Dampfmenge pr. Pfd. roher Kohle.
nordamerikanische	361,0 Pfd.	1,39	10,3	8,27 Pfd.
englische . . .	391,5 »	3,37	7,8	7,82 »
preußische . . .	349,2 »	3,00	4,8	8,28 »
sächsische . .	367,6 »	10,83	25,5	8,20 »

Uebrigens ist das Raumverhältniß der dichten zu der zerstückelten Steinkohlenmasse $= 0{,}50$ bis $0{,}80$, und war im Mittel $= 0{,}55$.

Nach den Ermittelungen des Herrn E. Hartig giebt ein Pfund roher Steinkohle $= \frac{8{,}2\,[100 - (a + b)] - a}{100}$ Pfund Dampf, wenn die Kohlenmasse a Procent unverbrennliche Substanz und b Procent hygroscopisches Wasser enthält; auch läßt sich annehmen, daß in den Verbrennungsrückständen im Mittel noch 3 bis 4 Procent brennbare Substanz zurückbleibt.

Noch lassen sich folgende Mittelwerthe annehmen.

Name des Brennstoffs.	Gewicht des Brennstoffs.	Wassergehalt.	Heizkraft beim angegebenen Wassergehalt	
			von 1 Pfd.	von 1 Klftr.
Nadelholz	1 Klftr. = 108 Cbfß. = 2600 Pfd.	15 Proc.	4,0	10400
Laubholz .	1 „ = 3000 „	15 „	3,7	11100
				von 1000 St.
Torf . .	1000 Stück = 1800 „	25 „	3,64	6552
Braunkohle	1 Scheffel = 290 „	30 „	3,95	1150

Bei den gewöhnlichen Dampfkesselanlagen rechnet man

auf	1	Pfund	Steinkohle	5 bis	7	Pfund	Dampf,
»	1	»	Koaks	5 »	6	»	»
»	1	»	Holz	2,5 »	2,75	»	»
»	1	»	Holzkohle	5,5 »	6,5	»	»

§. 75. Dampfkessel. Die Größe eines Dampfkessels wird vorzüglich durch die Größe der Heiz- oder Erwärmungsfläche S bestimmt. Man kann bei gewöhnlichen Dampfkesseln sicher auf jeden Quadratfuß Heizfläche 3,75 Pfund Dampf oder 0,0606 Cubikfuß = $104\frac{3}{4}$ Cubikzoll Speisewasser rechnen. Ist also $Q\gamma$ das stündlich durch einen Kessel zu erzeugende Dampfquantum, so hat man die erforderliche Heizfläche desselben:

$$S = \frac{Q\gamma}{3,75} = \frac{4}{15}\, Q\gamma = 0,267\, Q\gamma \text{ Quadratfuß.}$$

Gewöhnlich findet man die Heizfläche pr. Pfund Dampf:

bei gewöhnlichen Kesseln, = 0,20 bis 0,30 Quadratfuß,
» Cornwall-Kesseln, = 0,90 » 0,95 »
» Dampfschiffkesseln, = 0,133 » 0,154 » und
» Dampfwagenkesseln, = 0,04 » 0,065 »

Nicht selten rechnet man auch bei Kesseln:

für Hochdruckdampfmaschinen ohne Condensation 13 Quadratfß.,
für solche mit Condensation . . . . 10 »
und für Tiefdruckmaschinen . . . . 14 »
Heizfläche pr. Pferdekraft.

Den Dampfraum gewöhnlicher Dampfkessel macht man im Mittel 0,4 und den Wasserraum 0,6 des ganzen Kesselraumes, übrigens sorgt man dafür, daß das Wasser im Kessel noch 4 Zoll über der Heizfläche außerhalb des Kessels stehe.

Sind b, h und l die mittlere Breite, Höhe und Länge eines Kofferkessels, so hat man für die Heizfläche desselben: $S = bl + 1,2\,(b + l)\,h$; nimmt man nun, wie gewöhnlich, $b = \frac{3}{4}h$ und $l = \frac{5}{2}h$ (bis $3h$) an, so erhält man:

$$h = 0,416\,\sqrt{S},$$
$$b = 0,314\,\sqrt{S} \text{ und}$$
$$l = 1,040\,\sqrt{S}.$$

Für einen Walzenkessel vom Halbmesser r, der Länge l seines cylindrischen Theiles und der Höhe h von jedem seiner Endsegmente ist

$$S = 3{,}458\, r l + 1{,}2\, \pi r^2 \left[1 + \left(\frac{h}{r}\right)^2\right] \text{ zu setzen;}$$

nimmt man für l den Mittelwerth $10r$ an, so erhält man einfach:

$$S = 38{,}35 \left[1 + 0{,}1 \left(\frac{h}{r}\right)^2\right] r^2 \text{ und}$$

$$r = 0{,}1615 \left[1 - 0{,}05 \left(\frac{h}{r}\right)^2\right] \sqrt{S}.$$

Für Walzenkessel mit n Sieberöhren hat man, wenn r, r_1, l und l_1 die Halbmesser und Längen des Kessels und der Sieberöhren bezeichnen:

$$S = \pi r l + 2 n \pi r_1 l_1,$$

daher, wenn man wie gewöhnlich $l = l_1 = 5d$, $d_1 = 0{,}4d$ und $n = 2$ annimmt:

$$d = 0{,}2212 \sqrt{S},\ d_1 = 0{,}08848 \sqrt{S} \text{ und}$$
$$l = l_1 = 1{,}106 \sqrt{S}.$$

Wegen der unvollkommenen Mittheilung der Wärme von oben nach unten bringt man bei solchen Röhren, welche ringsum von der Feuerluft umgeben sind, nur $^2/_3$ bis $^5/_6$ der ganzen Oberfläche als Heizfläche in Rechnung. Bei Berücksichtigung dieser Reduction läßt sich die letzte Formel sowohl auf Kessel mit innerer Heizung oder Feuerröhren, als auch auf Kessel mit Vorwärmer und Sieberöhren anwenden.

Beispiel. Ein Dampfkessel, welcher stündlich 6000 Cubikfuß Dampf von 4 Atmosphären Spannung erzeugen soll, erfordert, da 1 Cubikfuß Dampf von dieser Spannung 0,141 Pfd. wiegt, eine Heizfläche von $\frac{6000 \cdot 0{,}141}{3{,}75} = 226$ Quadratfuß. Macht man das cylindrische Mittelstück desselben 5mal so lang als weit, und giebt man den Endstücken die Halbkugelform, so ist die erforderliche Weite desselben:

$d = 2r = 0{,}323\ (1 - 0{,}05) \sqrt{226} = 4{,}6$ Fuß
$= 55{,}2$ Zoll, sowie seine ganze Länge
$l = 10r + 2r = 6d = 27{,}6$ Fuß $= 331{,}2$ Zoll.

Die Wandstärke e der gewöhnlichen Dampfkessel aus Eisenblech ist nach der Formel

$$e = (2{,}7183^{0{,}003p} - 1)\frac{d}{2} + 0{,}1 \text{ Zoll}$$

oder annähernd, und meist genügend scharf, nach
$e = 0{,}0015\, p d + 0{,}1$ Zoll zu berechnen, wobei die Kesselweite d in Zollen und der Dampfüberdruck p in Atmosphären zu geben ist.

Folgende Tabelle giebt die Wandstärke der Eisenblechkessel für die gewöhnlichsten Fälle unmittelbar an.

1) Tabelle der Wandstärken der Blechkesseln.

d in Zollen.	Wandstärke e in Zollen, bei folgenden Werthen von p							
	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	5 Atmosphären.
4	0,106	0,109	0,112	0,115	0,118	0,121	0,124	0,130
6	0,109	0,114	0,118	0,123	0,127	0,132	0,136	0,145
8	0,112	0,119	0,124	0,130	0,136	0,142	0,148	0,161
10	0,116	0,123	0,130	0,138	0,146	0,153	0,160	0,176
12	0,118	0,128	0,136	0,146	0,154	0,164	0,172	0,190
15	0,123	0,135	0,145	0,157	0,168	0,180	0,191	0,213
18	0,127	0,141	0,154	0,168	0,181	0,195	0,209	0,236
21	0,132	0,148	0,163	0,180	0,195	0,211	0,227	0,259
24	0,136	0,155	0,172	0,191	0,208	0,227	0,245	0,281
27	0,141	0,162	0,181	0,203	0,222	0,243	0,263	0,304
30	0,145	0,169	0,190	0,214	0,236	0,259	0,281	0,327
33	0,150	0,176	0,199	0,225	0,249	0,275	0,299	0,349
36	0,154	0,183	0,208	0,237	0,263	0,291	0,317	0,372
39	0,159	0,190	0,217	0,248	0,276	0,307	0,335	0,395
42	0,163	0,197	0,226	0,260	0,290	0,323	0,354	0,417
45	0,168	0,204	0,235	0,271	0,303	0,339	0,372	0,440
48	0,172	0,210	0,244	0,282	0,317	0,354	0,390	0,463
51	0,177	0,217	0,253	0,294	0,331	0,370	0,408	0,485
54	0,181	0,224	0,262	0,305	0,344	0,386	0,427	0,508
57	0,186	0,231	0,272	0,317	0,358	0,402	0,445	0,531
60	0,190	0,238	0,281	0,328	0,371	0,418	0,463	0,553
66	0,199	0,252	0,299	0,350	0,398	0,450	0,499	0,599
72	0,208	0,263	0,317	0,371	0,425	0,481	0,534	0,644
78	0,217	0,276	0,334	0,393	0,454	0,511	0,571	0,688
84	0,226	0,289	0,353	0,415	0,482	0,543	0,607	0,734

Die Wandstärke gußeiserner Siede- und Vorwärmeröhren ist nach der Formel

$$e = (2{,}7183^{0{,}01\,p} - 1)\frac{d}{2} + \tfrac{1}{3} \text{ Zoll, annähernd}$$

$$e = 0{,}005\,p\,d + \tfrac{1}{3} \text{ Zoll zu berechnen.}$$

Die Tabelle auf folgender Seite giebt die Wandstärken gußeiserner Röhren und Cylinder unmittelbar an.

Gewöhnlich macht man die Wände der Eisenblechkessel nicht über $\frac{1}{2}$ Zoll dick, und wendet deshalb in solchen Fällen, wo eine größere Dicke erforderlich wäre, mehrere Kessel an. In der Regel sollen gußeiserne Siederöhren nach dem preußischen Dampfkessel-Regulativ nicht über 18 Zoll weit angewendet werden.

Für Blechkesselwände, welche nach einer Ellipse oder einer anderen Curve gekrümmt sind, muß man für d das Doppelte des größten Krümmungshalbmessers einführen. Doppelt gekrümmte Kesselwände, z. B. die sphärischen Endflächen eines gewöhnlichen cylindrischen Kessels können ebenfalls nach den obigen Formeln berechnet werden, wenn man den größten und

2) Tabelle der Wandstärken gußeiserner Röhren.

d in Zollen.	Wandstärke e in Zollen, bei folgenden Werthen von p							
	1	$1^1/_2$	2	$2^1/_2$	3	$3^1/_2$	4	5 Atmosphären.
4	0,353	0,364	0,374	0,384	0,394	0,404	0,415	0,436
6	0,361	0,379	0,394	0,409	0,425	0,440	0,456	0,487
8	0,374	0,394	0,414	0,434	0,455	0,476	0,497	0,538
10	0,384	0,409	0,434	0,460	0,486	0,511	0,537	0,590
12	0,394	0,424	0,455	0,485	0,516	0,547	0,578	0,641
15	0,409	0,447	0,485	0,523	0,562	0,600	0,639	0,718
18	0,424	0,469	0,515	0,561	0,607	0,654	0,701	0,795
21	0,438	0,491	0,545	0,598	0,652	0,706	0,761	0,871
24	0,453	0,514	0,575	0,636	0,698	0,760	0,822	0,948
27	0,468	0,537	0,605	0,674	0,744	0,813	0,883	1,025
30	0,483	0,559	0,635	0,712	0,789	0,867	0,945	1,102
33	0,498	0,582	0,666	0,750	0,835	0,920	0,985	1,153
36	0,513	0,605	0,696	0,788	0,881	0,974	1,067	1,255
39	0,528	0,627	0,726	0,826	0,926	1,027	1,127	1,332
42	0,544	0,650	0,757	0,864	0,972	1,080	1,188	1,409
45	0,559	0,672	0,787	0,902	1,018	1,134	1,250	1,486
48	0,574	0,695	0,817	0,940	1,064	1,187	1,311	1,563
51	0,589	0,717	0,848	0,977	1,109	1,240	1,373	1,640
54	0,604	0,740	0,878	1,016	1,155	1,294	1,434	1,717
57	0,619	0,763	0,908	1,053	1,201	1,347	1,495	1,794
60	0,634	0,786	0,939	1,092	1,246	1,401	1,557	1,871
66	0,664	0,831	0,999	1,167	1,337	1,508	1,679	2,025
72	0,694	0,876	1,060	1,244	1,428	1,614	1,801	2,178
78	0,724	0,921	1,120	1,320	1,520	1,721	1,924	2,332
84	0,755	0,967	1,181	1,395	1,612	1,828	2,026	2,460

kleinsten Krümmungshalbmesser r und r_1 an der entsprechenden Stelle kennt, und statt $\frac{d}{2}$, $\frac{r\, r_1}{r + r_1}$ einführt.

Die Dicke ebener Kesselwände ist nach der Formel

$$e = 0{,}0387\, l \sqrt{\frac{l^2 b^2}{l^2 + b^2}\, p} + 0{,}1 \text{ Zoll}$$

zu berechnen, worin l die größte Länge und b die größte Breite der Wand bezeichnet. Sind je zwei ebene Wände durch Stehbolzen mit einander verbunden, welche um a Zoll von einander abstehen, so kann man die Wandstärke

$$e = 0{,}0387\, a \sqrt{p} + 0{,}1 \text{ Zoll},$$

und die Dicke eines Stehbolzens:

$$d = 0{,}069\, a \sqrt{p} + 0{,}125 \text{ Zoll annehmen.}$$

Die Wanddicke der Heiz- oder Feuerröhren, welche dem äußeren Drucke ausgesetzt sind, soll bei einem möglichst genau kreisförmigen Querschnitt, nach französischen Vorschriften, doppelt so groß sein, als die der Röhren und Kessel von derselben Weite, welche denselben Druck von innen auszuhalten haben.

Den neuesten Versuchen von Fairbairn zu Folge ist für diese Röhren annähernd:

$$e = 0{,}00123 \sqrt{l d p} \text{ Zoll}$$

zu setzen, wenn l die Länge, sowie d die Weite derselben bezeichnet.

Nach dem preußischen Dampfkessel-Regulativ ist für solche Feuerröhren von Eisenblech:

$$e = 0{,}0067\, d \sqrt[3]{p} + 0{,}05 \text{ Zoll},$$

und für solche von Messing:

$$e = 0{,}010\, d \sqrt[3]{p} + 0{,}07 \text{ Zoll zu setzen.}$$

Nach diesen Formeln sind folgende Tabellen berechnet worden.

3) Tabelle der Wandstärken der Feuerröhren aus Eisenblech.

Röhrenweite d in Zollen.	Wandstärke e in Zollen bei folgenden Ueberdrücken von außen							
	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	5 Atmosphären.
2	0,063	0,065	0,067	0,068	0,069	0,070	0,071	0,073
3	0,070	0,073	0,075	0,077	0,079	0,080	0,082	0,084
4	0,077	0,081	0,084	0,086	0,089	0,091	0,093	0,096
6	0,090	0,096	0,101	0,105	0,108	0,111	0,114	0,119
8	0,104	0,111	0,118	0,123	0,127	0,132	0,135	0,142
9	0,110	0,119	0,126	0,132	0,137	0,142	0,146	0,153
10	0,117	0,127	0,134	0,141	0,147	0,152	0,156	0,165
12	0,130	0,142	0,151	0,159	0,166	0,172	0,178	0,187
16	0,157	0,173	0,185	0,196	0,205	0,213	0,220	0,233
20	0,184	0,204	0,219	0,232	0,243	0,254	0,263	0,279
24	0,211	0,235	0,253	0,277	0,282	0,294	0,305	0,325
30	0,251	0,280	0,303	0,323	0,340	0,355	0,369	0,394
36	0,291	0,326	0,354	0,377	0,398	0,416	0,433	0,462
42	0,331	0,372	0,405	0,431	0,456	0,477	0,497	0,531
48	0,372	0,418	0,455	0,485	0,514	0,538	0,561	0,600

4) Tabelle der Wandstärken der Feuerröhren aus Messingblech.

Röhrenweite d in Zollen.	Wandstärke e in Zollen bei folgenden Ueberdrücken von außen.							
	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	5 Atmosphären.
1	0,080	0,081	0,083	0,084	0,084	0,085	0,086	0,087
$1\frac{1}{2}$	0,085	0,087	0,089	0,091	0,092	0,093	0,094	0,096
2	0,090	0,093	0,095	0,097	0,099	0,100	0,102	0,104
$2\frac{1}{2}$	0,095	0,099	0,101	0,104	0,106	0,108	0,110	0,113
3	0,100	0,104	0,108	0,111	0,113	0,116	0,118	0,121
$3\frac{1}{2}$	0,105	0,110	0,114	0,118	0,120	0,123	0,126	0,130
4	0,110	0,116	0,120	0,124	0,128	0,131	0,133	0,138

Aus der Wandstärke e der Kessel folgt dann noch die Stärke eines Nietbolzens: $d_0 = 2e$, der Durchmesser des halbkugelförmigen Setzkopfes: $d_1 = 3e$, der des kegelförmigen Schließkopfes: $d_2 = 4e$, die Höhe desselben: $h_2 = \frac{3}{2}e$, die Länge des zur Bildung des letzteren nöthigen Bolzenstückes $l_2 = 2e$, ferner ist der Abstand zwischen den Axen zweier Bolzen: $a = 5e$ und der Abstand einer Bolzenaxe vom Blechrande: $a_1 = 3e$.

Bei einer Winkelverbindung giebt man dem Winkelblech die Breite $b = 4{,}5\,e + 1$ Zoll, und die mittlere Dicke $= e$, die Randdicke $= \frac{6}{7}e$ und die Dicke am Bug $\frac{8}{7}e$. Jeder Dampfkessel ist vor seinem Gebrauche bei einem hydrostatischen Drucke zu prüfen, welcher dem künftig auszuhaltenden Dampfdruck um die Hälfte übertrifft.

Beispiel. Ein gewöhnlicher Dampfkessel aus Eisenblech von 54 Zoll Durchmesser, erhält bei $4\frac{1}{2}$ Atmosphären inneren Ueberdruck nach Tabelle 1. die Wandstärke

$e = \frac{0{,}427 + 0{,}508}{2} = 0{,}4675$ Zoll, und erfordert zu seiner Zusammensetzung Nietbolzen von $2e = 0{,}935$ Zoll Dicke.

Zur Garnitur eines Dampfkessels gehört:

1. das Speiserohr; 2. das Dampfrohr; 3. das Ablaßrohr; 4. der Wasserstandsmesser; 5. das Manometer oder der Dampfdruckmesser; 6. die Sicherheitsventile und 7. das Mannloch.

Die Weite des Dampfrohrs ist $\frac{1}{5}$ der Weite des Dampfcylinders, die des Speiserohrs aber nach der Größe des Dampfdruckes $p = 1\frac{1}{3}$ bis 5 Atmosphären: $\frac{1}{20}$ bis $\frac{1}{10}$ dieser Weite. Der Kessel erhält vom Roste aus ungefähr $\frac{1}{100}$ Neigung, und das am tiefsten Ende angebrachte Ablaßrohr ungefähr die Weite von $\frac{1}{15}$ des Kesseldurchmessers. Als Wasserstandsmesser dient sowohl der Schwimmer als auch das Wasserstandsglas. Der Schwimmerstein ist gewöhnlich 1 Fuß lang und breit und hat bei $\frac{2}{3}$ Fuß Höhe ein Gewicht von 100 Pfund; die gläserne Wasserstandsröhre ist 8 Zoll lang und $\frac{1}{2}$ Zoll weit und steht durch $\frac{3}{8}$ Zoll weite Eisenröhren am oberen Ende mit dem Dampf-, sowie am unteren Ende mit dem Wasserraume des Kessels in Verbindung. Das Manometer ist gewöhnlich mit einer Scala versehen, welche den Dampfüberdruck in Atmosphären oder Pfunden pr. Quadratzoll oder Zollen Quecksilber unmittelbar angiebt. Die offenen Quecksilbermanometer sind die sichersten.

Die Größe der freien Oeffnung der Sicherheitsventile eines Dampfkessels wächst mit der Größe der Heizfläche des Kessels, und nimmt ab, wenn der Dampfdruck ein größerer wird. Folgende Tabelle giebt nach preußischen Vorschriften die auf jeden Quadratfuß Heizfläche des Kessels zu rechnende Oeffnung des Sicherheitsventils an.

Größe der Ventilöffnung bei dem Dampfdruck von													
0 bis ½	½ bis 1	1 bis 1½	1½ bis 2	2 bis 2½	2½ bis 3	3 bis 3½	3½ bis 4	4 bis 4½	4½ bis 5	5 bis 5½	5½ bis 6	Atmosphären
10,0	7,0	5,3	4,3	3,6	3,2	2,8	2,5	2,2	2,0	1,85	1,7	□Linie freie Oeffn.
0,069	0,048	0,036	0,029	0,025	0,022	0,019	0,017	0,015	0,014	0,013	0,012	□Zoll freie Oeffn.

Vorschriftsmäßig sind mindestens zwei Sicherheitsventile anzubringen.

Die Breite der ringförmigen Berührungsfläche des platt aufzulegenden Ventiles soll nur $\frac{1}{2}$ bis 1 Linie betragen.

Ist p der Ueberschuß des Dampfdruckes über den äußern Atmosphärendruck, sowie r der Halbmesser der Ventilfläche, bis Mitte der Berührungsfläche gemessen, so hat man die directe Belastung des Ventiles mit Einschluß des Ventilgewichtes

$$P = 14{,}1\,\pi r^2\, p = 44{,}3\, r^2 p.$$

Wirkt das Ventil an einem Hebelarme d, das Laufgewicht G an einem Arme b und ist das statische Moment des leeren Ventiles $= Qs$, so hat man: $G = \frac{Pd - Qs}{b}$.

Das elliptische Mannloch des Dampfkessels ist 14 bis 16 Zoll lang und 12 bis 13 Zoll weit, und der Dampfdom, in welchen man das Speiserohr, Dampfrohr, die Röhren der Sicherheitsventile u. s. w. einmünden läßt, erhält eine Höhe von 2 bis 3 Fuß.

§. 76. Dampfkesselfeuerung. Die Rostfläche eines stationären Dampfkessels beträgt $\frac{1}{16}$ bis $\frac{1}{24}$ der ganzen Heizfläche oder 0,06 bis 0,09 Quadratfuß pr. Pfund stündlich zu verbrennendes Brennmaterial; bei Dampfwagenkesseln, wo ein künstlicher Luftzug statthat, ist dagegen die Rostfläche nur $\frac{1}{50}$ bis $\frac{1}{60}$ der ganzen Heizfläche. Die Rostfugenfläche ist bei Holz und guten Steinkohlen $\frac{1}{7}$ bis $\frac{1}{6}$, dagegen bei Torf und aschenreichen Steinkohlen $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{4}$ der ganzen Rostfläche. Ueberhaupt kann man die Größe F_1 der Rostfugenfläche nach der Formel $F_1 = \frac{Q_1}{v_1}$ bestimmen, in welcher Q_1 das pr. Sec. dem Brennheerde mit der Geschwindigkeit v_1 zuzuführende Luftquantum bezeichnet.

Im Mittel kann man rechnen:

für gewöhnliche stationäre Kessel . $v_1 = 2\frac{1}{2}$ bis $3\frac{1}{2}$ Fuß,
» Cornwall-Kessel mit langsamer Verbrennung . . . . . . $v_1 = 1\frac{1}{2}$ » $2\frac{1}{2}$ »
» Dampfschiffkessel . . . . . $v_1 = 3\frac{1}{2}$ » $4\frac{1}{2}$ »
» Dampfwagenkessel . . . . . . $v_1 = 15$ » 18 »

Uebrigens nimmt der Rost ungefähr $1/3$ der Kessellänge ein. Jedoch ist seine ganze Länge höchstens 7 Fuß, ferner die der Roststäbe höchstens $4 1/2$ Fuß. Die Breite der Roststäbe ist $1 1/2$ bis 2 Zoll, und die der Fuge oder des Spaltes zwischen je zwei Roststäben bei Steinkohlenfeuerung, $1/3$ bis $1/2$ Zoll, und bei Holzfeuerung, $1/5$ bis $1/4$ Zoll. Eine einflügelige Heizthür ist 12 bis 14 Zoll breit und 10 bis 12 Zoll hoch, eine zweiflügelige dagegen 17 bis 20 Zoll breit und 12 bis 14 Zoll hoch. Der Aschenfall ist 30 bis 36 Zoll tief, und der Feuerraum bei Steinkohlenfeuerung, 13 bis 18, bei Holzfeuerung aber 18 bis 24 Zoll hoch zu machen.

Bei Heizung mit Torf, Braunkohle und schlechten Steinkohlensorten ist die Anwendung eines Treppenrostes von Vortheil. Doppelheerde sind, wenn sie abwechselnd beschickt werden, die besten Mittel einer rauchlosen Verbrennung.

Die Länge des Feuerzuges ist höchstens 90 Fuß, der Querschnitt desselben gleich dem der freien oder Rostfugenfläche F_1, ferner der Querschnitt desselben über der 4 bis 6 Zoll vom Kessel abstehenden Feuerbrücke, $1/3$ bis $2/3$ dieser Fläche. Uebrigens ist es, nach Fairbairn, zweckmäßig, noch einen Canal aus dem Aschenfall durch die Feuerbrücke hindurch zu führen, dessen Querschnitt $1/115$ der Rostfläche beträgt.

Ist t_1 die Temperatur der Feuerluft beim Eintritt in den Schornstein, t die Temperatur der dem Brennheerde zugeführten Luft, und h die Höhe des Schornsteins, von der Rostfläche bis Ausmündung der Esse gemessen, so läßt sich im Mittel die Geschwindigkeit der Essenluft:

$v = 0{,}08 \sqrt{(t_1 - t) h}$ Fuß $= 0{,}045 \sqrt{(t_1 - t) h}$ Meter

setzen.

Bezeichnet noch F den Querschnitt der Esse, so folgt das durch die Esse abgeführte Luft- oder Rauchquantum:

$$Q = Fv = 0{,}08\, F \sqrt{(t_1 - t) h} \text{ Cubikfuß, wonach nun}$$

$$F = \frac{12{,}5\, Q}{\sqrt{(t_1 - t) h}} \text{ Quadratfuß, sowie}$$

$$h = \frac{156}{t_1 - t} \left(\frac{Q}{F}\right)^2 \text{ Fuß folgt.}$$

Gewöhnlich ist $t_1 = 250$ bis 300 Grad, wogegen t im Mittel des Jahres nur 10 Grad zu setzen sein möchte. Führen wir deshalb $t_1 - t = 265$ Grad ein, so folgt

$$F = 0{,}768 \frac{Q}{\sqrt{h}} \text{ und } h = 0{,}589 \left(\frac{Q}{F}\right)^2.$$

Rechnet man auf 1 Pfund Brennstoff 600 Cubikfuß abzuführenden Rauch, so hat man bei dem stündlichen Verbrauch von K Pfund Brennstoff:

$$F = 0{,}128 \frac{K}{\sqrt{h}} \text{ und } h = 0{,}01638 \left(\frac{K}{F}\right)^2 \text{ Fuß.}$$

Macht man die Essenweite $d = 1/25$ der Essenhöhe h, so erhält man $h = 5{,}77 \sqrt[5]{K^2}$.

Die gewöhnliche Essenhöhe ist 60 bis 120 Fuß; nimmt man hiernach im Mittel $h = 90$ Fuß an, so folgt der nöthige Querschnitt der Esse: $F = 0{,}0135\,K$ Quadratfuß.

Bei Holzfeuerung genügt die Hälfte des Querschnitts der Esse von dem bei Steinkohlenfeuerung. Die äußere Böschung der Schornsteine ist, pr. 1 Fuß Höhe, $n = 0{,}025$ bis $0{,}036$, und die innere Böschung $n_1 = 0{,}0125$ bis $0{,}018$ Fuß; folglich nimmt die Wandstärke von oben nach unten, pr. Fuß, auch um $n_1 = 0{,}0125$ bis $0{,}018$ Fuß zu. Die Wandstärke einer Dampfesse ist oben die Ziegelbreite von 6 Zoll, und unten zwei bis drei Ziegelbreiten, bei Blechessen ist die Wandstärke $1^1/_2$ bis $2^1/_2$ Linien.

Der Materialaufwand bei einem runden Dampfschornstein aus Formziegeln von $8^1/_2$ Zoll äußerer Länge, $2^1/_2$ Zoll Dicke und 5 bis 12 Zoll Breite ist folgender.

Schornsteinschichten.	Ziegellänge	bei 2′ licht. ob. Durchm.		bei 3′ licht. ob. Durchm.		bei $3^1/_2$ licht. ob. Durchm.	
	Zoll	Ziegel Stück	Mörtel Cubikf.	Ziegel Stück	Mörtel Cubikf.	Ziegel Stück	Mörtel Cubikf.
für d. obersten 10′	5	586	9	670	11	754	13
„ zweiten 10′	6	642	12	726	14	810	16
„ dritten 10′	7	698	15	782	17	866	20
„ vierten 10′	8	754	18	838	20	922	24
„ fünften 10′	9	810	22	894	24	978	28
„ sechsten 10′	10	866	26	950	28	1035	33
„ siebenten 10′	11	922	30	1005	33	1091	38
„ achten 10′	12	979	34	1061	38	1147	44

Der Materialverbrauch bei der Einmauerung eines Dampfkessels von $4^1/_2$ bis 5 Fuß Durchmesser und 12 Fuß Länge, ohne Rücksicht auf die Grundmauer von etwa 8 Fuß Breite und 15 Fuß Länge, ist folgender:

1750 Stück Ziegel großer Form und 60 Cubikfuß Mörtel oder
2000 » » mittlerer » » 54 » » »
2400 » » kleiner » » 58 » »

Für jeden Fuß über diese Länge treten:

110 Stück Ziegel großer Form und 4 Cubikfuß Mörtel, oder
130 » » mittlerer » » $3^1/_2$ » » »
150 » » kleiner » » $3^1/_2$ » »

hinzu. Zur Verblendung des Feuerraums ist der zehnte Theil an feuerfesten Ziegeln nöthig, von denen jedes Hundert eine Mischung von 1 Ctr. Chamottmehl und 1 Cubikfuß Thon als Mörtel bedarf.

§. 77. Dampfmaschinen. Ist p_0 die Spannung des Dampfes im Dampfkessel, q die im Condensator, oder, wenn

ein solcher nicht vorhanden ist, die der freien Luft, ferner ε das Expansionsverhältniß und η der Wirkungsgrad, so hat man die dem Dampfquantum Q entsprechende Leistung annähernd:

$$L = \eta L_0 = \eta\, Q p_0 \left(1 + Ln.\, \varepsilon - \frac{\varepsilon q_0}{p_0}\right) \text{ Fußpfd.}$$

Bei Maschinen ohne Expansion ist $\varepsilon = 1$, $Ln.\, \varepsilon = 0$, bei eincylindrigen Expansionsmaschinen ist $\varepsilon = \frac{s_1}{s}$, das Verhältniß zwischen dem ganzen Kolbenhube s_1 und dem Hube s vor der Expansion; bei den zweicylindrigen nach Woolf's Systeme construirten Expansionsmaschinen aber $\varepsilon = \frac{F_1 s_1}{F s}$, das Verhältniß zwischen dem von der Kolbenfläche F_1 im großen Cylinder durchlaufenen Raume $F_1 s_1$ und dem von der Kolbenfläche F im kleinen Cylinder durchlaufenen Raume Fs.

Bezeichnet Q das Dampfquantum in Cubikmetern, und geben p_0 und q_0 die Pressungen in Kilogrammen pr. Quadratcentimeter an, so hat man in dieser Formel statt p_0 und q_0, $10000\, p_0$ und $10000\, q_0$ einzusetzen, wobei dann L in Kilogrammmetern ausgedrückt wird; drückt man hingegen Q in Cubikfuß aus, und giebt man p_0 und q_0 in Pfund pr. Quadratzoll, so ist statt p_0 und q_0, $144\, p_0$ und $144\, q_0$ einzuführen, wobei man dann L in Fußpfund angegeben erhält.

Umgekehrt ist das der Leistung L entsprechende Dampfquantum $Q = \dfrac{L}{\eta p_0 \left(1 + Ln.\, \varepsilon - \frac{\varepsilon q_0}{p_0}\right)}$.

Giebt man L in Pferdekräften zu je 75 Kilogrammmeter oder 480 Fußpfund und den Dampfdruck p_0 in Atmosphären zu je 1,031 Kilogramm pr. Quadratcentimeter oder 14 Pfund pr. Quadratzoll, so erhält man

$$Q = 0{,}00727 \frac{L}{\eta p_0 \left(1 + Ln.\, \varepsilon - \frac{\varepsilon q_0}{p_0}\right)} \text{ Cubikmeter}$$

$$= 0{,}2381 \frac{L}{\eta p_0 \left(1 + Ln.\, \varepsilon - \frac{\varepsilon q_0}{p_0}\right)} \text{ Cubikfuß.}$$

Führt man für η den Mittelwerth $= 0{,}7$ ein, so hat man für Maschinen ohne Expansion und ohne Condensation

$$Q = 0{,}01818 \frac{L}{p_0 + 1} \text{ Cubikmeter} = 0{,}5952 \frac{L}{p_0 + 1} \text{ Cubikfuß.}$$

Bezeichnet ferner v die mittlere Kolbengeschwindigkeit, so ist die Größe der Kolbenfläche:

$$F = \varepsilon \cdot \frac{Q}{v} \text{ und die ihres Durchmessers}$$

$$d = \sqrt{\frac{4\, F}{\pi}} = 1{,}128 \sqrt{F} = 1{,}128 \sqrt{\frac{\varepsilon Q}{v}}.$$

Setzt man $\varepsilon = 1$, und führt man $v = 1$ Meter ein, so folgt

$$F = Q = 181{,}8 \frac{L}{p_0} \text{ Quadratcentimeter und}$$

$$d = 15{,}21 \sqrt{\frac{L}{p_0}} \text{ Centimeter.}$$

Für $v = 3^1/_3$ Fuß = 40 Zoll ist dagegen:

$$F = 25{,}71 \frac{L}{p_0} \text{ Quadratzoll und } d = 5{,}715 \sqrt{\frac{L}{p_0}} \text{ Zoll.}$$

Nach den letzten Formeln sind folgende Tabellen berechnet worden.

Tabelle I.

Tabelle der Dampfmenge und der Kolbenfläche pr. Pferdekraft Nutzleistung.

1. Für das Metermaaß.

Dampfspannung p_0 in Atmosphären .	1	1,25	1,5	2	2,5	3
Dampfmenge Q in Cubikmetern	0,01818	0,01454	0,01212	0,00909	0,00727	0,00606
Kolbenfläche F in Quadratcentimetern	181,8	145,4	121,2	90,9	72,7	60,6

Dampfspannung p_0 in Atmosphären . .	3,5	4	4,5	5	6	7
Dampfmenge Q in Cubikmetern	0,00519	0,00454	0,00404	0,00364	0,00303	0,00260
Kolbenfläche F in Quadratcentimetern	51,9	45,4	40,4	36,4	30,3	26,0

2. Für das Fußmaaß.

Dampfspannung p_0 in Atmosphären . .	1	1,25	1,5	2	2,5	3
Dampfmenge Q in Cubikfuß	0,595	0,476	0,397	0,298	0,238	0,198
Kolbenfläche F in Quadratzoll	25,70	21,42	17,15	12,85	10,28	8,57

2. Für das Fußmaaß.

Dampfspannung p_0 in Atmosphären . .	3,5	4	4,5	5	6	7
Dampfmenge Q in Cubikfuß	0,170	0,149	0,132	0,119	0,0975	0,0850
Kolbenfläche F in Quadratzoll	7,32	6,42	5,71	5,14	4,28	3,67

Mit Hülfe dieser Tabellen bestimmt sich aus der gegebenen Nutzleistung L_0 einer Dampfmaschine die erforderliche Dampfmenge Q und die Größe der Kolbenfläche F, wenn man die der gegebenen Dampfspannung p_0 entsprechenden Werthe von Q und F aus der Tabelle durch L_0, und es ergiebt sich auch der nöthige Kolbendurchmesser d, wenn man den aus der Tabelle genommenen Werth des Kolbendurchmessers durch $\sqrt{L_0}$ multiplicirt.

Der **Wirkungsgrad** η ist bei verschiedenen Maschinensystemen verschieden und wächst zumal mit der Stärke der Maschinen. Vorzüglich hängt er von der Kolbenreibung, Abkühlung und von dem Druckverluste ab, welchen der Dampf beim Uebergang aus dem Kessel in den Cylinder erleidet, und macht, daß die Spannung p im Cylinder um 5 bis 10 Proc. kleiner ist als die Spannung p_0 im Kessel. Wenn die Geschwindigkeit der Maschine eine mittlere, wenn ferner die Dampfklappe vollkommen geöffnet ist und wenn die Querschnitte der Dampfwege u. s. w. die vorschriftsmäßigen sind, so kann man bei einer Leistung von L Pferdekräften folgende Wirkungsgrade erwarten.

Tabelle II.

Die Wirkungsgrade verschiedener Dampfmaschinensysteme von verschiedenen Stärken giebt folgende Tabelle an.

Maschinensysteme	Die Wirkungsgrade η bei folgenden theoretischen Leistungswerthen L_0 in Pferdekräften.							
	1	2	4	8	16	32	64	128
Niederdruckmaschinen	0,32	0,36	0,40	0,43	0,46	0,48	0,49	0,50
Mitteldruckmaschinen mit 2 Cylindern	0,19	0,24	0,30	0,36	0,42	0,48	0,54	0,58
Hochdruckmaschinen mit Condensation	0,25	0,30	0,34	0,38	0,41	0,44	0,45	0,47
Hochdruckmaschinen ohne Condensation	0,25	0,31	0,35	0,39	0,43	0,48	0,50	0,52

Um das Dampfquantum, die Kolbenfläche und den Kolbendurchmesser einer Pferdekraft bei einem von 0,40 abweichenden Wirkungsgrade zu finden, hat man den entsprechenden Werth von Q und F aus Tabelle I., noch mit $\frac{0,40}{\eta}$, sowie den Werth von d mit $\sqrt{\frac{0,40}{\eta}}$ zu multipliciren. Die vorzüglichsten Werthe von $\frac{0,40}{\eta}$ und $\sqrt{\frac{0,40}{\eta}}$ enthält folgende Tabelle III.

Tabelle III.

$\eta =$	0,30	0,32	0,34	0,36	0,38	0,40	0,42	0,44	0,46	0,48	0,50
$\frac{0,40}{\eta} =$	1,33	1,25	1,18	1,11	1,05	1,00	0,95	0,91	0,87	0,83	0,80
$\sqrt{\frac{0,40}{\eta}} =$	1,15	1,12	1,09	1,05	1,02	1,00	0,97	0,95	0,93	0,91	0,89

Die **mittlere Kolbengeschwindigkeit** wächst mit der Stärke der Dampfmaschine und ist bei Mitteldruck- und Hochdruckmaschinen ungefähr $\frac{1}{2}$ Fuß oder 0,15 Meter größer als bei Niederdruckmaschinen. Folgende Tabelle IV. giebt die Geschwindigkeiten der Dampfmaschinen von verschiedenen Stärken an.

Tabelle IV.

Maschinenstärke in Pferdekräften.		1	2	4	8	16	32	64	128
Geschwindigkeit v von Niederdruckmaschinen	in Metern .	0,63	0,76	0,89	1,02	1,11	1,20	1,26	1,33
	in Fußen .	2,00	2,42	2,83	3,25	3,54	3,83	4,00	4,25
	in Zollen .	24	29	34	39	42,5	46	48	51
Geschwindigkeit v von Mittel- u. Hochdruckmasch.	in Metern .	0,78	0,92	1,05	1,18	1,28	1,36	1,43	1,49
	in Fußen .	2,50	2,92	3,33	3,75	4,08	4,33	4,57	4,75
	in Zollen .	30	35	40	45	49	52	55	57

Wenn die Geschwindigkeit v einer Dampfmaschine von 1 Meter abweicht, so hat man die Werthe von F aus Tabelle I. noch mit $\frac{1}{v}$, und die von d mit $\sqrt{\frac{1}{v}}$, und ebenso, wenn v von 40 Zoll abweicht, F aus der gedachten Tabelle mit $\frac{40}{v}$ und d mit $\sqrt{\frac{40}{v}}$ zu multipliciren. Hiernach ist folgende Tabelle V. berechnet worden.

Tabelle V.

Kolbengeschwindigkeit v in Metern / in Zollen	0,75 30	0,80 32	0,85 34	0,90 36	0,95 38	1,00 40	1,05 42	1,10 44
Werthe von $\frac{1}{v}$ für Meter . . / „ „ $\frac{40}{v}$ „ Zoll . . .	1,33	1,25	1,18	1,11	1,05	1,00	0,95	0,91
„ „ $\sqrt{\frac{1}{v}}$ für Meter / „ „ $\sqrt{\frac{40}{v}}$ „ Zoll .	1,15	1,12	1,09	1,05	1,02	1,00	0,97	0,95

Kolbengeschwindigkeit v in Metern / in Zollen	1,15 46	1,20 48	1,25 50	1,30 52	1,35 54	1,40 56	1,45 58	1,50 60
Werthe von $\frac{1}{v}$ für Meter . . / „ „ $\frac{40}{v}$ „ Zoll . . .	0,87	0,83	0,80	0,77	0,74	0,71	0,69	0,67
„ „ $\sqrt{\frac{1}{v}}$ für Meter / „ „ $\sqrt{\frac{40}{v}}$ „ Zoll .	0,93	0,91	0,89	0,88	0,86	0,84	0,83	0,82

Wenn die Dampfmaschine mit Expansion arbeitet, so sind die Werthe von Q, F und d noch einer besonderen Correction zu unterwerfen.

Es sind zunächst die Werthe von F mit dem Expansionsverhältnisse ε und daher die von d mit $\sqrt{\varepsilon}$ zu multipliciren. Bei Woolf'schen oder zweicylindrigen Maschinen ist für ε das Expansionsverhältniß ε_0 im kleinen Cylinder einzuführen. Folgende Tabelle VI. enthält die Hauptwerthe von ε und $\sqrt{\varepsilon}$.

Tabelle VI.

Expansionsverhältniß ε	1,25	1,50	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5	6
Wurzelgröße $\sqrt{\varepsilon}$	1,12	1,22	1,41	1,58	1,73	1,87	2,00	2,12	2,24	2,45

Da bei der genaueren Bestimmung der Leistung der Dampfmaschine, insbesondere der einer Expansionsdampfmaschine noch der Factor $\psi = 1 + Ln.\,\varepsilon - \frac{\varepsilon q_0}{p_0}$ einzuführen ist, so hat man die gewöhnlich in Anwendung kommenden Werthe von ψ, $\frac{1}{\psi}$ und $\sqrt{\frac{1}{\psi}}$ in folgenden Tabellen VII. und VIII. (s. S. 572, 573, 574 u. 575) zusammengestellt. Die erste dieser

Tabellen ist bei Condensationsdampfmaschinen, wo der Gegendruck auf den Kolben $q_0 = {}^1/_8$ Atmosphäre gesetzt werden kann, in Anwendung zu bringen; die letztere dagegen bei Maschinen ohne Condensation, für welche dieser Gegendruck $q_0 = 1$ Atmosphäre anzunehmen ist.

Von den drei Zahlenwerthen, welche einem und demselben Werthe von p_0 angehören, giebt der obere ψ, der mittlere $\frac{1}{\psi}$ und der untere $\sqrt{\frac{1}{\psi}}$ an.

Bei Bestimmung der Dampfmenge Q und der Kolbenfläche F hat man die Werthe aus Tabelle I. mit $\frac{1}{\psi}$ und bei Angabe des Kolbendurchmessers mit $\sqrt{\frac{1}{\psi}}$ zu multipliciren.

Beispiel. Welche Dampfmenge verbraucht eine Dampfmaschine von effectiv 30 Pferdekräften bei 4 Atmosphären Spannung im Dampfkessel, und wie groß ist die erforderliche Fläche, sowie der entsprechende Durchmesser des Dampfcylinders?

Bei dem Wirkungsgrade $\eta = 0{,}40$ und der Kolbengeschwindigkeit $v = 40$ Zoll ist, wenn man vom Gegendruck und von einer Expansion des Dampfes absieht, nach Tabelle I., 2., die nöthige Dampfmenge pr. Sec. $Q = 30 \,.\, 0{,}149 = 4{,}47$ Cubikfuß, die Kolbenfläche $F = 30 \,.\, 6{,}42 = 192{,}6$ Quadratzoll und der Kolbendurchmesser $d = 2{,}86 \sqrt{30} = 2{,}86 \,.\, 5{,}48 = 15{,}67$ Zoll. Soll die Maschine ohne Condensation und mit der Expansion $\varepsilon = 2^1/_2$ arbeiten, so ist nach Tabelle VIII. das Dampfquantum 0,78mal so groß, also $= 0{,}78 \,.\, 4{,}47 = 3{,}50$ Cubikfuß, ferner die Größe der Kolbenfläche $2{,}5 \,.\, 0{,}78 = 1{,}95$mal so groß, also $= 1{,}95 \,.\, 192{,}6 = 376$ Quadratzoll, und endlich nach Tabelle VI. und VIII. der Kolbendurchmesser $= 1{,}58 \,.\, 0{,}88 = 1{,}39$mal so groß, also $= 15{,}67 \,.\, 1{,}39 = 21{,}8$ Zoll in Anwendung zu bringen. Setzt man nach Tabelle II. den Wirkungsgrad der Maschine $\eta = 0{,}47$, so wäre nach Tabelle III. das Dampfquantum $Q = 0{,}85 \,.\, 3{,}50 = 2{,}98$ Cubikfuß, die Kolbenfläche $F = 0{,}85 \,.\, 376 = 320$ Quadratzoll, und der Kolbendurchmesser $d = 0{,}92 \,.\, 21{,}8 = 20$ Zoll. Läßt man endlich nach Tabelle IV. die Maschine mit 52 Zoll Geschwindigkeit arbeiten, so ist nach Tabelle V. die erforderliche Kolbenfläche $F = 0{,}77 \,.\, 320 = 246{,}4$ Quadratzoll, und der Kolbendurchmesser $d = 0{,}88 \,.\, 20 = 17{,}6$ Zoll.

Soll dagegen die Maschine mit Condensation und mit der Expansion $\varepsilon = 4$ arbeiten, so ist nach Tabelle VII., Q 0,44mal so groß, als das zuerst berechnete, also $= 0{,}44 \,.\, 4{,}47 = 1{,}967$ Cubikfuß, ferner die Größe der Kolbenfläche $= 4 \,.\, 0{,}44 = 1{,}76$mal so groß, als die zuerst gefundene, d. i. $= 1{,}76 \,.\, 196{,}2 = 345$ Quadratzoll, und endlich der Kolbendurchmesser $= 2 \,.\, 0{,}66 = 1{,}32$mal $15{,}67 = 20{,}7$ Zoll.

Tabelle VII (für

Die Werthe $\psi = 1 + Ln.\varepsilon - \frac{\varepsilon q_0}{p_0}$, $\frac{1}{\psi}$ und $\sqrt{\frac{1}{\psi}}$ bei ver-

Dampfpressung p_0 in Atmosphären.	Werthe von ψ, $\frac{1}{\psi}$ und $\sqrt{\frac{1}{\psi}}$ für den Ge-				
	1,00	1,25	1,50	1,75	2,0
1,0	0,87 1,14 1,07	1,07 0,93 0,96	1,22 0,82 0,91	1,34 0,75 0,87	1,44 0,69 0,83
1,25	0,90 1,11 1,05	1,10 0,91 0,95	1,26 0,79 0,89	1,38 0,72 0,85	1,49 0,67 0,82
1,50	0,92 1,09 1,04	1,12 0,89 0,94	1,28 0,78 0,88	1,41 0,71 0,84	1,53 0,65 0,81
2,0	0,94 1,06 1,03	1,14 0,88 0,94	1,31 0,76 0,87	1,45 0,69 0,83	1,57 0,64 0,80
2,5	0,95 1,05 1,02	1,16 0,86 0,93	1,33 0,75 0,87	1,47 0,68 0,82	1,59 0,63 0,79
3,0	0,96 1,04 1,02	1,17 0,85 0,92	1,34 0,75 0,87	1,49 0,67 0,82	1,61 0,62 0,79
3,5	0,97 1,03 1,01	1,18 0,85 0,92	1,35 0,74 0,86	1,50 0,67 0,82	1,62 0,62 0,79
4,0	0,97 1,03 1,01	1,18 0,85 0,92	1,36 0,74 0,86	1,50 0,67 0,82	1,63 0,61 0,78
5	0,98 1,02 1,01	1,19 0,84 0,92	1,37 0,73 0,85	1,52 0,66 0,81	1,64 0,61 0,78
6	0,98 1,02 1,01	1,20 0,83 0,91	1,37 0,73 0,85	1,52 0,66 0,81	1,65 0,61 0,78
8	0,98 1,02 1,01	1,20 0,83 0,91	1,38 0,72 0,85	1,53 0,65 0,81	1,66 0,60 0,77

Maschinen mit Condensation).

schiedenen Dampfpressungen (p_0) und Expansionsverhältnissen (ε).

genbruck $q_0 = 1/8$ Atmosphären bei folgd. Expansionsverhältnissen.

2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5	6
1,60	1,72	1,82	1,89	1,94	1,98	2,04
0,63	0,58	0,55	0,53	0,52	0,51	0,49
0,79	0,76	0,74	0,73	0,72	0,71	0,70
1,67	1,80	1,90	1,99	2,05	2,12	2,19
0,60	0,56	0,53	0,50	0,49	0,47	0,46
0,77	0,75	0,73	0,71	0,70	0,69	0,68
1,70	1,85	1,96	2,05	2,13	2,19	2,29
0,59	0,54	0,51	0,49	0,47	0,46	0,44
0,77	0,73	0,71	0,70	0,69	0,68	0,66
1,76	1,91	2,03	2,14	2,22	2,30	2,42
0,57	0,52	0,49	0,47	0,45	0,43	0,41
0,75	0,72	0,70	0,69	0,67	0,66	0,64
1,79	1,95	2,08	2,19	2,28	2,36	2,49
0,56	0,51	0,48	0,46	0,44	0,42	0,40
0,75	0,71	0,69	0,68	0,66	0,65	0,63
1,81	1,97	2,11	2,22	2,32	2,40	2,54
0,55	0,51	0,47	0,45	0,43	0,42	0,39
0,74	0,71	0,69	0,67	0,66	0,65	0,62
1,83	1,99	2,13	2,25	2,34	2,43	2,58
0,55	0,50	0,47	0,44	0,43	0,41	0,39
0,74	0,71	0,69	0,66	0,66	0,64	0,62
1,84	2,00	2,14	2,26	2,36	2,45	2,60
0,54	0,50	0,47	0,44	0,42	0,41	0,38
0,73	0,71	0,69	0,66	0,65	0,64	0,62
1,85	2,02	2,11	2,29	2,39	2,49	2,64
0,54	0,50	0,46	0,44	0,42	0,40	0,38
0,73	0,71	0,68	0,66	0,65	0,63	0,62
1,86	2,04	2,18	2,30	2,41	2,51	2,67
0,54	0,49	0,46	0,43	0,41	0,40	0,37
0,73	0,70	0,68	0,66	0,64	0,63	0,61
1,87	2,05	2,20	2,32	2,43	2,53	2,70
0,53	0,49	0,45	0,43	0,41	0,40	0,37
0,73	0,70	0,67	0,66	0,64	0,63	0,61

Tabelle VIII (für

Die Werthe von $\psi = 1 + Ln.\varepsilon - \frac{\varepsilon q_0}{p_0}$, $\frac{1}{\psi}$ und $\sqrt{\frac{1}{\psi}}$ bei ver-

Dampfpressung p_0 in Atmosphären.	Werthe von ψ, $\frac{1}{\psi}$ und $\sqrt{\frac{1}{\psi}}$ für den Ge-				
	1,00	1,25	1,5	1,75	2,0
2,0	0,50 2,00 1,41	0,60 1,67 1,29	0,66 1,52 1,23	0,68 1,47 1,21	0,69 1,44 1,20
2,5	0,60 1,67 1,29	0,72 1,39 1,18	0,81 1,23 1,11	0,86 1,16 1,08	0,89 1,12 1,06
3,0	0,67 1,49 1,22	0,81 1,23 1,11	0,91 1,10 1,05	0,98 1,02 1,01	1,03 0,97 0,98
3,5	0,71 1,41 1,19	0,87 1,15 1,07	0,98 1,02 1,01	1,06 0,94 0,97	1,12 0,89 0,94
4,0	0,75 1,33 1,15	0,91 1,10 1,05	1,03 0,97 0,98	1,12 0,89 0,94	1,19 0,84 0,92
4,5	0,78 1,28 1,13	0,95 1,05 1,02	1,07 0,93 0,96	1,17 0,85 0,92	1,25 0,80 0,89
5,0	0,80 1,25 1,12	0,97 1,03 1,01	1,11 0,91 0,95	1,21 0,83 0,91	1,29 0,78 0,88
6,0	0,83 1,20 1,10	1,02 0,98 0,99	1,16 0,86 0,93	1,27 0,79 0,89	1,36 0,74 0,86
7,0	0,86 1,16 1,08	1,05 0,95 0,97	1,19 0,84 0,92	1,31 0,76 0,87	1,41 0,71 0,84
8,0	0,88 1,14 1,07	1,07 0,93 0,96	1,22 0,82 0,91	1,34 0,75 0,87	1,44 0,69 0,83

Maschinen ohne Condensation).

schiedenen Dampfspressungen (p_0) und Expansionsverhältnissen (ε).

gendruck $q_0 = 1$ Atmosphäre bei folgd. Expansionsverhältnissen.						
2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5	6
0,67 1,49 1,22						
0,92 1,09 1,04	0,90 1,11 1,05					
1,08 0,93 0,96	1,10 0,96 0,98	1,09 0,92 0,96				
1,20 0,83 0,91	1,24 0,81 0,90	1,25 0,80 0,89	1,24 0,81 0,90			
1,29 0,78 0,88	1,35 0,74 0,86	1,38 0,72 0,85	1,39 0,72 0,85	1,38 0,72 0,85		
1,36 0,74 0,86	1,43 0,70 0,84	1,48 0,68 0,82	1,50 0,67 0,82	1,50 0,67 0,82	1,50 0,67 0,82	
1,42 0,70 0,84	1,50 0,67 0,82	1,55 0,65 0,81	1,59 0,63 0,79	1,60 0,62 0,79	1,61 0,62 0,79	1,59 0,63 0,79
1,49 0,67 0,82	1,60 0,62 0,79	1,67 0,60 0,77	1,72 0,58 0,76	1,75 0,57 0,75	1,78 0,56 0,75	1,79 0,56 0,75
1,56 0,64 0,80	1,67 0,60 0,77	1,75 0,57 0,75	1,81 0,55 0,74	1,86 0,54 0,73	1,90 0,53 0,73	1,93 0,52 0,73
1,60 0,62 0,79	1,72 0,58 0,76	1,82 0,55 0.74	1,89 0,53 0,73	1,94 0,52 0,72	1,98 0,51 0,71	2,04 0,49 0,70

Der Kolbenschub steht in einem gewissen Verhältnisse zum Kolbendurchmesser d; es ist im Mittel $\frac{s}{d} = 2$, jedoch bei kleineren d größer und bei größeren d kleiner.

Folgende Tabelle IX. giebt den Kolbenschub bei verschiedenen Durchmessern und von verschiedenen Maschinensystemen an.

Tabelle IX.

Die Kolbenschübe s Zoll bei verschiedenen Kolbendurchmessern und verschiedenen Dampfmaschinensystemen.

Kolbendurchmesser d in Zollen.	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
Nieder- und Mitteldruckmaschinen	17	32	46	58	69	79	88	96	103	110
Hochdruckmaschinen:										
1. mit Condensation, a) ohne Balancier	17	30	40	49	57	63	69	73	77	81
b) mit Balancier	21	39	56	71	85	97	109	120	130	139
2. ohne Condensation, a) ohne Balancier .	16	28	38	47	54	60	60	70	74	78
b) mit Balancier .	19	36	52	66	79	91	102	113	123	131

Aus dem Kolbenhube s bestimmt sich zuletzt noch die Anzahl der Kolbenspiele pr. Minute durch die Formel:

$$n = \frac{30\,v}{s}.$$

In der Regel ist $n > 16$ und < 40, und zwar größer bei kleinen und kleiner bei größeren Maschinen. Bei Balanciermaschinen von 4 bis 100 Pferdekräften fällt $n = 30$ bis 16 aus, und bei Maschinen ohne Balancier von 4 bis 100 Pferdekräften ergiebt sich $n = 40$ bis 24.

Bei den zweicylindrigen Mitteldruck- oder sogenannten Woolf'schen Dampfmaschinen ist, wenn ε_0 das Expansionsverhältniß im kleinen Cylinder bezeichnet, der Querschnitt der Kolbenfläche dieses Cylinders durch die Formel $F = \frac{\varepsilon_0 Q}{v}$ zu bestimmen, und daher bei Gebrauch der Tabelle VI. statt ε, ε_0 und statt $\sqrt{\varepsilon}$, $\sqrt{\varepsilon_0}$ einzuführen. Aus F folgt dann die Kolbenfläche des großen Cylinders $F_1 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \frac{F}{\nu}$, wenn $\nu = \frac{s_1}{s}$ das Hubverhältniß bezeichnet. Den Hub s_1 des großen Kolbens bestimmt man aus dem Durchmesser d_1 mittels Tabelle IX., woraus dann der des kleinen Kolbens $s = \frac{s_1}{\nu}$ folgt.

Gewöhnlich ist $\nu = \frac{s_1}{s} = 4/3$, $\varepsilon_0 = 3/2$ und $\varepsilon = 6$, daher $s = 0{,}75\, s_1$, $F_1 = 3\, F$ und $d_1 = 1{,}732\, d$.

Bei einfachwirkenden Dampfmaschinen, welche zur Wasserhebung angewendet werden, hat man die Kolbenfläche doppelt und den Kolbendurchmesser $\sqrt{2} = 1{,}414$mal so groß zu machen, als bei doppeltwirkenden Dampfmaschinen von gleicher Arbeitsfähigkeit.

Aus dem Dampfquantum Q einer Dampfmaschine und dem specifischen Dampfvolumen μ berechnet sich das Speisewasserquantum Q_1 mittels der Formel $Q_1 = \frac{Q}{\mu}$, und das Gewicht von beiden $Q_1 \gamma = \frac{Q\gamma}{\mu}$, und zwar $= \frac{61{,}74\, Q}{\mu}$, wenn man Q in Cubikfuß giebt, und das Gewicht eines Cubikfußes Wasser $\gamma = 61{,}74$ Pfund setzt.

Rechnet man auf 1 Pfund guter Steinkohle 7 Pfund Dampf, so folgt demnach das Steinkohlenquantum, durch welches Q Cubikfuß Dampf erzeugt werden:

$$K = \frac{Q\gamma}{7\mu} = 8{,}82\ \frac{Q}{\mu}\ \text{Pfund.}$$

Hiernach sind zur Erzeugung von 100 Cubikfuß Dampf bei verschiedenen Dampfpressungen folgende Steinkohlenmengen nöthig.

	Dampfspannung in Atmosphären.									
	1,25	1,50	2,0	2,5	3,0	3,5	4	4,5	5	6
Steinkohlenmenge in Pfd.	0,66	0,79	1,04	1,29	1,53	1,77	2,01	2,25	2,48	2,93

Erfahrungsmäßig giebt:

1 Pfund mittlerer Steinkohle nur 5 bis 6 Pfd.,
1 Pfund Braunkohle $3^1/_2$ Pfund,
1 Pfund getrockneter Torf 2 Pfund, und
1 Pfund trockenes Holz $2^1/_2$ Pfund Dampf.

Gewöhnlich rechnet man das stündlich verbrauchte Steinkohlenquantum pr. Pferdekraft bei Maschinen ohne Expansion = 10 bis 13 Pfund, bei Maschinen mit Expansion und ohne Condensation, je nach dem Grade der Expansion 8 bis 11,5 Pfund, und bei solchen mit Expansion und Condensation = 5 bis 7 Pfund.

Das Speisen des Dampfkessels ist bei niederem Dampfdruck durch ein einfaches Speiserohr zu bewirken; bei Hochdruck ist aber hierzu eine Speisepumpe nöthig, welche sich auch mit Vortheil durch den Giffard'schen Speiseapparat ersetzen läßt. Um den Dampfkessel schnell speisen zu können, giebt man der Speisepumpe solche Dimensionen, daß sie drei bis sechsmal so

viel Wasser liefert, als zum gewöhnlichen Speisen nöthig ist; auch bringt man deshalb zwei gleiche Speisepumpen in Anwendung.

Setzt man $Q_1 = 6 \frac{Q}{\mu}$, so hat man den Fassungsraum oder das Product aus dem Querschnitt und dem Hube des Kolbens einer einfachwirkenden Speisepumpe:

$$V_1 = 2Fs = \frac{12}{\mu} Fs.$$

Das bei Condensationsdampfmaschinen nöthige Injections- oder Kaltwasserquantum Q_2 ist durch die Formel:

$$Q_2 = \left(\frac{640 - t_2}{t_2 - t_0}\right) Q_1 = \left(\frac{640 - t_2}{t_2 - t_0}\right) \frac{Q}{\mu},$$

in welcher t_0 die Temperatur des Injectionswassers und t_2 die Temperatur im Condensator bezeichnet, zu berechnen.

Nimmt man $t_0 = 12$ und $t_2 = 35$ Grad an, so erhält man $Q_2 = 26\, Q_1 = 26 \frac{Q}{\mu}$.

Der erforderliche Fassungsraum der Kaltwasserpumpe ist, wenn dieselbe einfach wirkt, während die Dampfmaschine eine doppelte Wirkung hat:

$$V_2 = 2 . 26\, Fs = 26 \cdot \frac{2}{\mu} Fs.$$

Der Sicherheit wegen setzt man noch 15 Proc. zu.

Das durch die Luft- und Warmwasserpumpe einer Condensationsdampfmaschine pr. Sec. fortzuschaffende Luft-, Dampf- und Wassergemenge ist $Q_3 = 72\, Q_1 = 72 \frac{Q}{\mu}$, wonach der Fassungsraum dieser Pumpe, wenn dieselbe einfach wirkt: $V_3 = \frac{144}{\mu} Fs$ ist; der Sicherheit wegen nimmt man aber das Doppelte, und daher: $V_3 = \frac{288}{\mu} Fs$.

Setzt man

$$V_1 = \frac{12}{\mu} Fs,\ V_2 = \frac{64}{\mu} Fs \text{ und } V_3 = \frac{288}{\mu} Fs,$$

so hat man für die Dampfspannung:

$p =$	1,25	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4	5	6 Atmosphären.
$V_1 =$	0,009	0,011	0,014	0,018	0,021	0,024	0,027	0,034	0,040 Fs
$V_2 =$	0,048	0,057	0,076	0,094	0,111	0,129	0,146	0,180	0,213 Fs
$V_3 =$	0,216	0,258	0,341	0,421	0,501	0,580	0,658	0,809	0,957 Fs

Das Volumen (V_4) des Condensators ist gleich dem Volumen (V_3) der Luft- und Warmwasserpumpe zu machen.

Die Dampfcanäle erhalten wie die Dampfröhre den Quer-

schnitt $F_1 = \frac{1}{25} F = 0{,}04\, F$; bei Maschinen mit hoher Expansion ist F_1 bis $0{,}05\, F$ zu steigern. Das Verhältniß der Länge zur Breite der Dampfcanäle ist, je nach der Größe der Maschinen $= \frac{4}{1}$ bis $\frac{7}{1}$. Der Querschnitt des Austragecanals, sowie der der Austrageröhre, ist $F_2 = 2 F_1 = 0{,}08\, F$ bis $0{,}10\, F$. Zur vortheilhaften Wirkung einer Dampfmaschine gehört ein gewisses Voreilen im Dampfzu- und -Ablassen, wonach die Dampfwege nicht erst eröffnet werden, wenn der Dampfkolben das Ende eines Schubes erreicht hat, sondern das Zulassen des Dampfes schon beginnt, wenn der Dampfkolben noch 0,01 bis 0,02 seines Weges zurückzulegen hat, und ebenso das Ablassen desselben oder vielmehr die Eröffnung des Dampfcanals zum Ablassen schon seinen Anfang nimmt, wenn von dem Dampfkolben noch 0,04 bis 0,05 seines ganzen Weges zu durchlaufen sind.

Die Wandstärke der Dampfcylinder ist mittels der Formel $e = 0{,}005\, p\, d + 0{,}83$ Zoll zu berechnen; die Dicke der Cylinderdeckel ist $e_1 = 1{,}1\, e$; ferner läßt sich die Dicke einer schmiedeeisernen Kolbenstange mittels der Formel

$$d_1 = 0{,}08\, d \sqrt{p},$$

wo p den Ueberdruck in Atmosphären bezeichnet, berechnen; für eine stählerne Kolbenstange ist $d_1 = 0{,}05\, d \sqrt{p}$, dagegen für eine gußeiserne $d_1 = 0{,}10\, d \sqrt{p}$.

Bei Dampfmaschinen mit niedrigem Drucke macht man gewöhnlich $d_1 = 0{,}1\, d$.

Für schmiedeeiserne Kolbenstangen, welche bloß dem Zug ausgesetzt sind, wie z. B. bei einfachwirkenden Dampfmaschinen und Pumpen, ist $d_1 = 0{,}04\, d \sqrt{p}$ zu setzen.

Der Theil der Kolbenstange, an welchem der Kolben aufsitzt, ist an einem Ende $1{,}4\, d_1$ und am anderen, $1{,}15\, d_1$ dick, und seine Länge ist 1 bis 2 Zoll größer als die Breite a der Liderung.

Bei Hanfliderung ist $a = 0{,}1\, d + 1{,}6$ Zoll, bei Metallliderung dagegen $a = 0{,}05\, d + 0{,}4\, p$ Zoll.

Die Metallliderung besteht, so lange a nicht über 3 Zoll mißt, aus zwei übereinanderliegenden Metallringen, ist aber a größer, so sind 3 oder mehr Ringe in Anwendung zu bringen.

Vierter Theil.

Technik.

Erster Abschnitt.

Formeln, Regeln und Tabellen der allgemeinen Maschinenbaukunst.

Erstes Capitel.

Maschinentheile und Zwischenmaschinen.

§. 78. Befestigung der Maschinentheile durch Leim und Kitt. Der gewöhnliche Tischlerleim ist gehörig heiß und dünn aufzutragen. Ein Zusatz von Leinölfirniß wird angewendet, wenn die zusammengeleimten Gegenstände der Näße ausgesetzt sind. Nach Karmarsch ist der Widerstand geleimter Flächen pr. Quadratzoll ungefähr folgender:

für	Hirnholz auf Hirnholz	Fasernholz auf Fasernholz
Laubholz	2000 Pfd.	1100 Pfd.
Nadelholz . . .	1600 »	300 »

Der Sicherheit wegen bringt man nur $1/10$ dieser Kraft in Rechnung.

Der gewöhnliche Rost- oder Eisenkitt, welcher zur Verbindung von Wasser- und Dampfröhren angewendet wird, be-

steht aus 2 Thln. Salmiak und 1 Thl. Schwefelblumen, und wird unmittelbar vor dem Gebrauch mit 60 Thln. feine Eisenspähne Wasser angemacht, welchem der sechste Theil Essig oder eine kleine Menge Schwefelsäure zugesetzt ist. Auch 2 Thle. Salmiak und 1 Thl. Schwefel mit 16 Thln. Eisenfeile, vermengt mit einer gleichen Menge Eisenfeile und mit Wasser zu einem dicken Brei angemacht. Folgender Eisenkitt hält die Glühhitze aus und wird vorzüglich zur Verbindung von Röhren angewendet, welche dem Feuer ausgesetzt sind: 4 Thle. Eisenfeilspähne, 2 Thle. Thon, 1 Thl. zerstoßene Scherben von hessischen Tiegeln (oder Chamottemasse) vermengt und mit einer Kochsalzauflösung zu einem Teige angemacht. Ebenso 100 Thle. rostfreie Eisenfeilspähne (oder zerstoßene Dreh- oder Bohrspähne) mit 1 Thl. Salmiak gemengt und mit Urin angefeuchtet.

Wasserdichter Oelkitt besteht in einer steifen Salbe aus Leinölfirniß und Bleiweiß oder Mennige. Ebenso zu gleichen Theilen Bleiweiß, Braunstein und weißer Pfeifenthon, mit gutem Leinölfirniß angemacht. Auch 5 Thle. Bleiweiß, 2 Thle. Mennige und 4 Thle. Thon mit Leinölfirniß.

Der gewöhnliche wasserdichte Kitt, welcher namentlich zur Verbindung gußeiserner Wasserleitungsröhren dient, ist ein inniges Gemenge von 24 Thln. hydraulischem Kalk, 8 Thln. Bleiweiß, 2 Thln. Silberglätte und 1 Thl. Colophonium mit 3 Thln. altem Leinöl angemacht, in welchem man beim Sieden $1\frac{1}{2}$ Thl. Colophonium aufgelöst hat.

Der Harzkitt besteht aus 2 Thln. geschmolzenem Pech mit 1 Thl. feinem Ziegelmehl und einem Zusatz von Schwefel, oder aus 4 Thln. schwarzem Pech, 1 Thl. Wachs und 1 Thl. Ziegelmehl; oder es werden 4 Thle. schwarzes Pech und 1 Thl. Schwefel zusammengeschmolzen und mit einem Gemenge aus Eisenfeilspähnen und Ziegelmehl eingerührt.

Kleine Gegenstände werden durch Schell- oder Siegellack, welcher fein pulverisirt mit starkem Weingeist zu einem Brei angemacht ist, zusammengekittet.

§. 79. Befestigung der Maschinentheile durch Zusammenlöthen. Das Weichloth ist entweder reines Zinn oder eine Mischung aus Zinn und Blei, oder eine solche aus Zinn, Blei und Wismuth. Das sogenannte Schnellloth besteht am besten aus 17 Thln. Zinn und 10 Thln. Blei, welches bei 169° C. schmilzt, wogegen einfaches Zinn bei $227\frac{1}{2}$° C. zum Schmelzen gelangt.

Das Hart- oder Schlagloth giebt eine festere Verbindung als das Weichloth, und wird daher vorzüglich zum Löthen des Kupfers, Messings, Eisens, Stahls u. s. w. angewendet. Es besteht dieses in der Regel aus einem sehr zinkhaltigen Messing. Das strengflüssige gelbe Messingloth besteht aus 7 Thln. Messingblechschnitzeln und 1 Thl. Zink, nächstdem aus 3 bis 4 Thln. Messingblechschnitzeln mit 1 Thl. Zink, leicht-

flüssiges gelbes Loth zum Löthen von Messing dienlich, wird aus 5 Thln. Messing und 2 bis 5 Thln. Zink zusammengesetzt. Das halbweiße Messingloth besteht aus 12 Thln. Messing, 4 bis 7 Thln. Zink und 1 Thl. Zinn oder aus 22 Thln. Messing, 10 Thln. Zink und 1 Thl. Zinn.

Das weiße Messingloth ist zusammengesetzt aus 20 Thln. Messing, 1 Thl. Zink, 4 Thln. Zinn oder aus 11 Thln. Messing, 1 Thl. Zink, 2 Thln. Zinn.

Zum Löthen des Kupfers dient die Legirung: 5 Thle. Kupfer + 1 Thl. Blei. Das reine Kupfer dient zum Löthen des Eisens, und das Gußeisen insbesondere zum Löthen des Schmiedeeisens.

Damit das heiße Metall während des Löthens nicht orydire, muß die Luft abgehalten werden, und zwar beim Weichlöthen durch Colophonium, Salmiak, Oel, und beim Hartlöthen durch Borar, Glaspulver u. s. w.

Das Schweißen des Schmiedeeisens und das Verstählen desselben erfolgt bei der Weißglühhitze oder circa 90° Wedgwood.

§. 80. Zusammennageln, Dübeln und Falzen. Auf jeden Quadratzoll desjenigen Theiles der Oberfläche eines eisernen Nagels, welcher ins Holz eingetrieben wird, hat man, nach Karmarsch, auf folgende Haltkraft, oder Kraft zum Herausziehen zu rechnen.

Haltkraft	in der Richtung der Holzfasern	quer gegen die Holzfasern
bei Buchen- und Eichenholz	1100 Pfund	1650 Pfund
bei Tannen- und Lindenholz .	500 „	800 „

Der Sicherheit wegen ist in der Anwendung nur auf eine Haltkraft von $^1/_{10}$ dieser Werthe zu rechnen.

Das vorgebohrte Loch soll höchstens $^2/_3$ der Nageldicke zur Weite haben.

Hölzerne Nägel und Dübel werden nicht selten eingeleimt, eingekittet oder durch einen Keil festgehalten.

Um den Falzen eine größere Haltbarkeit zu verschaffen, werden sie noch verlöthet oder zusammengenietet.

Eiserne Reifen sind in stark erhitztem Zustande aufzutreiben.

§. 81. Zusammennieten. Die Dimensionen einer gewöhnlichen schmiedeeisernen Niete AB, Fig. 418 (a. f. S.), hängen von der Dicke δ des zu verbindenden Bleches ab, und sind folgende:

Die Dicke des Bolzens, $d = 2\,\delta$ bis $3\,\delta$, Durchmesser des Setzkopfes, $d_1 = 1{,}8\,d$, Höhe desselben, $h_1 = 0{,}6\,d$, der Durchmesser des conischen Schließkopfes, $d_2 = 2\,d$, dessen Höhe

$h_2 = 0{,}8\,d$, und die Höhe desselben vor dem Anschmieden, $h = 1{,}1\,d$. Wird ein fester und dichter Verband verlangt, so macht man $d = 2\,\delta$, soll derselbe nur fest sein, so kann man $d = 3\,\delta$ machen. Im ersteren Falle ist die Entfernung der Nietaxen von einander, $a = 5\,\delta$ und die Entfernung derselben vom Blechrande, $b = 3\,\delta$, im zweiten Falle aber, $a = 10\,\delta$ und $b = 5\,\delta$. Im ersteren Falle hat eine Niete das Gewicht $G = 0{,}6532\,d^3 = 5{,}23\,\delta^3$, und im zweiten das Gewicht $G = 0{,}5816\,d^3 = 15{,}70\,\delta^3$ Pfund. Es ist das Gewicht der Nieten für den laufenden Fuß Nietlänge: im ersten Falle: $G_1 = 12{,}540\,\delta^2$, und im zweiten: $G_1 = 18{,}840\,\delta^2$ Pfund. Hiernach ist folgende Tabelle berechnet.

Fig. 418.

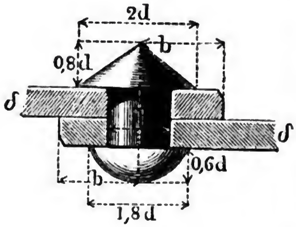


Tabelle
über das Gewicht eiserner Nieten.

Blechstärke δ in Sechszehntel Zoll	Gewicht in Pfunden von 1000 Stück Nieten für eine		Gewicht der Nieten in Pfunden für den laufenden Fuß Nietfuge, für eine	
	dichte und feste Fuge, wo $d = 2\delta$	feste Fuge, wo $d = 3\delta$	dichte und feste Fuge, wo $d = 2\delta$	feste Fuge, wo $d = 3\delta$
1	1,3	3,8	0,049	0,074
2	10,2	30,7	0,196	0,294
3	34,5	103,5	0,441	0,662
4	81,7	245,3	0,784	1,177
5	159,6	479,1	1,225	1,840
6	275,8	827,9	1,764	2,650
7	438,0	1314,7	2,400	3,606
8	653,7	1962	3,135	4,710
9	930,8	2794	3,968	5,961
10	1277	3833	4,898	7,360
11	1700	5102	5,927	8,905
12	2206	6623	7,054	10,60
13	2805	8421	8,279	12,44
14	3504	10518	9,601	14,42
15	4309	12937	11,02	16,56
16	5230	15700	12,54	18,84

Das Verhältniß der Festigkeit des genieteten Bleches zu der des ganzen Bleches ist:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{\pi\, n\, d}{\pi\, n\, d + 4\,\delta} = \frac{1}{1 + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\delta}{n\, d}},$$

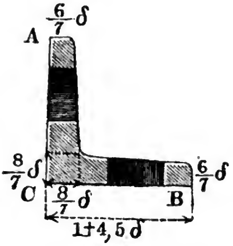
wo n die Anzahl der um $2\,d$ bis $2{,}5\,d$ von einander abstehenden Nietenreihen bezeichnet. Für $n = 1$ und $d = 2\,\delta$ ist:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{\pi}{\pi + 2} = 0{,}61, \text{ dagegen für } n = 1 \text{ und } d = 3\delta:$$

$$\frac{S_1}{S} = \frac{3\pi}{3\pi + 4} = 0{,}70, \text{ und für } n = 2,\ d = 2\delta:$$

$$\frac{S_1}{S} = \frac{\pi}{\pi + 1} = 0{,}76.$$

Fig. 419.



Die Winkeleisen ACB, Fig. 419, welche zur Winkelbildung und zum Absteifen von Blechwänden dienen, haben die Schenkellänge

$CA = CB = 1 + 4{,}5\,\delta$ Zoll, die Dicke am Scheitel, $= 8/_7\,\delta$, und die an den Enden, $= 6/_7\,\delta$, folglich die mittlere Dicke $=$ der Blechdicke δ.

§. 82. **Zusammenschrauben.** Die Befestigungsschrauben haben in der Regel ein trianguläres oder trapezoidales Gewinde; nur bei größerem Durchmesser wendet man Befestigungsschrauben mit quadratischem Gewinde an.

Aus der zulässigen Spannkraft P einer Schraube in der Axenrichtung, bestimmt sich die entsprechende Stärke eines schmiedeeisernen Schraubenbolzens durch die Formel

$d = 1/_9\sqrt{P}$ Centimeter, wenn P in Kilogramm gegeben ist, oder $d = 0{,}031\sqrt{P}$ Zoll, wenn P in Neupfund gegeben ist. Umgekehrt ist $P = 81\,d^2$ Kilogramm, auch $P = 1041\,d^2$ Pfund.

Hölzerne Schraubenbolzen macht man bei gleicher Spannkraft $2^1/_2$ bis 3mal so dick als schmiedeeiserne.

Die aus der Spannung P der Schraube hervorgehende Reibung $F = \varphi P$ ist die Kraft, mit welcher die befestigten Stücke zusammengehalten werden. Hierbei ist der Reibungscoefficient bei trockenem Zustande der Flächen zu setzen:

für Holz auf Holz: $\varphi = 0{,}5$,
» Holz auf Eisen: $= 0{,}2$,
» Eisen auf Eisen: $= 0{,}16$.

Bei dem Schraubensystem von Whitworth ist die Ganghöhe $h = 0{,}08\,d + 0{,}04$ Zoll, die Gangtiefe:

$$e = 0{,}64\,h = 0{,}051\,d + 0{,}025 \text{ Zoll},$$

folglich der Kerndurchmesser:

$$d_1 = d - 2e = 0{,}9\,d - 0{,}05 \text{ Zoll}.$$

Der Querschnitt der Gänge dieses Schraubensystemes bildet ein Trapez, wie $ABDE$, Fig. 420 (a. f. S.), mit abgerundeten Kanten. Die kurze parallele Seite AB desselben ist $1/_4\,e$, und die lange Seite $DE = h - 1/_4\,e$, und hiernach die Schärfe der nicht abgestumpften Schraubenkante nahe 56 Grad.

Der Schraubenkopf K, Fig. 421, ist gewöhnlich quadratisch, erhält die Seitenlänge $s_1 = 1,4\,d + 0,2$ Zoll und

Fig. 421.

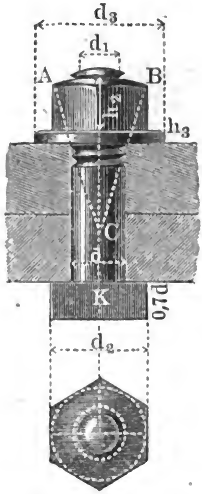
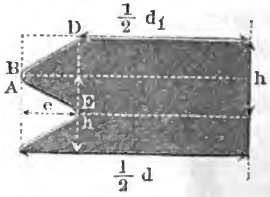


Fig. 420.



die Höhe $h_1 = 0,7\,d$. Die Schraubenmutter ist gewöhnlich sechsseitig und der Durchmesser des eingeschriebenen Kreises mißt $d_2 = s_1 = 1,4\,d + 0,2$. Die Höhe der Mutter ist $h_2 = d$ und der Halbmesser $CA = CB$ der kugelförmigen Begrenzungsfläche derselben, $r_2 = {}^5/_3\,d_2$.

Um das bei Stößen leicht eintretende Zurückgehen der Schrauben zu verhindern, schraubt man noch Gegenmuttern auf, welche die Höhe $h_4 = {}^1/_2\,d$ erhalten.

Die Unterlagsscheibe erhält den Durchmesser $d_3 = {}^4/_3\,d_2$ und die Höhe $h_3 = {}^1/_{10}\,d_2$. Schraubenmuttern, welche man am Umfange unbearbeitet läßt, erhalten den Durchmesser $d_2 = 1,45\,d + 0,28$ Zoll und dreht man nur an den Grundflächen unter 30 Grad Neigung kegelförmig ab. (Siehe Reuleaux' Constructeur.)

Bei den Whitworth'schen Schrauben ist der Steigungswinkel α des Gewindes am Bolzenumfange durch die Formel

$$tang.\,\alpha = \frac{h}{2\,\pi\,d} = 0,01273 + \frac{0,00637}{d}$$

bestimmt, wonach z. B. für $d = {}^1/_2$; 1 und 2 Zoll, $tang.\,\alpha = 0,02547$; 0,01910 und 0,01591, oder $\alpha = 1^0,27'$; $1^0,5'$ und $0^0,55'$ ausfällt.

Bei flachgängigen Befestigungsschrauben macht man $h = 0,09\,d + 0,08$, ferner $e = 0,045\,d + 0,04$ Zoll, folglich $d_1 = 0,91\,d - 0,08$, sowie $d_2 = 1,4\,d + 0,2$ Zoll und $h_2 = 1,08\,d + 0,96$ Zoll.

Bei den Schraubenverbindungen kommen vorzüglich die Kränze oder Flantschen zur Anwendung. Ist e die Dicke der Röhren- oder Cylinderwand, so macht man die Dicke der Flantsche, $e_1 = 1,2\,e + 0,125$ Zoll, die Breite derselben, $b = 1,8\,e + 0,4$ Zoll und die Dicke eines Schraubenbolzens:

$d = 0{,}8\,e$; ist r der innere Röhrenhalbmesser in Zollen, so hat man noch die Anzahl der Schrauben einer Flantschenverbindung:

$$n = \frac{r}{2} + 3.$$

Die Verbindungskeile wirken ähnlich wie die Verbindungsschrauben. Die gewöhnlichen breiten Kuppelkeile erhalten ein Ansteigen von $2\frac{1}{2}$ Grad, ihre mittlere Breite wird 0,9 und ihre Höhe 0,45 der Hülsenstärke gemacht. Den hohen Verbindungskeilen AB, Fig. 422, giebt man ein Ansteigen von 5 Grad, die Höhe $b = 0{,}40$ und die Dicke $= 0{,}25$ der Stangenstärke. Die hierbei angewendeten Gegen- oder Hakenkeile CD erhalten dieselben Dimensionen.

Fig. 422.

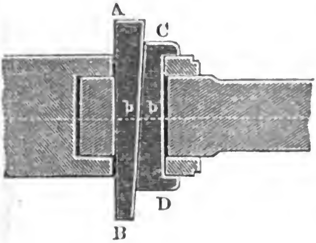


Tabelle.

Die Dimensionen der Whitworth'schen dreiseitigen Schraubengewinde.

Durchmesser d des Schraubenbolzens			Durchmesser d_1 des Schraubenkerns in engl. Zollen	Anzahl der Gewinde auf 1 engl. Zoll Länge
engl. Zoll	Millimeter	preuß. Zoll		
$\frac{1}{4}$	6,3	0,243	0,15	20
$\frac{5}{16}$	7,9	0,303	0,20	18
$\frac{3}{8}$	9,5	0,364	0,26	16
$\frac{1}{2}$	12,7	0,486	0,37	12
$\frac{5}{8}$	15,9	0,607	0,48	11
$\frac{3}{4}$	19,0	0,728	0,59	10
$\frac{7}{8}$	22,2	0,850	0,70	9
1	25,4	0,971	0,81	8
$1\frac{1}{8}$	28,6	1,092	0,92	7
$1\frac{1}{4}$	31,7	1,214	1,03	7
$1\frac{3}{8}$	34,9	1,335	1,14	6
$1\frac{1}{2}$	38,1	1,457	1,25	6
$1\frac{5}{8}$	41,3	1,578	1,36	5
$1\frac{3}{4}$	44,4	1,700	1,47	5
$1\frac{7}{8}$	47,6	1,821	1,58	$4\frac{1}{2}$
2	50,8	1,942	1,69	$4\frac{1}{2}$
$2\frac{1}{4}$	57,1	2,185	1,91	4
$2\frac{1}{2}$	63,5	2,428	2,13	4
$2\frac{3}{4}$	69,8	2,671	2,35	$3\frac{1}{2}$
3	76,2	2,913	2,57	$3\frac{1}{2}$

Tabelle.

Die Dimensionen der Whitworth'schen dreiseitigen Schraubengewinde.

Durchmesser d des Schraubenbolzens			Durchmesser d_1 des Schraubenkerns in engl. Zollen	Anzahl der Gewinde auf 1 engl. Zoll Länge
engl. Zoll	Millimeter	preuß. Zoll		
$3\frac{1}{4}$	82,5	3,156	2,79	$3\frac{1}{4}$
$3\frac{1}{2}$	88,9	3,399	3,01	$3\frac{1}{4}$
$3\frac{3}{4}$	95,2	3,642	3,23	3
4	101,6	3,885	3,45	3
$4\frac{1}{4}$	107,9	4,127	3,66	$2\frac{7}{8}$
$4\frac{1}{2}$	114,3	4,370	3,87	$2\frac{7}{8}$
$4\frac{3}{4}$	120,6	4,613	4,11	$2\frac{3}{4}$
5	127,6	4,856	4,33	$2\frac{3}{4}$
$5\frac{1}{4}$	133,3	5,098	4,54	$2\frac{5}{8}$
$5\frac{1}{2}$	140,7	5,341	4,75	$2\frac{5}{8}$

§. 83. Anstreichen, Firnissen und Lackiren.

Die Farbstoffe oder Pigmente sind für jede Farbe nach steigenden Preisen folgende:

Weiß: Weißkalk, Kreide, Blei-, Zink-, Kremser- und Schieferweiß,

Roth: Bolus, rother Ocker, englisches oder venetianisches Roth, Mineralroth (Caput mortuum), Mennige, Berlinerroth, Purpur oder Cochenilleroth, Krapproth, Chromroth, Zinnober, Carmin.

Blau: Mineralberg-, Kalk-, Mineral-, Neu-, Berliner-, Bremerblau, Ultramarin, englisch Bergblau, Pariserblau.

Gelb: Gelber Ocker, Chalagelb, Schüttgelb, Terra siena, Chromgelb, Königsgelb, Neu- oder Parisergelb.

Grün: Grüne Erde, Kölnische Erde, Stein-, Chrom-, Neuwiedergrün, grünes Ultramarin, Patent-, Schweinfurther-, Kaiser-, Seiden-, Kasselergrün.

Braun: Kasselerbraun, Umbra, Rehbraun, brauner Ocker, Mineralbraun (Caput mortuum, Kolkothar).

Grau: Silber- oder Chemischgrau.

Schwarz: Schiefer-, Oel-, Bein-, Ruß-, Pariser-, Frankfurter- oder Rebenschwarz.

Große gußeiserne Maschinentheile erhalten einen schwarzen Anstrich durch heißen Steinkohlentheer, worin gepulvertes Reißblei eingerührt ist. Ebenso 1 Thl. Asphalt und 1 Thl. Colophonium in 8 Thln. erhitztem Kienöl aufgelöst. Erdtheer, welcher durch Abdampfen einen Theil seines

Oeles verloren, auf das erhitzte Eisen aufgetragen, giebt einen festen Anstrich, welcher auch noch mit einer Oelfarbe überdeckt werden kann.

Ein guter Anstrich für Maschinentheile ist auch: 1 Thl. Guttapercha, 2 Thle. Colophonium und 1 Thl. Schellack in 17 Thln. rectificirtem Steinkohlentheeröl bei 70 bis 75 Grad Wärme aufgelöst und mit beliebigen Farbenstoffen versetzt. Schmiedeeiserne Brücken werden mit Bleiweißfarbe wie folgt angestrichen. Das Eisenwerk wird zuerst durch Kratzen und Bürsten mittels Draht- und Vorstenbürsten gehörig gereinigt, dann werden alle Löcher und Risse mit einem Kitt aus Mennige, Bleiweiß und Leinölfirniß ausgefüllt, und nachdem dieser eingetrocknet ist, erfolgt ein nochmaliges Bürsten. Hierauf kommt der Anstrich mit einer aus 560 Thln. Bleiweiß, 133 Thln. rohem, sowie 18 bis 36 Thln. gekochtem Leinöl und 18 Thln. Terpentinöl bereiteten Farbe. Dieser Anstrich wird nach ein bis zwei Wochen wiederholt, und beim vierten Mal mit trocknem weißen Sande gleichmäßig bestreut.

Zum Schutz gegen das Rosten des Eisens dient auch das Verzinken oder Galvanisiren. Auch hat man einen sogenannten galvanischen Anstrich, welcher in einem mit gepulvertem Zink angemachten Leinölfirniß besteht.

Ein Schutzmittel gegen das Rosten des Eisens besteht auch darin, daß man dasselbe fast glühend mit Wachs, Talg, Pech, Horn oder Steinkohlentheer einreibt.

Der gewöhnliche Leinölfirniß besteht aus gekochtem Leinöl, welchem man bei 135 bis 140° Wärme, auf je 2½ Quart, 1 Loth calcinirten Zinkvitriol zusetzt; den besseren Leinölfirniß erhält man: wenn man 100 Thle. Leinöl mit 6 Thln. Bleiglätte und 5 Thln. Wachs zusammen dick einkocht und dann das Klare abgießt. Der Copalfirniß oder -Lack wird erzeugt, wenn man 7 Thle. geschmolzenen Copal mit 5 Thln. gekochtem Leinöl zusammenbringt, später, wenn die Mischung Fäden zieht, 27 Thle. Terpentinöl zusetzt, und zuletzt das Ganze durch ein Drahtsieb filtrirt. Der Bernsteinfirniß wird gebildet aus 6 Thln. geschmolzenem Bernstein, 19½ Thln. gekochtem Leinöl und 37 Thln. Terpentinöl. Der schwarze Firniß für Eisenwerk entsteht, wenn man 48 Thle. Asphalt in einem eisernen Kessel schmilzt und kocht, dann 7 Thle. Mennige, 7 Thle. Bleiglätte, 3 Thle. Zinkvitriol und 97 Thle. gekochtes Leinöl zusetzt, wiederholt kocht, und nach gehöriger Abkühlung mit 280 bis 300 Thln. Terpentinöl verdünnt. Auch: 58 Thle. rohes Leinöl bei gelindem Feuer mit einer Mischung von 10 Thln. egyptischen Asphalt und 19½ Thln. Leinöl nach und nach vier Mal versetzt, und unter Umrühren noch 7 Thle. Mennige, 7 Thle. Glätte und 3 Thle. Zinkvitriol hinzugebracht und gekocht, endlich im abgekühlten Zustande noch 280 Thle. Terpentinöl zugesetzt und durch ein Drahtsieb gegossen, giebt ebenfalls einen guten schwarzen Firniß.

Ordinärer Weingeistfirniß besteht aus 5 Thln. Weingeist und 1 Thl. Schellack. Auch setzt man diesen Firniß aus 1 Thl. Schellack, 1 Thl. Mastix und 7 Thln. Weingeist zusammen. Fast ganz farblos ist folgender Sandarachfirniß: 12 Thle. Sandarach, 6 Thle. Mastix, 2 Thle. Elemi, 1 Thl. venetianischer Terpentinöl mit 64 Thln. Weingeist.

Bei Bereitung der Weingeistfirnisse werden die festen oder färbenden Bestandtheile gepulvert, mit dem dritten Theil grobem Glaspulver vermengt und in einem gläsernen Gefäße mit Weingeist übergossen.

Beim Lackiren des Holzes wird das Holz, nachdem man es mit Bimsstein abgerieben hat, zunächst mit heißem Leinölfirniß, welcher einen Zusatz von Bleiweiß und Umbra erhält, getränkt, dann zwei bis vier Mal die aus dickem Bernsteinfirniß, Bleiweiß, Mennige und Umbra zusammengesetzte Grundfarbe aufgetragen, nach gehörigem Eintrocknen die Oberfläche mittels Bimssteinpulver, Filz und Wasser glatt geschliffen, ferner die mit Bernstein- oder Copalfirniß angemachte Hauptfarbe drei bis zehn Mal aufgetragen, und, um den gehörigen Glanz hervorzubringen, noch zwei bis drei Mal mit Copalfirniß überstrichen, worauf endlich nur noch ein Schleifen, Poliren und Abputzen durch Bimsstein, Tripel und Haarpuder folgt.

§. 84. **Schmiermittel.** Die Schmiermittel sollen nicht bloß den Reibungswiderstand, sondern auch die Erwärmung und das Abführen der sich reibenden Körper vermindern. Talg- und Theerschmiere ist bei großem Druck und kleiner Geschwindigkeit, z. B. bei Wasserradzapfen, Fett- und Oelschmiere hingegen bei kleineren Drücken und größerer Geschwindigkeit, z. B. bei Drehbänken, Spinnmaschinen u. s. w. in Anwendung zu bringen. Gewöhnliche grüne Seife wird beim temporären Gleiten von Holz auf Holz, z. B. beim Vomstapellassen eines Schiffes angewendet. Um sie bei einer ununterbrochenen Bewegung anwenden zu können, ist ein Zusatz von Oel und eine Reduction des Wassergehaltes bis auf 25 bis 30 Proc. nöthig. Beim Schmieren der Zähne der Zahnräder versetzt man die grüne Seife mit dem vorher gehörig filtrirten Oele, welches von den Zapfenlagern abträufelt und in Blechschalen aufgefangen wird. Auch versetzt man wohl diese Schmiere mit ganz reinem Graphit (Reißblei) oder Glasstaub. Eine kostspieligere Zahnschmiere wird aus 2 Thln. Wachs, 1 Thl. Leinöl mit einem Zusatz von Graphit zusammengesetzt. Das Schöpsfett ist als Schmiermitel dem Schweinefett vorzuziehen. Man muß das eine oder das andere möglichst unverfälscht und rein in Anwendung bringen.

Die Harz-, Theer-, oder Erdpechschmiere hat den Vorzug, daß sie nicht trocken und nicht von der Luft angegriffen wird. Man versetzt zu diesem Zwecke 1 Thl. fein gepulvertes Harz mit 8 Thln. Schweineschmalz. Man präparirt auch eine gute

Schmiere aus 2 oder 3 Thln. Wasserblei und 1 Thl. geschmolzenem Schweinefett.

Seifen aus Oel und Kalk oder Soda geben gute Axenschmiere und werden besonders bei Eisenbahnwagen gebraucht. Die Booth'sche Axenschmiere entsteht, wenn man $1/2$ Pfd. Soda in 4 Quart Wasser auflöst, mit 3 Pfd. Talg und 6 Pfd. Palmöl mengt, und bei 98° Wärme stetig umrührt.

Das Recept für eine französische Eisenbahnwagenschmiere ist folgendes.

Bestandtheile.	Composition für		
	den Sommer	mittlere Jahreszeiten	den Winter
Palmöl	10	30	45
Seife	50	30	15
Wasser	30	36	38
Kohlensaure Soda .	10	4	2

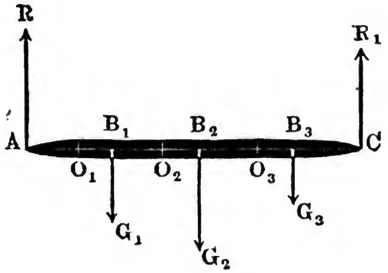
Ein Zusatz von Schwefel wirkt vorzüglich gegen die Erhitzung der sich reibenden Körper, weshalb man denselben gewöhnlich beim Schmieren schnell umlaufender Zapfen anwendet.

Nicht alle Oele sind zum Schmieren der Maschinen geeignet; die Fette und animalischen Oele sind den vegetabilischen Oelen vorzuziehen. Die letzteren trocknen oft zu leicht ein, wie z. B. das Lein-, Hanf-, Nuß- und Mohnöl, oder sind zu flüssig, oder werden leicht ranzig. Das beste Oel zum Schmieren ist das Ochsenklauen- und Knochenöl, wegen seiner Kostbarkeit wird es jedoch fast nur bei Uhren und Meßinstrumenten angewendet. Olivenöl gehört zu den besseren Schmiermitteln, und nächstdem noch Rüböl. Die Liard'sche Schmiere besteht aus 50 Thln. gutem Rüböl und 1 Thl. Kautschuck. Wasser läßt sich nur als Schmiermittel anwenden, wenn es ununterbrochen zu- und abfließen kann.

Man prüft die Güte des Oeles durch sogenannte Oleometer.

§. 85. Tragwellen. Wenn eine Tragwelle AC, Fig. 423, von der Länge $AC = l$, die Kräfte G_1, G_2 auf-

Fig. 423.



nimmt, deren Angriffspunkte B_1, B_2 um $AB_1 = l_1$, $AB_2 = l_2 \cdot\cdot$ vom Zapfenende A abstehen, so ist der Zapfendruck in B:

$R_1 = \frac{G_1 l_1 + G_2 l_2 + \cdot\cdot}{l}$, und dagegen der in A:

$$R = (G_1 + G_2 + \cdot\cdot) - R_1 = \frac{G_1 (l - l_1) + G_2 (l - l_2) + \cdot\cdot}{l}.$$

Von den Kräften $G_1, G_2 \cdot\cdot$ kann die eine auch das Gewicht G der Welle repräsentiren, welches natürlich im Schwerpunkt der Welle angreifend zu denken ist. Mittels der einander das Gleichgewicht haltenden Kräfte $G_1, G_2 \cdot\cdot$, und R, R_1 kann man auch das Biegungsmoment der Welle an jeder Stelle $O_1, O_2, O_3 \ldots$ finden. Ist $A\,O = x_1, A\,O_2 = x_2, A\,O_3 = x_3 \cdot\cdot$, so hat man das Biegungsmoment

in O_1, $M_1 = Rx_1$,
in O_2, $M_2 = Rx_2 - G_1\,(x_2 - l_1)$,
in O_3, $M_3 = Rx_3 - G_1\,(x_3 - l_1) - G_3\,(x_3 - l_2)$.

Aus dem Biegungsmoment M für irgend eine Stelle der massiven Welle von kreisförmigem Querschnitt, ist der Durchmesser d derselben an der nämlichen Stelle durch die Formel

$$M = \frac{\pi d^3}{32} T, \text{ oder } d = \sqrt[3]{\frac{32\,M}{\pi\,T}}$$

bestimmt (s. S. 387), wobei T den Tragmodul des Wellenmaterials bezeichnet.

Für gußeiserne Wellen mit kreisförmigen Querschnitten ist mit Rücksicht auf die nöthige Sicherheit:

$d = 0{,}12 \sqrt[3]{M}$ Zoll zu setzen, wenn M in Zollpfund ausgedrückt wird, oder

$d = 0{,}29 \sqrt[3]{M}$ Centimeter, wenn M in Kilogrammcentimeter angegeben ist.

Schmiedeeiserne Wellen macht man um ein Viertel und stählerne um ein Drittel schwächer, dagegen hölzerne Wellen zweieinhalb ($2^1/_2$) bis drei (3) Mal so dick als gußeiserne, zumal wenn dieselben durch Arm- oder Zapfenlöcher geschwächt werden. Geschmiedete und hölzerne Wellen erhalten oft einen quadratischen Querschnitt, in welchem Falle die Seitenlänge $s = 0{,}94\,d$ zu setzen ist.

Für eine regelmäßige sechsseitige Welle ist dagegen die Seitenlänge $s_1 = 0{,}566\,d$ zu nehmen.

Wegen Materialersparniß macht man gußeiserne Wellen auch hohl oder gerippt.

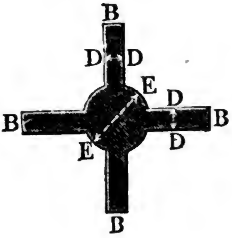
Ist das Verhältniß $\psi = \frac{d_2}{d_1}$ des Durchmessers d_2 der Höhlung zu dem äußeren Durchmesser d_1 einer hohlen Welle gegeben, so hat man zu setzen:

$$d_1 = \frac{d}{\sqrt[3]{1 - \psi^4}} \text{ und } d_2 = \psi\, d_1 = \frac{\psi\, d}{\sqrt[3]{1 - \psi^4}}.$$

Für $\frac{d_2}{d_1} = 0,6$, hat man

$d_1 = 1,047\,d$ und $d_2 = 0,628\,d$, also $d_1 - d_2 = 0,419\,d$.

Fig. 424.



Bezeichnet für den Querschnitt einer gerippten Welle, Fig. 424, $\mu = \frac{h_1}{d_1}$, das Verhältniß der ganzen Rippenhöhe $BB = h_1$ zum Durchmesser $EE = d_1$ des Wellenkerns, und $\nu = \frac{s_1}{d_1}$, das Verhältniß der Dicke $DD = s_1$ der Rippe zu eben diesem Durchmesser, so ist zu nehmen:

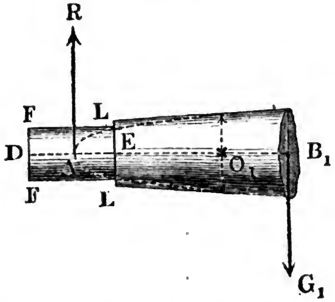
$$d_1 = \frac{d\sqrt[3]{\mu}}{\sqrt[3]{1 + 1,7\,[(\mu^3 - 1)\,\nu + (\mu - 1)\,\nu^3]}},$$

woraus dann $h_1 = \mu d_1$, sowie $s_1 = \nu d_1$ folgt.

Gewöhnlich macht man $\mu = 3$ und $\nu = \frac{1}{3}$, so daß sich $d_1 = 0,574\,d$, $h_1 = 1,722\,d$ und $s_1 = 0,191\,d$ ergiebt.

Für das Endstück AB_1, Fig. 425, einer Tragwelle, vom geometrischen Ende A bis erstem Tragpunkt B_1 gemessen, ist allgemein das Biegungsmoment in irgend einem Punkte O_1,

Fig. 425.



$$M = R x_1,$$

und das Stärkenverhältniß

$$\frac{y_1}{d_1} = \sqrt[3]{\frac{x_1}{l_1}},$$

wenn l_1 die Länge AB_1, d_1 den Durchmesser der Welle in B_1 und y_1 den am Ende von $A\,O_1 = x_1$ bezeichnet. Hiernach läßt sich der Durchschnitt dieses Endstückes construiren.

Auch ist $\frac{d_0}{d_1} = \sqrt[3]{\frac{l_0}{2 l_1}}$, wobei l_0 die Länge DE und d_0 die Stärke FF des Zapfens der Welle bezeichnet.

Das Verhältniß $\lambda = \frac{l_0}{d_0}$ ist gewöhnlich $= 1,25$ bis $1,5$, also als gegeben anzusehen, wonach sich die Zapfenstärke d_0 durch die Formel

$$d_0 = \sqrt{\frac{32\lambda R}{\pi T}}$$ berechnen läßt.

Bei Wellen, welche mehr als eine Umdrehung pr. Sec machen, nimmt man λ größer, nämlich = 1,5 bis 3,0.

Für gußeiserne Zapfen folgt

$d_0 = 0{,}0415 \sqrt{\lambda R}$ Zoll, wenn R in Neupfund, und

$d_0 = 0{,}155 \sqrt{\lambda R}$ Centimeter, wo R in Kilogramm gegeben ist.

Für $\lambda = 1{,}25$ ergiebt sich hiernach

$d_0 = 0{,}0464 \sqrt{R}$ Zoll $= 0{,}173 \sqrt{R}$ Centimeter,

für $\lambda = 1{,}50$ dagegen

$d_0 = 0{,}0508 \sqrt{R}$ Zoll $= 0{,}190 \sqrt{R}$ Centimeter.

Folgende Tabelle enthält die Zapfendrücke, welche bei dem Verhältnisse $\lambda = 1{,}25$, dem Zapfendurchmesser 1, 2, 3 . . . 8 Zoll entsprechen.

1	2	3	4	5	6	7	8 Zoll
464	1858	4180	7432	11610	16720	22760	29730 Pfd.

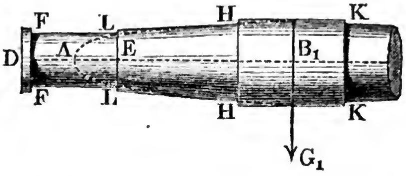
An der Stelle E, wo sich der Zapfen an die Welle anschließt, giebt man einen Anlauf LL von der Höhe

$$e = 0{,}07\, d_0 + 0{,}125 \text{ Zoll.}$$

Auch bringt man wohl am Ende D des Zapfens DE, Fig. 426, einen Anlauf FF von derselben Höhe e und der Breite $b = 1\frac{1}{2}\, e$ an.

Der cylindrische Tragkopf, in welchem die Last G_1, z. B. ein Hebel oder ein Rad, mittels einer Hülse aufruht, erhält eine die Hülsenlänge nur wenig überschreitende Länge $HK = a$, und schließt sich bei $H\,H$ in einem Anlauf an den Wellenhals EHH an. Ist der letztere kurz, so erhält er die einfache Kegelform, außerdem ist er nach dem durch die Gleichung $\frac{y_1}{d_1} = \sqrt[3]{\frac{x_1}{l_1}}$ gegebenen cubischen Paraboloid zu construiren.

Fig. 426.



Ist eine Tragwelle AC, Fig. 427, durch ein Gewicht G nur in einem Punkte B belastet, welcher von dem geometrischen Wellenende oder der Zapfenmitte A um $BA = l_1$ absteht, während die Wellenlänge $AC = l$ ist, so hat man den Zapfendruck in A, $R = \left(\frac{l - l_1}{l}\right) G$, daher das Moment für die Mitte

B des Tragkopfes, $M = R l_1 = G \frac{l_1 (l - l_1)}{l}$, und für das Ende E des Wellenhalses,

$$M_1 = R (l_1 - \tfrac{1}{2} a) = G \frac{(l_1 - \frac{1}{2} a)(l - l_1)}{l} \text{ zu setzen.}$$

Fig. 427.

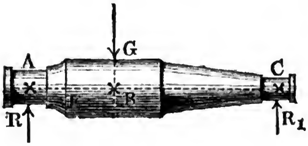
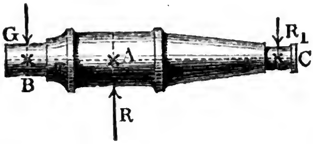


Fig. 428.



Liegt das Gewicht in der Mitte zwischen den Zapfen, so hat man $l_1 = \frac{1}{2} l$, $R = \frac{1}{2} G$, $M = \frac{1}{4} G l$ und $M_1 = \frac{1}{4} G (l - a)$.

Wenn, wie $B A C$, Fig. 428, darstellt, die Last G außerhalb der Zapfenlager angreift, so ist $AB = l_1$ negativ, während $AC = l$ unverändert bleibt, daher ist hier

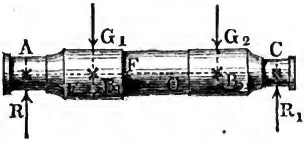
$$R = G \left(\frac{l + l_1}{l}\right), \text{ und}$$

$$R_1 = G - R = - G \frac{l_1}{l},$$

ferner das Moment in A:

$M = G l_1$, das ist E, $M_1 = G \left(l_1 - \frac{a}{2}\right)$ u. s. w. Es vertritt hier der Tragkopf B einen Zapfen; man hat daher auch die Stärke desselben nach der Formel für die Zapfenstärke zu berechnen, dagegen nimmt der Halszapfen A die Stelle des Tragkopfes ein, und es ist daher die Stärke desselben aus dem Momente $M = G l_1$ mittels der Formel für die Wellenstärke zu berechnen.

Fig. 429.



Trägt die Welle $A C$, Fig. 429, zwei Lasten G_1 und G_2, deren Angriffspunkte um l_1 und l_2 vom Zapfenmittel A abstehen, und deren Tragköpfe die Längen a_1 und a_2 haben, so ist

$$R = \frac{G_1 (l - l_1) + G_2 l_2}{l}$$

und $R_1 = \frac{G_1 l_1 + G_2 (l - l_2)}{l}$; ferner das Moment in B_1, $M = R l_1$, das in E, $M_1 = R \left(l_1 - \frac{a_1}{2}\right)$, das in F, $M_2 = R \left(l_1 + \frac{a_1}{2}\right) - G_1 \frac{a_1}{2}$, und das in irgend einem Punkte O des Wellenstückes $B_1 B_2$, welches um $A O = x$ von A absteht,

$$M_x = (R - G_1) x + G_1 l_1.$$

Aus diesen Momenten lassen sich natürlich mittels der Formel für d die Stärken der Welle berechnen.

Ist $G_1 = G_2$, $l_1 = l_2$ und $a_1 = a_2$, so hat man

$$R = R_1 = G_1, M_1 = G_1\left(l_1 - \frac{a_1}{2}\right), \text{ und}$$

$$M = M_2 = M_x = G_1\, l_1.$$

Zu den hölzernen Tragwellen wird gewöhnlich Eichen- oder Tannenholz verwendet, wogegen die besonders einzusetzenden Zapfen derselben aus Guß- oder Schmiedeeisen bestehen. Die Zapfen sind mittels besonderer Stiele, Haken oder Blätter in den Wellhälsen zu verkeilen. Die letzteren sind reichlich so lang als die Welle dick, und nehmen nach den Enden zu, ungefähr $^1/_{10}$ ihrer Länge an Stärke ab. Die schmiedeeisernen Ringe, womit man die Wellenhälse umgiebt, sind 2 bis 4 Zoll breit und $^3/_8$ bis $^3/_4$ Zoll dick, und werden, damit sie die gehörige Conicität erhalten, aus Reifeisen gebildet, welches in der Ebene der Breite nach einem Halbmesser gekrümmt, worin der mittlere Halshalbmesser 20mal enthalten ist. Die Köpfe der Zapfen sind dieselben, wie bei eisernen Wellen; die Stiele derselben nehmen nach innen allmälig an Stärke ab, und sind bei größeren Wellen, mit 2 bis 4 Flügeln oder Blättern von $\frac{d}{3}$ bis $\frac{d}{4}$ Stärke versehen.

Die Durchmesser (d_0) eiserner Fuß- oder Spurzapfen von stehenden Wellen sind unter der Voraussetzung, daß der hier zulässige Druck pr. Quadratzoll 1500 Pfund beträgt, nach folgenden Formeln zu berechnen

$R = 1178\, d_0^2$ Pfund oder 1) $d_0 = 0{,}03 \sqrt{R}$ Zoll und
2) $d_0 = 0{,}111 \sqrt{R}$ Centimeter,

wobei R den Druck der Welle gegen die ebene Lagerfläche bezeichnet, welcher im ersten Falle in Pfund, und im zweiten in Kilogramm anzugeben ist.

Diese Bestimmung gilt nur für langsam umlaufende Wellen, z. B. Göpelwellen; für schnell umlaufende, z. B. Turbinenwellen ist

$$d_0 = 0{,}03 \sqrt{(1 + 0{,}01\,u)\,R} \text{ Zoll}$$
$$= 0{,}111 \sqrt{(1 + 0{,}01\,u)\,R} \text{ Centimeter}$$

zu setzen, wobei u die Anzahl der Umdrehungen der Welle pr. Minute bezeichnet. Stahlzapfen sind um die Hälfte schwächer zu machen.

Bei Turbinenwellen macht man, um der Erwärmung des Zapfens entgegen zu wirken, die Zapfenstärke $d_0 = {}^2/_3\, d$ bis $^3/_4\, d$. Auch hängt man hier wohl die Welle mittels eines Ring- oder Kammzapfens auf, wobei man durch Vergrößerung der Anzahl der Ringe den Druck pr. Quadratzoll beliebig herabziehen kann.

Ist n die Anzahl der Ringe und $b = \beta\, d_0$ die Breite eines Ringes, so hat man hier

$R = 4712\, \beta\, n\, d_0^2$ Pfund, wobei der mittlere Zapfendurchmesser d_0 in Zollen zu geben ist, und daher

$$n = 0{,}0212\, \frac{R}{\beta\, d_0^2},\ \text{z. B. für } \beta = \frac{d_0}{10},\quad n = 0{,}212\, \frac{R}{d_0^3}.$$

§. 86. Transmissionswellen. Das Kraftmoment, welches eine sanft und langsam umlaufende cylindrische Welle aus Gußeisen durch Torsion fortpflanzt, ist bestimmt durch die Formel $Pa = 368\, d^3$ Zollpfund (s. S. 398), wonach die Stärke desselben:

$$d = 0{,}1396\, \sqrt[3]{Pa} = 0{,}678 \sqrt[3]{\frac{Pv}{u}} = 5{,}31\, \sqrt[3]{\frac{L}{u}}\ \text{Zoll}$$

$$= 13{,}88\, \sqrt[3]{\frac{L}{u}}\ \text{Centimeter folgt.}$$

Hierbei ist P in Neupfund, a in Zoll, v in Fuß und L in Pferdekräften zu je 480 Fußpfund zu geben, während u die Umdrehungszahl der Welle pr. Minute bezeichnet.

Schnell und nicht ganz sanft umlaufende Wellen macht man um $\frac{1}{4} d$ bis $\frac{1}{2} d$ stärker, so daß im letzteren Falle

$$d = 0{,}2094\, \sqrt[3]{Pa} = 1{,}017 \sqrt[3]{\frac{Pv}{u}} = 7{,}96\, \sqrt[3]{\frac{L}{u}}\ \text{Zoll}$$

$$= 20{,}82\, \sqrt[3]{\frac{L}{u}}\ \text{Centimeter zu setzen ist.}$$

Schmiedeeiserne Wellen macht man um $\frac{1}{8} d$, und stählerne um $\frac{1}{4} d$ schwächer als gußeiserne Wellen, dagegen giebt man den hölzernen Wellen zwei- bis dreimal so viel Stärke als den gußeisernen.

Für Wellen mit quadratischen und sechsseitigen Querschnitten, sowie für hohle und gerippte Wellen gelten bei der Torsion dieselben Regeln, wie bei der Biegung (s. §. 85); es ist z. B. für Wellen mit quadratischem Querschnitt (s^2) auch hier

$$s = 0{,}941\, d,\ \text{u. s. w.}$$

Allgemein ist der Durchmesser des umschriebenen Kreises
1) für einen quadratischen Querschnitt, $d_1 = 1{,}331 d_1$,
2) für einen regelmäßigen sechss. Querschnitt, $d_1 = 1{,}132\, d$, und
3) für einen regelmäßigen achts. Querschnitt, $d_1 = 1{,}072\, d$.

Folgende Tabelle enthält sowohl die Biegungsmomente M als auch die Torsionsmomente Pa in Fußpfund und $\frac{L}{u}$ Pferdekräften, welche den Wellenstärken $d = 1, 2, 3 \ldots 12$ Zoll entsprechen.

d Zoll	1	2	3	5	7	9	12
M Fußpfd.	58	463	1562	7234	19850	42190	100000
Pa Fußpfd.	15,7	125,5	423,5	1960	5379	11433	27100
$\frac{L}{u}$ Pferdekräfte . .	0,00342	0,00274	0,0924	0,4378	1,174	2,495	5,914

In den meisten Fällen sind die Transmissionswellen auch noch belastet, und es ist deshalb die Stärke derselben nach der zusammengesetzten Festigkeit zu berechnen.

Setzt man wegen der Biegung, $d = 0{,}120 \sqrt[3]{M}$, und wegen der Drehung, $d = 0{,}1745 \sqrt[3]{Pa}$, so hat man für solche Wellen aus Gußeisen:

$d^6 - (0{,}120)^3 M d^3 = (0{,}1745)^6 P^2 a^2$ zu setzen, wonach

$$d = \sqrt[3]{0{,}000864 M + \sqrt{0{,}00002823 P^2 a^2 + 0{,}0000007465 M^2}},$$

und

$$1)\ d = 0{,}1745\, \psi \sqrt[3]{Pa} = 6{,}64\, \psi \sqrt[3]{\frac{L}{u}} \text{ Zoll folgt,}$$

wenn man

$$\frac{M}{Pa} = m \text{ und } \sqrt[3]{0{,}1626\, m + \sqrt{1 + 0{,}02644\, m^2}} = \psi$$

setzt; oder auch

$$2)\ d = 0{,}120\, \chi \sqrt[3]{M} \text{ Zoll, wenn}$$

$$\frac{Pa}{M} = \frac{1}{m} = n \text{ und } \sqrt[3]{0{,}5 + \sqrt{0{,}25 + 9{,}455\, n^2}} \text{ durch } \chi$$

bezeichnet wird.

Folgende Tabellen enthalten die verschiedenen Werthen von m und n entsprechenden Coefficienten ψ und χ.

Tabelle I.

Für $m = \frac{1}{2}$	1	2	3	4	5
ist $\psi = 1{,}027$	1,055	1,112	1,170	1,226	1,281

Tabelle II.

Für $n = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{2}$	2
ist $\chi = 1{,}123$	1,284	1,419	1,535	1,726	1,882

Ist z. B. das Biegungsmoment M an einer Stelle der Welle gleich dem Torsionsmomente Pa, also $m = n = 1$, so hat man nach I., $\psi = 1{,}055$ und daher die Stärke der Welle an dieser Stelle:

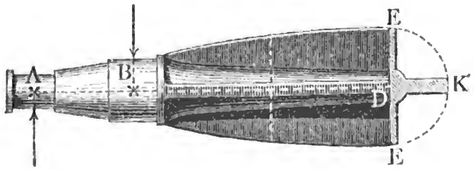
$d = 0{,}1745 \,.\, 1{,}055 \sqrt[3]{Pa} = 0{,}184 \sqrt[3]{Pa}$, und nach II.
$\chi = 1{,}535$, wonach
$d = 0{,}120 \,.\, 1{,}535 \sqrt[3]{M} = 0{,}184 \sqrt[3]{M}$ folgt.

Das Gewicht der Welle ist natürlich als eine in dem Schwerpunkt derselben niederziehende Kraft G_0 bei der Berechnung der Zapfendrücke in Betracht zu ziehen, und ebenso hat man bei Berechnung der Biegungsmomente für irgend einen Punkt in der Wellenaxe das Gewicht des von diesem Punkte abgeschnittenen Wellenstückes als eine im Schwerpunkt desselben niederziehende Kraft anzusehen.

Bei der ersten Berechnung von R und M sieht man von dem Wellengewichte ganz ab, und bestimmt die verschiedenen Werthe von d_0 und d nach den obigen Formeln. Nun bestimmt man die Gewichte der diesen Stärken entsprechenden Wellenstücke und berechnet mit Berücksichtigung derselben die Werthe von R, M, d_0 und d von Neuem.

Da eine starke massive Welle mit kreisförmigem Querschnitt leicht unsichtbare Gußfehler enthalten kann, so giebt man nicht selten dem Mittelstück einer starken Welle kreuzförmige Querschnitte, welche man, wie Fig. 430 vor Augen führt, nach den

Fig. 430.

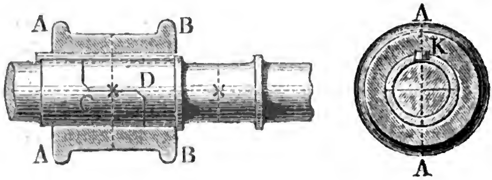


Tragköpfen zu allmälig in die einfache Kreisform übergehen läßt. Die Dimensionen des größten Querschnittes DEK dieser Welle sind nach §. 85 zu berechnen.

§. 87. Wellenkuppelungen. Bei der Kuppelung sind entweder die Wellenenden stumpf an einander gestoßen, oder über einander geplattet; und es besteht das Kuppelstück entweder aus einem oder aus zwei Theilen. Der Kuppelkopf erhält sehr gewöhnlich die Stärke $1{,}25\,d$, wenn d die Wellenstärke bezeichnet.

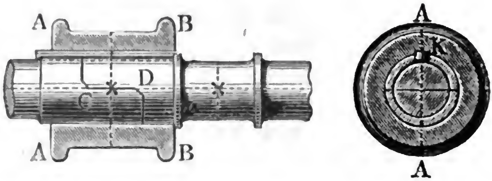
Bei der Kuppelung in Fig. 431 mit Kuppelhülse oder

Fig. 431.



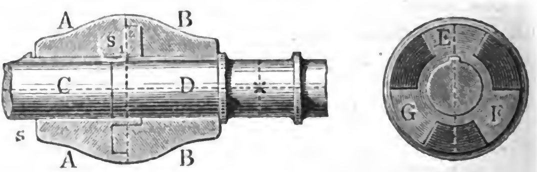
Muff ist die Dicke der letzteren: $= s = \frac{d}{3} + 0{,}2$ Zoll, die Länge derselben: $AB = l = 6s = 2d + 1{,}2$ Zoll, die Länge CD der Ueberplattung, $l_1 = \frac{l}{3}$ bis $\frac{l}{2}$, ferner die Breite des Kuppelkeiles K, $b = 0{,}9\,s$ und die Dicke desselben, $e = \frac{1}{2}\,b = 0{,}45\,s$.

Fig. 432.



Die Klauenkuppelung in Fig. 433 besteht aus zwei Kuppelstücken AA, BB, welche zahnförmig in einander greifen.

Fig. 433.



Die Stärken dieser Klauen sind $s = \frac{d}{3} + 0{,}2$ Zoll, $s_1 = 2s$, die Länge eines Kuppelstückes, $\frac{1}{2}\,l = 4s$, die Höhe der sectorenförmigen Zähne E, F, G, $\frac{2}{3}\,s$, und die Breite der ringförmigen Berührungsflächen, $\frac{1}{3}\,s$. Bei der Scheibenkuppelung ist auf jedem Wellenende eine Scheibe aufgesetzt und die feste Verbindung durch Schrauben bewerkstelligt.

Wenn die Scheiben oder Teller nicht fest verbunden sind, sondern nur an einander gepreßt werden, erhält man eine lösbare Frictionskuppelung.

Können die Wellenaxen nicht genau in eine gerade Linie gebracht werden, so wendet man das Universalgelenk als Kuppelglied an.

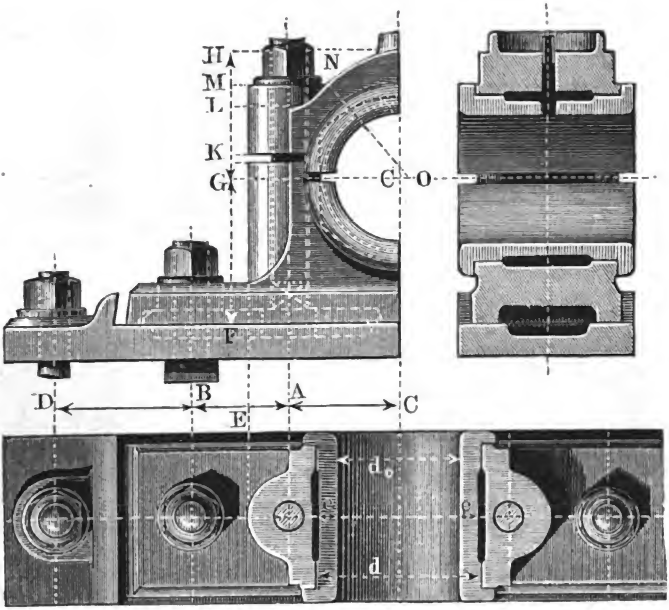
§. 88. Zapfenlager. Die liegenden Wellen sind vorzugsweise an den Umfängen, dagegen die stehenden Wellen an den Grundflächen der Zapfen zu unterstützen. Je nach der Befestigung sind die Zapfenlager Stehlager, oder Seitenlager, oder Hängelager. Sie bestehen aus dem gußeisernen Lagerkörper, dem broncenen Futter und der Lagerplatte, und, namentlich bei liegenden Wellen, noch aus einem Lagerdeckel.

Die Hauptdimensionsverhältnisse eines Stehlagers, Fig. 434, für eine liegende Welle sind folgende.

Aus dem Durchmesser d_0 des Zapfens folgt die kleinste

Dicke der messingenen oder broncenen Lagerschalen: $e = 0{,}07 d_0 + 0{,}12$ Zoll, und die Maulweite des Lagerkörpers: $d = 1{,}15 d_0 + 0{,}4$ Zoll. Die übrigen Dimensionen des letz-

Fig. 434.

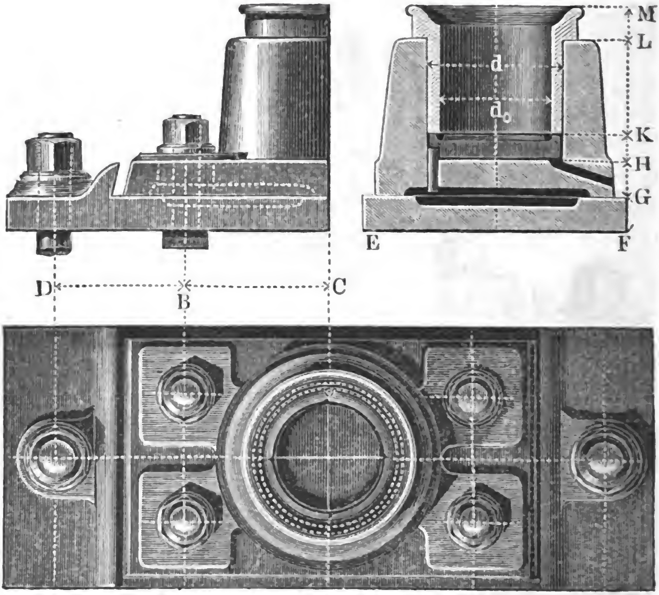


teren werden auf d bezogen. Die Stärke der Schraubenbolzen, $= 0{,}2\,d$, die Abstände der Axen derselben von der Wellenaxe: $CA = 0{,}7\,d$, $CB = 1{,}3\,d$, $CD = 2{,}15\,d$. Die halbe Länge der Fußplatte $= 1{,}7\,d$, und die halbe Länge der Sohlplatte $= 2{,}45\,d$. Die Dicke der Fußplatte, sowie die der Sohlplatte: $h = 0{,}2\,d$, die Verstärkung beider, wegen der Lochung: $h_1 = \frac{1}{3}h$, also die ganze Höhe $= \frac{4}{3}h$. Der Halbmesser der Hülse der Deckelschraube ist $AE = 0{,}25\,d$. Die Länge der Lagerschalen, sowie die Breite der Fuß- und Sohlplatte sind durch die Länge des Zapfens bestimmt. Hier ist die Breite der Sohlplatte gleich der Länge der Lagerschale; sehr oft läßt man auch die Lagerschale selbst über die Fußplatte hinausgreifen. Noch sind die Höhen des ganzen Lagerkörpers folgende: $FG = 0{,}9\,d$, $GH = 0{,}8\,d$, $GK = 0{,}16\,d$, $KL = 0{,}3\,d$, $KM = 0{,}45\,d$; endlich ist für den Mittelpunkt O der äußeren Krümmung N des Deckels: der Halbmesser $ON = 0{,}75\,d$.

Bei einem Fußlager, Fig. 435, bestehen die broncenen Lagerschalen in der Spurplatte und der Büchse. Die Spurplatte ist unten wenig abgerundet und zur Vertheilung des

Schmieröles mit Rinnen versehen, und wird durch einen Stift im Zapfengehäuse festgehalten; die Büchse ist oben trichterförmig erweitert und mit vier verticalen Oelrinnen versehen. Die Dicke

Fig. 435.



der Büchse ist: $e = 0{,}07\, d_0 + 0{,}125$ und daher die lichte Weite des Lagergehäuses:

$d = d_0 + 2\,e = 1{,}14\, d_0 + 0{,}25$ Zoll. Die übrigen Dimensionen des Gehäuses bezieht man auf d. Mittlere Dimensionsverhältnisse eines solchen Zapfenlagers sind folgende. Dicke der zwei Schraubenbolzen zur Befestigung der Sohlplatte, $= 0{,}25\, d$, Dicke der vier Schraubenbolzen zur Befestigung der Fußplatte, $= 0{,}20\, d$. Die Abstände der Axen dieser Bolzen von der Wellenaxe: $CD = 2\, d$, $CB = 1{,}05\, d$; halbe Länge der Sohlplatte, $= 2{,}35\, d$, halbe Länge der Fußplatte, $= 1{,}5\, d$. Dicke dieser Platten, $FG = GH = a = 0{,}25\, d$, Breite der Sohlplatte, $= 1{,}9\, d$, Breite der Fußplatte, $1{,}7\, d$. Aeußere Weite des Lagergehäuses, oben $1{,}50\, d$, unten $1{,}60\, d$. Dicke der Sohlplatte, sowie die Kopfdicke der Büchse, $= 2\, e$. Die Höhen des Lagerkörpers sind noch folgende: $FK = 0{,}70\, d$, $FL = 1{,}40\, d$ und $FM = 1{,}65\, d$.

Nicht immer lassen sich die Zapfenlager unmittelbar auf die Fundamentmauer aufschrauben, sondern es sind hierzu entweder besondere Lagerstühle nothwendig, oder es werden dieselben, zumal wenn sie nur leichteren Wellen zur Unter-

stützung dienen, an der Decke oder an den Seitenwänden eines Maschinengebäudes u. s. w. befestigt. Bei den letzteren Zapfenlagern findet stets nur eine indirecte Unterstützung statt, und es nehmen hierbei die Befestigungsschrauben in der Richtung ihrer Axe entweder den ganzen oder wenigstens einen Theil des Zapfendruckes R auf. Bei einem Hängelager, wie Fig. 436,

Fig. 436.

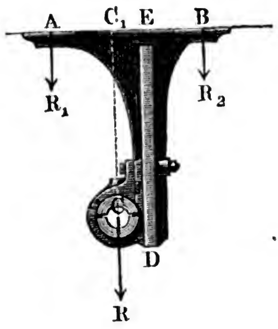
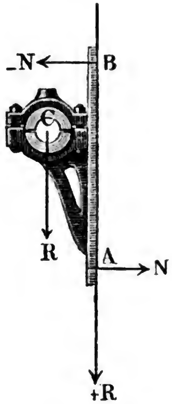


Fig. 437.



ist der Zapfendruck R sammt dem Gewichte G des ganzen Lagerkörpers von den beiden Schraubenbolzen A und B zu tragen, und wenn die Wellenaxe von der Bolzenaxen gleich absteht, also $C_1A = C_1B$ ist, so trägt jeder Bolzen nahe $\frac{1}{2}$ $(R + G)$. Ist $C_1A \gtrless C_1B$, so trägt A den Theil $R_1 = \frac{C_1B}{AB}\,(R + G)$ und B den Theil $R_2 = \frac{C_1A}{AB}(R + G)$. Uebrigens wird der Druck R nicht direct von der Säule DE aufgenommen, sondern es hat dieselbe außer der Axenspannung R noch das Biegungsmoment Ra aufzunehmen, dessen Armlänge a der Abstand der Wellenaxe C von der Säulenaxe DE ist.

Bei der Unterstützung eines Wand- oder Seitenlagers ABC, Fig. 437, ist außer der dem Zapfendrucke gleichen Verticalkraft $+ R$, noch ein Kräftepaar N, $- N$ auf die Seitenwand überzutragen. Von den Componenten des letzteren geht N unmittelbar auf die Seitenwand über, dagegen muß $- N$ durch zwei Schraubenbolzen in B aufgenommen werden. Die Schraube in A hat nur die Verrückung der Lagerplatte in der Auflagerungsebene zu verhindern.

Die broncenen Lagerschalen bestehen aus einer Legirung von Kupfer und Zinn, und sind um so härter, je mehr sich das Mischungsverhältniß der Gleichheit nähert. Messing verwendet man wegen seiner Sprödigkeit seltener zu Zapfenlagern, häufiger aber den Rothguß, eine Verbindung von

Messing und Zinn, oder eine Legirung aus Kupfer, Zink und Zinn. Die Legirung für gewöhnliche Zapfenlager besteht aus 82 Thln. Kupfer und 18 Thln. Zinn, oder aus 80 Thln. Kupfer, 18 Thln. Zinn und 2 Thln. Zink. Das gewöhnliche Messing enthält 66 bis 70 Thle. Kupfer und 34 bis 30 Thle. Zink. Der Zinngehalt soll höchstens 20 Thle., und der Zinkgehalt höchstens 38 Thle. in 100 Thln. einer Kupferlegirung ausmachen. Antimon, Blei und Eisen werden ebenfalls zur Legirung für Zapfenlager verwendet. Das sogenannte Antifrictionsmetall besteht aus 85 Thln. Zink, 5 Thln. Kupfer und 10 Thln. Antimon. Eine sehr glatte, aber nicht sehr harte Legirung besteht aus 50 Thln. Antimon, 30 Thln. Blei und 20 Thln. Zink. Eine Verbindung von 70 Thln. Gußeisen, 25 Thln. Kupfer und 5 Thln. Zinn eignet sich wegen ihrer Härte ebenfalls zu Zapfenlagern. Zapfenlager aus Hartblei, welche aus 97 Thln. Blei und 3 Thln. Wismuth bestehen und bei Eisenwalzwerken angewendet werden, müssen im Gange naß und kalt gehalten werden.

Gußeiserne Lager für schmiedeeiserne Zapfen sind bei mäßiger Geschwindigkeit mit Vortheil anzuwenden.

Hölzerne Zapfenlager oder Lagerschalen sind unter besonderen Umständen anzuwenden, zumal unter Verhältnissen, wo sich die metallenen Lagerschalen nicht gut halten. Man verwendet hierzu Weißbuchen-, Buchsbaum- und Pockholz (Guajack- oder Franzosenholz).

§. 89. Räderwerke. Liegen die Axen zweier Räder, wovon das eine durch das andere entweder mittels Riemen, oder durch Reibung, oder durch Zähne in Umdrehung gesetzt wird, in einer und derselben Ebene, so haben dieselben eine gemeinschaftliche Umfangsgeschwindigkeit c. Bezeichnen r_1 und r_2 die Halbmesser, sowie u_1 und u_2 die Umdrehungszahlen dieser Räder pr. Minute, so ist $c = \frac{\pi u_1 r_1}{30} = \frac{\pi u_2 r_2}{30}$, und daher auch $u_1 r_1 = u_2 r_2$. Das Umsetzungsverhältniß eines einfachen Räderwerkes ist hiernach $\psi = \frac{u_2}{u_1} = \frac{r_1}{r_2}$.

Bei einem Zahnräderwerke ist die Theilung oder die durch einen Bogen des Theilkreises gemessene Entfernung s je zweier Zähne von einander, bei beiden Rädern eine und dieselbe; hat daher das eine Rad n_1 und das andere n_2 Zähne, so ist

$s = \frac{2\pi r_1}{n_1} = \frac{2\pi r_2}{n_2}$, also auch $r_1 n_2 = r_2 n_1$, oder $\frac{r_1}{r_2} = \frac{n_1}{n_2}$ und $n_1 = \frac{2\pi r_1}{s}$, sowie $n_2 = \frac{2\pi r_2}{s}$.

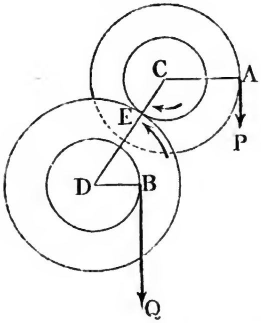
Hiernach ist für Zahnräder

$$\psi = \frac{u_2}{u_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Während bei einer einfachen Radwelle das Verhältniß der Kraft P zur Last Q, sowie das umgekehrte Verhältniß der Geschwindigkeit v der Kraft zur Geschwindigkeit w der Last, $\frac{P}{Q} = \frac{w}{v} = \frac{b}{a}$ ist, wobei a den Halbmesser des Rades und b den der Welle bezeichnet, so hat man bei dem einfachen Räderwerke $ACDB$, Fig. 438:

$$\frac{P}{Q} = \frac{w}{v} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{b}{a} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{b}{a} = \frac{u_2}{u_1} \frac{b}{a} = \psi \frac{b}{a}.$$

Fig. 438.



Bei der äußeren Berührung der Räder ist der Abstand $CD = e$ der Radaxen C und D von einander gleich der Summe der Radhalbmesser $CE = r_1$ und $DE = r_2$, also $e = r_1 + r_2$, und es laufen die Räder in entgegengesetzten Richtungen um.

Aus ψ und e folgt hier $r_1 = \frac{\psi e}{\psi + 1}$ und $r_2 = \frac{e}{\psi + 1}$.

Berühren sich hingegen die Räder von innen, so ist $e = r_1 - r_2$, und es laufen die Räder in gleicher Richtung um. Hierbei ist

$$r_1 = \frac{\psi e}{\psi - 1} \text{ und } r_2 = \frac{e}{\psi - 1}.$$

Ist das Umsetzungsverhältniß ψ sehr klein oder sehr groß, zumal unter $1/6$ oder über 6, so soll man ein zwei-, drei- oder mehrfaches Räderwerk anwenden. Bezeichnen ψ_1 und ψ_2 die Umsetzungsverhältnisse der einfachen Räderwerke oder Vorgelege, so ist das Umsetzungsverhältniß der zu einem doppelten Vorgelege verbundenen Räderpaare: $\psi = \psi_1 \cdot \psi_2$, und eben so ist für ein aus drei einfachen Räderwerken zusammengesetztes Vorgelege $\psi = \psi_1 \cdot \psi_2 \cdot \psi_3$, wobei ψ_1, ψ_2 und ψ_3 die Umsetzungsverhältnisse der einzelnen Vorgelege ausdrücken. Bei einem solchen Räderwerke ist das Kraft- oder umgekehrte Geschwindigkeitsverhältniß:

$$\frac{P}{Q} = \frac{w}{v} = \frac{r_1 r_3 r_5}{r_2 r_4 r_6} \frac{b}{a} = \frac{n_1 n_3 n_5}{n_2 n_4 n_6} \frac{b}{a}$$
$$= \psi_1 \psi_2 \psi_3 \frac{b}{a} = \psi \frac{b}{a},$$

wo r_1, r_3, r_5 die Halbmesser, sowie n_1, n_3, n_5 die Zähnezahlen der Trieb- und r_2, r_4, r_6 die Halbmesser, sowie n_2, n_4, n_6 die Zähnezahlen der Getriebräder bezeichnen.

Die theoretische Leistung $L = Pv = Qw$ einer Maschine wird durch Zahnräderwerke, sowie durch Vorgelege überhaupt nicht verändert. Ist R die Kraft, mit welcher die Räder CE

und DE, Fig. 438, auf einander wirken, so hat man $L = Rc$, und daher

$$R = \frac{L}{c} = \frac{30}{\pi u_1 r_1} L = \frac{30}{\pi u_2 r_2} L = \frac{Pa}{r_1} = \frac{Qb}{r_2}.$$

Auch hat man

$$R = 480 \frac{L}{c} = 4584 \frac{L}{u_1 r_1} = 4584 \frac{L}{u_2 r_2},$$

wenn L in Pferdekräften gegeben ist.

Bei Reibungsräderwerken besteht die Kraft R in der Reibung φN, welche dadurch erzeugt wird, daß man die Räder mit einer gewissen Kraft N gegen einander drückt. Es ist im Mittel $\varphi = 0,5$, man nimmt aber zur Sicherheit, $\varphi = 0,25$ an, wonach dann $N = 4R$ zu setzen ist. Bei Seil- und Riemenräderwerken ist R die Reibung des Seiles oder Riemens auf der Trommel und auch gleich der Differenz der Seil- oder Riemenspannungen, und bei den Zahnräderwerken ist R der Druck zwischen den Zähnen der Räder.

Wenn die geometrischen Axen eines Zahn- oder Reibungsräderwerkes parallel sind, so erhalten die Räder eine cylindrische Form, wenn sich aber dieselben schneiden, so sind die Räder conisch zu formen, und wenn sie sich weder schneiden noch parallel liegen, so sind entweder die Oberflächen der Räder nach Rotationshyperboloiden zu gestalten, oder es ist noch ein conisches Räderpaar einzuschalten, dessen Axe die gegebenen Axen schneidet. Bei Seil- und Riemenräderwerken muß man in den letzten Fällen das Seil oder den Riemen durch besondere Leitrollen von einem Rade auf das andere führen.

§. 90. Zahnräder. Das Verhältniß der Zahnbreite b zur Zahndicke a ist nach Armengaud, $\nu = \frac{b}{a} = 4 + 0,0005R$ zu setzen, wenn der Zähnedruck in Pfunden gegeben ist; und die Zahndicke, in der Richtung des Radumfanges gemessen, ist für gußeiserne Zahnräder nach der Formel

$a = 0,0593 \sqrt{\frac{R}{\nu}}$ Zoll zu berechnen, wonach für:

$\nu = 4$	4,5	5	5,5	6	6,5	7
$a = 0,0296$	0,0280	0,0265	0,0253	0,0242	0,0233	0,0224 $\sqrt{R}$

ausfällt.

Giebt man R in Kilogramm, so hat man

$\nu = \frac{b}{a} = 4 + 0,001R$ und $a = 0,219 \sqrt{\frac{R}{\nu}}$ Centimeter zu setzen.

Aus a folgt dann die Zahnbreite

$b = \nu a = (4 + 0,0005R)\, a$ Zoll $= (4 + 0,001R)\, a$ Centim.

Ist die durch das Räderwerk überzutragende Leistung L in Pferdekräften gegeben, so hat man auch

$$a = 1{,}3\sqrt{\frac{L}{\nu c}} = 13{,}91\sqrt{\frac{L}{\nu u_1 r_1}} = 13{,}91\sqrt{\frac{L}{\nu u_2 r_2}}\text{ Zoll},$$

wobei c in Fußen, dagegen r_1 und r_2 in Zollen zu geben sind.

Die Stärke einer gußeisernen Welle, $d = 5{,}31\sqrt[3]{\frac{L}{u}}$ Zoll gesetzt, folgt auch das Verhältniß der Zahnstärke zur Wellenstärke:

$$\frac{a}{d_1} = 1{,}14\sqrt{\frac{d_1}{\nu r_1}} = 1{,}14\sqrt{\frac{d_2}{\nu r_2}},$$

wobei d_1 und d_2 die Stärken der Wellen bezeichnen, auf welchen die Zahnräder sitzen, deren Halbmesser r_1 und r_2 sind. Sind die Wellen aus Schmiedeeisen, so hat man

$$\frac{a}{d_1} = 1{,}33\sqrt{\frac{d_1}{\nu r_1}} = 1{,}33\sqrt{\frac{d_2}{\nu r_2}}\text{ zu setzen.}$$

Hölzerne Radzähne macht man wegen ihres leichteren Auswechselns nur ein Drittel bis die Hälfte stärker als eiserne Zähne.

Auch Zähne aus Messing oder Rothguß macht man ein Drittel stärker als eiserne Zähne.

Zu den hölzernen Zähnen (Kämmen) verwendet man am besten ganz trockenes Buchenholz, nächstdem auch Eschen-, Birnbaum-, Vogelbeerbaumholz u. s. w.

Folgende Tabelle (I.) ist nach den Formeln

$$R = \frac{480\,L}{c}\text{ Pfund, } \nu = 4 + 0{,}0005\,R,$$

$$a = 1{,}3\sqrt{\frac{L}{\nu c}}\text{ Zoll}$$

und $b = \nu a$ berechnet, und giebt für eine gegebene Leistung L Pferdekräfte und Umfangsgeschwindigkeit c, in je drei unter einander stehenden Zahlen, den Zähnedruck R Pfund, die Zahndicke a Zoll und die Zahnbreite b Zoll an. Hiernach ist z. B. für $L = 30$ Pferdekräfte und $c = 8$ Fuß, $R = 1800$ Pfd., $a = 1{,}14$ Zoll und $b = 5{,}57$ Zoll. Dem größten Werth von $\nu = \frac{b}{a} = 10$, entspricht der Maximalwerth von $R = 12000$ Pfd.; deshalb ist bei den mit einem Stern (*) bezeichneten Drücken über 12000 Pfd., a nach den Formeln $a = 0{,}0593\sqrt{\frac{R}{10c}}$ und $b = 10\,a$ berechnet worden.

Für das französische Maaß ist:

$$R = \frac{75\,L}{c}\text{ Kilogramm, } \nu = 1 + 0{,}001\,R,\text{ und}$$

$$a = 1{,}75\sqrt{\frac{L}{\nu c}}\text{ Centimeter, sowie } b = \nu a.$$

Tabelle I.

Die Stärke gußeiserner Zähne bei einer gegebenen Leistung L und einer gegebenen Geschwindigkeit im Theilkreise.

Leistung L in Pferdekräften	Umfangsgeschwindigkeit c in Fuß und Geschwindigkeitsmaaß ur in Zollen.						
	1 115	2 229	4 458	6 688	8 917	10 1146	12′ 1375″
1	480 0,63 2,68	240 0,45 1,87	120 0,32 1,31	80 0,26 1,07	60 0,23 0,92	48 0,21 0,84	40 Pf. 0,19″ 0,76″
2	960 0,86 3,89	480 0,63 2,68	240 0,45 1,87	160 0,37 1,52	120 0,32 1,31	96 0,29 1,17	80 Pf. 0,26″ 1,07″
4	1920 1,17 5,79	960 0,87 3,89	480 0,63 2,68	320 0,52 2,17	240 0,45 1,87	192 0,41 1,66	160 Pf. 0,37″ 1,52″
6	2880 1,37 7,43	1440 1,04 4,89	720 0,76 3,32	480 0,63 2,68	360 0,55 2,30	288 0,49 2,05	240 Pf. 0,45″ 1,87″
8	3840 1,51 8,95	1920 1,17 5,79	960 0,87 3,89	640 0,72 3,12	480 0,63 2,74	384 0,57 2,38	320 Pf. 0,52″ 2,17″
12	5760 1,72 11,83	2880 1,37 7,43	1440 1,04 4,89	960 0,87 3,89	720 0,76 3,33	576 0,69 2,95	480 Pf. 0,63″ 2,68″
20	9600 1,96 17,25	4800 1,63 10,04	2400 1,27 6,63	1600 1,08 5,20	1200 0,96 4,11	960 0,87 3,89	800 Pf. 0,80″ 3,52″
30	14400* 2,25 22,5	7200 1,83 13,88	3600 1,48 8,57	2400 1,28 6,63	1800 1,14 5,57	1440 1,04 4,89	1200 Pf. 0,96″ 4,41″
40	19200* 2,60 26,0	9600 1,96 17,25	4800 1,62 10,40	3200 1,42 7,94	2400 1,28 6,63	1920 1,17 5,79	1600 Pf. 1,08″ 5,20″
60	28800* 3,18 31,80	14400* 2,25 22,50	7200 1,83 13,88	4800 1,62 10,04	3600 1,48 8,57	2880 1,37 7,43	2400 Pf. 1,28″ 6,63″
80	38400* 3,68 36,80	19200* 2,60 26,00	9600 1,96 17,25	6400 1,77 12,74	4800 1,62 10,40	3840 1,51 8,95	3200 Pf. 1,42″ 7,94″
100	48000* 4,11 41,08	24000* 2,91 29,10	12000* 2,05 20,50	8000 1,88 15,01	6000 1,74 12,16	4800 1,62 10,40	4000 Pf. 1,53″ 9,19″

Die Zahnlänge h ist $= 1,2\,a$ bis $1,5\,a$. Der Spielraum zwischen den eisernen Zähnen erhält bei gut abgehobelten Zähnen, die Weite $a_0 = 0,05\,a$, bei gewöhnlichen Zähnen aber die Weite $a_0 = 0,10\,a$; es ist hiernach die sogenannte Theilung im ersten Falle: $s = 2\,a + a_0 = 2,05\,a$, und im zweiten: $s = 2,10\,a$. Greifen hölzerne und eiserne Zähne in einander ein, so macht man die Dicke der ersteren $a_1 = \frac{4}{3}\,a = 1,33\,a$, und den Spielraum $a_0 = 0,05\,a$, folglich die Theilung $s = a + a_1 + a_0 = 2,38\,a$.

Man steigert die Theilung s nicht leicht auf 4 Zoll. Wegen der leichteren Eintheilung des Theilkreises behandelt man s nicht als Bogen-, sondern als Sehnenabstand zweier Zähne, und setzt hiernach $s = 2r\,sin.\,\frac{\beta}{2} = 2\,r\,sin.\left(\frac{\pi}{n}\right)$, wenn r den Theilungshalbmesser, β den Theilwinkel und $n = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{360^0}{\beta^0}$, die Anzahl der Zähne angiebt.

Annähernd ist

$$s = r\beta\left[1 - \frac{1}{6}\left(\frac{\beta}{2}\right)^2\right] = \frac{2\,\pi r}{n}\left[1 - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2\right]$$

$$= \frac{6,283\,r}{n}\left(1 - \frac{1,645}{n^2}\right), \text{ sowie umgekehrt,}$$

$$n = \frac{2\,\pi r}{s}\left[1 + \frac{1}{24}\left(\frac{s}{r}\right)^2\right] = 6,283\,\frac{r}{s}\left[1 + \frac{1}{24}\left(\frac{s}{r}\right)^2\right],$$

und

$$r = \frac{s}{\beta\left[1 - \frac{1}{6}\left(\frac{\beta}{2}\right)^2\right]} = \frac{s}{\beta}\left[1 + \frac{1}{6}\left(\frac{\beta}{2}\right)^2\right] \text{(annäh.)}$$

$$= \frac{n\,s}{2\pi}\left[1 + \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2\right] = 0,15915\,n\,s\left(1 + \frac{1,645}{n^2}\right).$$

Mit Hülfe der letzten Formel ist folgende Tabelle (II.) berechnet worden, welche für die Theilung $s = 1$, den jeder beliebigen Zähnezahl $n = 10$ bis 299 entsprechenden Theilkreishalbmesser r angiebt, welcher also für eine andere Theilung noch mit dem Werthe derselben zu multipliciren ist. Man kann diese Tabelle auch dazu benutzen, um aus der Theilung s und dem Theilkreishalbmesser r die entsprechende Anzahl n der Zähne zu bestimmen. Zu diesem Zwecke dividirt man die Theilung s in den gegebenen Halbmesser r und sucht den gefundenen Quotienten im Innern der Tafel auf. Geht man von der gefundenen Stelle links herüber und vertical aufwärts, so findet man am Ende die Zehner und Einer der gesuchten Zähnezahl n. Um ganze und runde Werthe für n zu erhalten, ist es nachher noch nöthig, r etwas abzuändern. Uebrigens muß r mindestens $\frac{8}{2}\,d$ sein, wenn d die Stärke der Welle des Zahnrades bezeichnet.

Die Zähnezahl n ist nicht unter 12, und wenn ein sanfter Gang gefordert wird, sogar nicht unter 24 zu machen.

Tabelle II.

Die Halbmesser der Theilungskreise für die Theilung 1 und für die Zähnezahlen 10 bis 299.

	0	1	2	3	4
10	1,618	1,774	1,932	2,089	2,247
20	3,196	3,355	3,513	2,672	3,830
30	4,783	4,942	5,101	5,260	5,419
40	6,373	6,532	6,691	6,850	7,009
50	7,963	8,122	8,281	8,440	8,599
60	9,553	9,712	9,872	10,031	10,190
70	11,144	11,303	11,463	11,622	11,781
80	12,735	12,895	13,054	13,213	13,371
90	14,327	14,486	14,645	14,804	14,963
100	15,918	16,077	16,236	16,395	16,554
110	17,509	17,668	17,827	17,987	18,146
120	19,101	19,260	19,419	19,578	19,737
130	20,692	20,851	21,010	21,169	21,328
140	22,283	22,442	22,602	22,761	22,920
150	23,875	24,034	24,193	24,352	24,511
160	25,466	25,625	25,784	25,944	26,403
170	27,058	27,217	27,376	27,535	27,694
180	28,649	28,808	28,966	29,126	29,286
190	30,241	30,400	30,559	30,718	30,877
200	31,832	31,991	32,150	32,310	32,469
210	33,424	33,583	33,742	33,901	34,060
220	35,015	35,174	35,333	35,492	35,652
230	36,607	36,766	36,925	37,084	37,243
240	38,198	38,357	38,516	38,675	38,835
250	39,790	39,949	40,108	40,267	40,426
260	41,381	41,540	41,699	41,858	42,018
270	42,973	43,132	43,291	43,450	43,609
280	44,564	44,723	44,882	45,042	45,201
290	46,156	46,315	46,474	46,633	46,792

Beispiel. Wenn eine Welle durch ein Wasserrad, welches pr. Min. 5 Umdrehungen macht und ein Arbeitsvermögen von 20 Pferdekräften besitzt, und dessen Welle überall 6 Fuß von dieser Welle absteht, in pr. Min. 20 Umdrehungen gesetzt werden soll, welche Anordnungen werden bei dem nöthigen Räderwerk zu machen sein? Es ist hier $\psi = {}^{20}/_{5} = 4$ und $e = 6$, daher sind die Theilungshalbmesser:

$$r_1 = \frac{4 \cdot 6}{1 + 4} = {}^{24}/_{5} \text{ Fuß} = 57^{3}/_{5} \text{ Zoll und}$$

$$r_2 = \frac{6}{1 + 4} = {}^{6}/_{5} \text{ Fuß} = 14^{2}/_{5} \text{ Zoll.}$$

Die Umfangsgeschwindigkeit c folgt nun $= \frac{\pi \cdot 24 \cdot 5}{5 \cdot 30}$

Tabelle II.

Die Halbmesser der Theilungskreise für die Theilung 1 und für die Zähnezahlen 10 bis 299.

	5	6	7	8	9
10	2,405	2,563	2,721	2,879	3,038
20	3,989	4,148	4,307	4,465	4,624
30	5,578	5,737	5,896	6,055	6,214
40	7,168	7,327	7,486	7,645	7,804
50	8,758	8,917	9,076	9,235	9,394
60	10,349	10,508	10,667	10,826	10,985
70	11,940	12,099	12,258	12,417	12,576
80	13,531	13,690	13,849	14,008	14,168
90	15,122	15,281	15,440	15,600	15,759
100	16,713	16,873	17,032	17,191	17,350
110	18,305	18,464	18,623	18,782	18,941
120	19,896	20,055	20,214	20,374	20,533
130	21,488	21,647	21,806	21,965	22,124
140	23,079	23,238	23,397	23,556	23,716
150	24,670	24,830	24,989	25,148	25,307
160	26,262	26,421	26,580	26,739	26,899
170	27,853	28,013	28,172	28,331	28,490
180	29,445	29,604	29,763	29,922	30,081
190	31,036	31,196	31,355	31,514	31,673
200	32,628	32,787	32,946	33,105	33,264
210	34,219	34,378	34,537	34,697	34,856
220	35,811	35,970	36,129	36,288	36,447
230	37,402	37,561	37,720	37,880	38,039
240	38,994	39,153	39,312	39,471	39,630
250	40,585	40,744	40,904	41,063	41,222
260	42,177	42,336	42,495	42,654	42,813
270	43,768	43,927	44,087	44,246	44,405
280	45,360	45,519	45,678	45,837	45,996
290	46,951	47,111	47,270	47,429	47,588

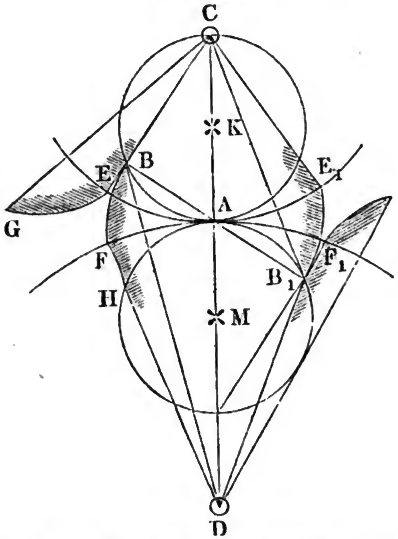
= 2,513 Fuß, daher nach Tabelle I. die Stärke der gußeisernen Zähne beider Räder, $b = 1{,}63 - \frac{0{,}36}{4} = 1{,}52$ Zoll, und folglich die Theilung $s = 2{,}1 \,.\, 1{,}52 = 3{,}19$ Zoll. Dividirt man die Halbmesser r_1 und r_2 durch die Theilung, so erhält man die Werthe $\frac{57^3/_5}{3{,}19} = 18$ und $\frac{14^2/_5}{3{,}19} = 4{,}5$, und sucht man diese Zahlen in Tabelle II. auf, so findet man die entsprechenden Zähnezahlen nahe $n_1 = 112$ und $n_2 = 28$.

§. 91. **Zahnformen.** Damit während des Eingriffes zweier Zähne in einander das Kraft- und Geschwindigkeitsverhältniß (ψ) ihrer Räder constant bleibe, also mit der gleichför-

migen Umdrehung des einen Rades eine gleichförmige Umdrehung des anderen verbunden sei, ist es nöthig, daß die Zahnflanken gewisse von einander abhängige Formen haben. Diese Formen sind bei den Stirnrädern cylindrische Flächen, welche durch Bewegung einer mit den Radaxen parallelen Geraden längs einer in der Umdrehungsebene zu verzeichnenden Curve entsteht. Diese Zahncurven sind entweder Epi- und Hypocycloiden oder Kreisevolventen (s. S. 178 und 180), werden aber sehr oft durch Kreisbögen ersetzt, welche sich soviel wie möglich an jene Curven anschließen.

Die Construction der Epi- und Hypocycloidenverzahnung ist aus Fig. 439 zu ersehen. Es sind hier C und D die Mittelpunkte der sich in A berührenden Theilkreise EE_1 und FF_1, sowie K und M die Mittelpunkte zweier Erzeugungskreisbögen AB, AB_1. Wälzt man diese Kreisbögen von A aus auf den beiden Theilkreisen EE_1 und FF_1, so beschreibt B den Epicycloidenbogen BF und den Hypocycloidenbogen BE,

Fig. 439.



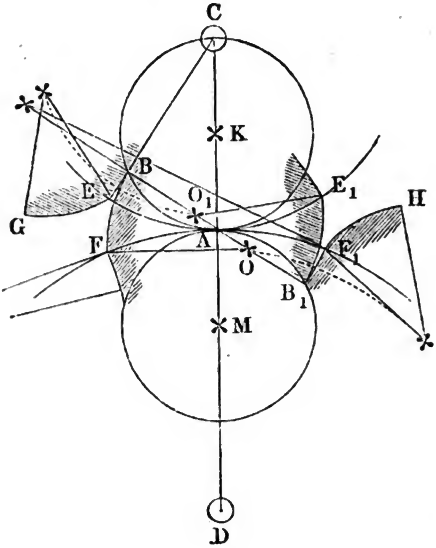
sowie B_1 den Hypocycloidenbogen B_1F_1 und den Epicycloidenbogen B_1E_1. Schließlich stößt man noch die Bögen BE und E_1B_1 im Punkte E, sowie die Bögen BF und B_1F_1 im Punkte F an einander an, und erhält so die vollständigen Zahncurven BEG und BFH. Dreht sich das Rad ECE_1 um C von rechts nach links um, so wird der Zahn BFH durch BEG fortgeschoben, und folglich das Rad FDF_1 von links nach rechts umgedreht. Umgekehrt kann mit denselben Zähnen auch das Rad ECE_1 durch das von rechts nach links umlaufende Rad FDF_1 von links nach rechts in Umdrehung gesetzt werden.

Der Hypocycloidenbogen BE geht in eine gerade Linie über, wenn der Durchmesser des Erzeugungsbogens gleich ist dem Halbmesser CA des Theilungskreises. Alle Zahnräder, welche bei gleicher Theilung gleiche Erzeugungskreise haben, können in einander eingreifen und gemeinschaftlich umlaufen,

und bilden einen sogenannten Rädersatz. Der Erzeugungskreis eines Rädersatzes hat den Halbmesser des kleinsten Rades zum Durchmesser.

Wenn die Anzahl der Zähne eines Rades sehr groß ist, kann man die Zahncurven aus zwei Kreisbögen, oder nach Befinden aus einem Kreisbogen und einer geraden Linie zusammensetzen. Sind B und B_1, Fig. 440, die Punkte, wo der

Fig. 440.

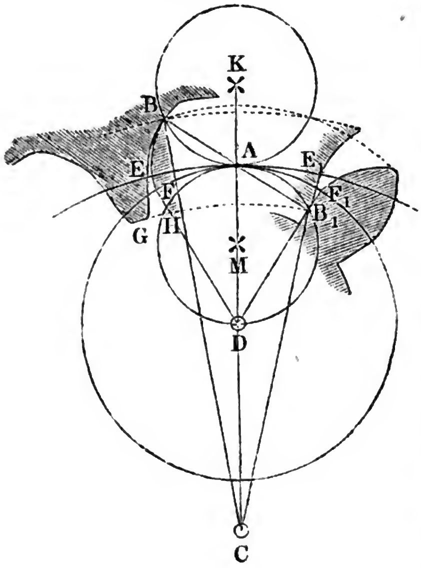


Eingriff beginnt und aufhört, während A der Berührungspunkt zwischen den Theil- und den Erzeugungskreisen ist, und hat man Bogen AE = Bogen AF = Bogen AB, sowie Bogen AE_1 = Bogen AF_1 = Bogen AB_1 gemacht, so beschreibt man aus Punkten in der Geraden AB oder ihrer Verlängerung, die Kreisbögen BE und BF, sowie aus Punkten in der Geraden AB_1 oder ihrer Verlängerung, die Kreisbögen B_1E_1 und B_1F_1. Um schließlich die vollständigen Zahncurven aus diesen Kreisbögen zusammenzusetzen, beschreibt man aus den Mittelpunkten D und C der Theilkreise FF_1 und EE_1 Kreise durch die Mittelpunkte O und O_1 ... von BF, B_1E_1 ... und construirt nun mit $OB = OF$ aus einem Punkte des ersteren Kreises den Bogen F_1H, sowie mit $O_1B_1 = O_1E_1$ aus einem Punkte des zweiten Kreises den Bogen EG u. s. w.

Bei der inneren Verzahnung des einen Rades ECE_1, Fig. 441 (a. f. S.), ist der Bogen BE eine Epicycloide, und der Bogen B_1E_1 eine Hypocycloide, weil man hier den Erzeugungskreis ABK auf der äußeren und den Erzeugungskreis AB_1D auf der inneren Seite des Theilkreises EAE_1 zu wälzen hat.

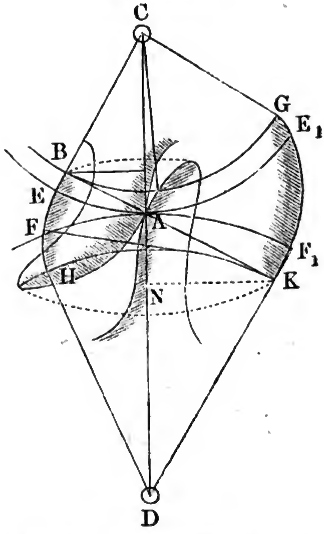
Uebrigens ist die Zusammentragung der Bögen BE und $B_1 E_1$ zur ganzen Zahnform BEG, sowie die der Bögen $B_1 F_1$ und BF zu einem Ganzen BFH die obige; auch lassen sich hier die Curven BE, EG, BF und FH, wie obige Figur 440 darstellt, durch Kreisbögen ersetzen.

Fig. 441.



Die Verzahnung nach der Kreisevolvente ist jedenfalls die vorzüglichste. Um die Grundkreise der Evolventen zu finden, zieht man durch den Berührungspunkt A, Fig. 442, der beiden Theilkreise EE_1 und FF_1 die gerade Erzeugungslinie BK, deren Richtung mit CD einen Winkel $CAB = DAK$ von 70 bis 80 Grad einschließt, wobei die Projection AN von AK auf CD, $^1/_6$, $^1/_5$ oder $^1/_4$ des Abstandes KN ist; die Perpendikel CB und DK von den Axpunkten C und D gegen BK sind dann die Halbmesser der Grundkreise BG und HK. Wälzt man nun BK einerseits auf BG und andererseits auf HK, so beschreiben die Endpunkte K und B die Kreisevolventen KG und BH, wonach die Zähne der Räder CEE_1 und DFF_1 zu construiren sind. Während des Eingriffs zwischen zwei Zähnen rückt der Berüh-

Fig. 442.



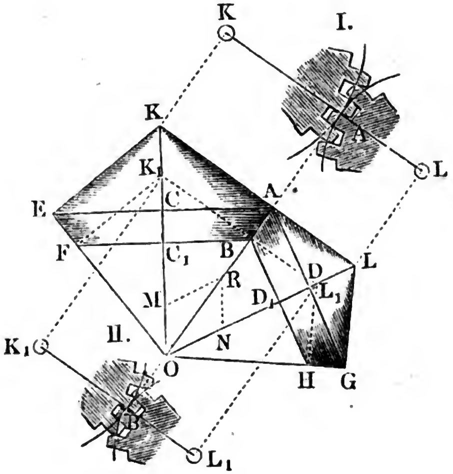
rungspunkt allmälig in BK, und zwar entweder von B nach K oder von K nach B, je nachdem die Bewegung von ECE_1, oder von FDF_1 ausgeht. Bei einem Rädersatze mit Evolventenzähnen ist daher nöthig, daß die sämmtlichen Zahnräder desselben nicht allein eine und dieselbe Theilung haben, sondern auch die Richtung der Angriffslinie BK gegen die Centrallinie eine und dieselbe sei. Uebrigens läßt sich bei der inneren Verzahnung eines Rades die Kreisevolvente ebenfalls anwenden.

In der Regel formt man die Hinterfläche der Radzähne symmetrisch zur Vorderfläche in Hinsicht auf eine durch die Radaxe gelegte Mittelebene.

§. 92. Conische und Conoidische Zahnräder.

Wenn sich die Rad- oder Wellenaxen CO und DO, Fig. 443,

Fig. 443.



unter einem gewissen Winkel $COD = \delta$ schneiden, so erhalten die Radkörper die Kegelform; es geht die gemeinschaftliche Berührungslinie AB durch den Schnittpunkt O beider Wellenaxen, und weicht von diesen Axen um die Winkel δ_1 und δ_2 ab, welche aus dem Umsetzungsverhältnisse $\psi = \frac{u_2}{u_1} = \frac{r_1}{r_2}$ und dem Winkel δ durch die Formeln

$$tang.\,\delta_1 = \frac{\psi\, sin.\,\delta}{1 + \psi\, cos.\,\delta} \text{ und } tang.\,\delta_2 = \frac{sin.\,\delta}{\psi + cos.\,\delta}$$

zu bestimmen sind.

Uebrigens hat man auch $\frac{sin.\,\delta_1}{sin.\,\delta_2} = \frac{r_1}{r_2} = \psi$, und kann

hiernach δ_1 und δ_2 construirend finden, wenn man $OM = 1$ auf OC, und $ON = \psi$ auf OD aufträgt, und das Parallelogramm $OMNR$ vollendet; die Diagonale OR giebt dann die Richtung von AB an. Giebt man den Abstand $OA = a$ des Berührungspunktes A vom Schnittpunkte A, so hat man die äußeren Radhalbmesser $CA = r_1 = a\, sin.\, \delta_1$ und $DA = r_2 = a\, sin.\, \delta_2$, und bezeichnet l die Länge der Berührungslinie AB, so sind die inneren Radhalbmesser:

$$C_1B = r_1 - l\, sin.\, \delta_1 = (a - l)\, sin.\, \delta_1 \text{ und}$$
$$D_1B = r_2 - l\, sin.\, \delta_2 = (a - l)\, sin.\, \delta_2.$$

Die beiden Axen schneiden vom Perpendikel auf OA_1 zu beiden Seiten von A die Halbmesser KA und LA zweier Kreissectoren ab, welche als die auf einer Ebene abgewickelten Mäntel zweier Kegel AKE und ALG angesehen werden können. Diese Halbmesser sind:

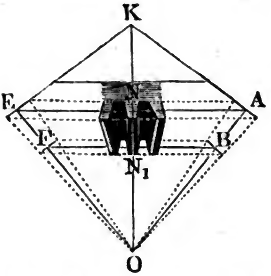
$$KA = a_1 = a\, tang.\, \delta_1 \text{ und } LA = a_2 = a\, tang.\, \delta_2.$$

Ebenso lassen sich vom inneren Berührungspunkte B aus, die Halbmesser $K_1B = a_1 - l\, tang.\, \delta_1 = (a - l)\, tang.\, \delta_1$ und $L_1B = a_2 - l\, tang.\, \delta_2 = (a - l)\, tang.\, \delta_2$ zweier Kreissectoren angeben, welche die abgewickelten Mäntel der über den inneren Stirnflächen BF und BH stehenden Kegelmäntel darstellen. Der Centriwinkel der Sectoren für die Axe OK ist $\varphi_1^0 = 360^0\, cos.\, \delta_1$, und für die Axe OL:

$$\varphi_2^0 = 360^0\, cos.\, \delta_2.$$

Um die Verzahnung eines conischen Räderwerkes zu bewerkstelligen, behandele man die abgewickelten Kegelmäntel wie Theilkreisbögen von Stirnräderwerken und construire hiernach sowohl für die in I. mit KA und LA, als auch für die in II. mit K_1B und L_1B beschriebenen Kreisbögen die angegebenen Zahnprofile auf der Ebene des Papiers. Denkt man sich nun die hiernach verzahnten Sectoren wieder als Kegelmäntel aufgelegt, so erhält man in diesen Zahnprofilen die Endflächen der Zähne, welche natürlich nur noch durch einen Mantel mit einander zu verbinden sind, dessen Erzeugungslinie nach O gerichtet ist. Hiernach sind z. B. in Fig. 444 die Zähne NN_1 des Rades $AEFB$ aufgetragen. Es genügt natürlich für jedes Rad die Construction eines Zahnes, weil nach demselben alle übrigen Zähne geformt werden können.

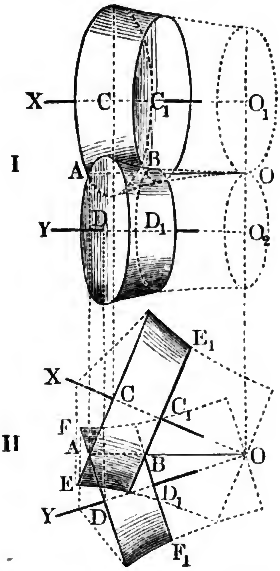
Fig. 444.



Bei einem hyperboloidischen Räderwerke wie Fig. 445, I. und II., darstellt, liegen die Axen O_1X und O_2Y in zwei parallelen Ebenen, welche einen gewissen Abstand $O_1O_2 = d$ von einander haben, der zugleich auch der kürzeste Abstand dieser Axen von einander ist. Die Projectionen dieser

Axen in einer solchen oder einer dritten Parallelebene schließen den gegebenen Winkel $XOY = \delta$ zwischen sich ein, aus welchem sich wieder die Winkel $XOA = \delta_1$ und $YOA = \delta_2$ berechnen lassen, welche die Berührungslinie $AB = l$ zwischen beiden Rädern mit den Projectionen der Axen O_1X und O_1Y in der Parallelebene durch AB einschließen; es ist nämlich auch hier

Fig. 445.



$$\psi = \frac{sin.\,\delta_1}{sin.\,\delta_2},$$

und daher

$$tang.\,\delta_1 = \frac{\psi\, sin.\,\delta}{1 + \psi\, cos.\,\delta}$$

sowie

$$tang.\,\delta_2 = \frac{sin.\,\delta}{\psi + cos.\,\delta}.$$

Hieraus berechnen sich die Kehlhalbmesser $OO_1 = x_1$ und $OO_2 = x_2$ mittels der Formeln

$$x_1 = \frac{d\, tang.\,\delta_1}{tang.\,\delta_1 + tang.\,\delta_2} = \frac{d\, sin.\,\delta_1\, cos.\,\delta_2}{sin.\,(\delta_1 + \delta_2)} \text{ und}$$

$$x_2 = \frac{d\, tang.\,\delta_2}{tang.\,\delta_1 + tang.\,\delta_2} = \frac{d\, sin.\,\delta_2\, cos.\,\delta_1}{sin.\,(\delta_1 + \delta_2)}.$$

Hiernach ist auch

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{tang.\,\delta_1}{tang.\,\delta_2}.$$

Ist ferner $OA = a$ der Abstand der Berührungspunkte O und A von einander, so hat man die Ordinaten des Punktes A in Hinsicht auf die Axen OX und OY:

$$CA = y_1 = a\, sin.\,\delta_1 \text{ und } DA = y_2 = a\, sin.\,\delta_2,$$

und die Radhalbmesser

$$CE = r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = sin.\,\delta_1 \sqrt{a^2 + \left(\frac{d\, cos.\,\delta_2}{sin.(\delta_1 + \delta_2)}\right)^2},$$

und

$$DF = r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = sin.\,\delta_2 \sqrt{a^2 + \left(\frac{d\, cos.\,\delta_1}{sin.\,(\delta_1 + \delta_2)}\right)^2}.$$

Ebenso kann man auch die Coordinaten des inneren Berührungspunktes B, sowie die inneren Radhalbmesser C_1E_1 und D_1F_1 berechnen, wenn man in den letzten Formeln $a - l$ statt a einführt.

Uebrigens lassen sich die Stirnflächen der Zähne von die-

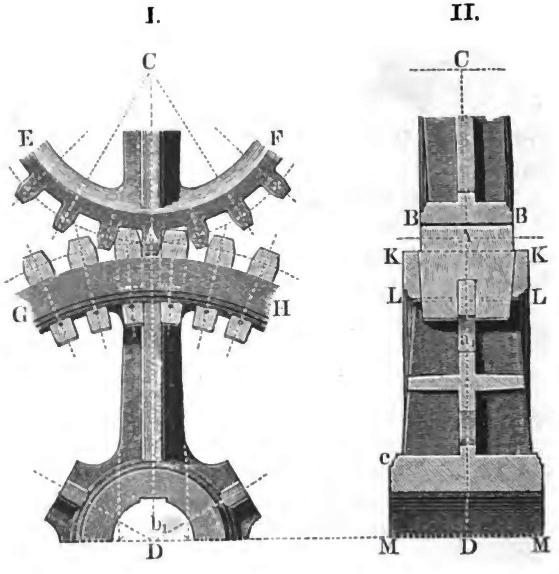
sen Rädern ähnlich wie die der conischen Räder construiren, wenn man auf die Stirnflächen derselben wieder conische Hütchen aufsetzt, deren Erzeugungslinien in den entsprechenden Punkten auf den Erzeugungslinien der Hyperboloide rechtwinkelig stehen. Diese Hütchen wickelt man wieder auf eine Ebene auf, und verzahnt sie wie gewöhnliche Stirnräder.

Ein hyperbolisches Räderwerk läßt sich auch durch doppeltes conisches Räderwerk ersetzen, wenn man eine dritte Welle einschaltet, deren Richtung die Richtungen der beiden anderen Wellen durchschneidet.

§. 93. Dimensionen der Zahnräder. Während man bei den Stirnrädern den Theilkreis in der Mitte des Radumfanges annimmt, behandelt man bei den conischen und conoidischen Rädern den größeren Radumfang als Theilkreis.

Bei den gewöhnlichen eisernen Stirnrädern, wie CEF, Fig. 446, I, ist die Kranzbreite, radial gemessen, gleich der

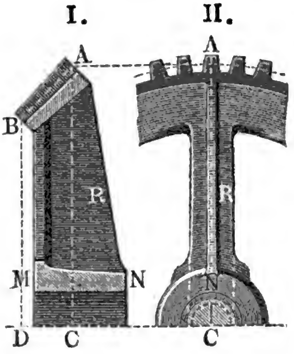
Fig. 446.



Zahndicke a, sowie die Kranzdicke gleich der Zahnbreite b in axialer Richtung. Bei eisernen Rädern mit Holzzähnen, wie DGH, Fig. 446, I und II, macht man dagegen die Kranzbreite $= 2a + 0{,}2$ Zoll, und die Kranzdicke $= b + a + 0{,}4$ Zoll, wo aber a die Dicke der eisernen Zähne bezeichnet und die Dicke der Holzzähne $a_0 = {}^4\!/_3\, a$ angenommen wird. Es steht also hier der Radkranz zu beiden Seiten eines Zahnes um $\frac{a}{2} + 0{,}2$ Zoll vor. Bei den conischen Rädern, wie CEF,

Fig. 447, I und II, u. s. w. sind dieselben Verhältnisse in Anwendung zu bringen.

Fig. 447.



Die Stärke der Zahnradwelle wird wie die der Transmissionswelle überhaupt (§. 86) bestimmt; den Kopf oder die Stelle, wo das Zahnrad aufsitzt, macht man aber um $\frac{1}{5}$ dieses Durchmessers stärker.

Die Stärke der Radhülse, welche auf den Wellenkopf aufzusitzen kommt, ist $e = \frac{1}{2} d + 0{,}2$ Zoll, und die Länge MN derselben:

$l = b + 0{,}08\, r$ Zoll.

Die Breite und Dicke des Kuppelkeiles macht man $\beta = 0{,}90\, e$ und $\alpha = 0{,}45\, e$. (Vergl. §. 82.)

Die Anzahl m der Radarme ist gewöhnlich 4 bis 8; man kann sie aber auch nach der empirischen Formel $m = 2{,}5 + 0{,}04\, n$ berechnen. Ist $\mu = \frac{b_1}{a_1}$ das Verhältniß der Dicke b_1 zur Breite a_1 eines Radarmes, so läßt sich setzen:

$$a_1 = 0{,}18 \sqrt[3]{\frac{M}{\mu m}} = 0{,}18 \sqrt[3]{\frac{480\, Lr}{\mu m c}}$$

$$= 6{,}85 \sqrt[3]{\frac{L}{\mu m u}} \text{ Zoll} = 17{,}91 \sqrt[3]{\frac{L}{\mu m u}} \text{ Centim.}$$

Gewöhnlich macht man $\mu = \frac{b_1}{a_1} = \frac{1}{5}$, wobei dann

$$a_1 = 11{,}71 \sqrt[3]{\frac{L}{mu}} \text{ Zoll} = 30{,}62 \sqrt[3]{\frac{L}{mu}} \text{ Centimeter}$$

folgt.

Wenn man die Armbreite a_1 mit der Zahnstärke a und mit der Wellenstärke d vergleicht, hat man für $\mu = 0{,}2$:

$$\frac{a_1}{a} = 2{,}02 \sqrt[3]{\frac{\nu r}{m a}} \text{ und } \frac{a_1}{d} = \frac{1{,}76}{\sqrt[3]{m}}.$$

Nach der letzteren Formel ist

für m =	4	5	6	7	8	9
$\frac{a_1}{d}$ =	1,11	1,03	0,97	0,92	0,88	0,85

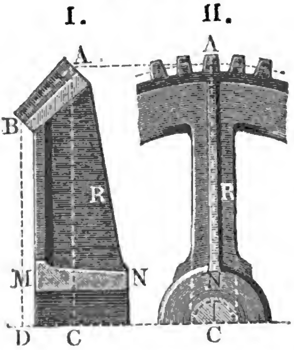
Am äußeren Ende macht man die Armdicke um $\frac{1}{4}$ kleiner.

also $= 3/4\, a_1$, wogegen die Breite b_1 überall $= \mu a_1$, z. B. $= 0{,}2 a_1$, zu nehmen ist.

Die Querrippe eines Armes hat mit dem Radkranz eine gleiche Dicke und die Breite $a_2 = 1/6\, a_1$.

Bei den conischen Rädern legt man das Armsystem auf die Seite der kleinen Stirnfläche B, und folglich die Querrippen, wie R, Fig. 448, I und II, auf die äußeren Seiten der Hauptarme BM, um das Gußmodell aus der Form herausheben zu können.

Fig. 448.



Bei der Construction und Berechnung der Dimensionen eines conischen Rades sollte man zwar eigentlich den Theilkreis durch die Mitte gehend annehmen, gewöhnlich läßt man ihn aber durch die größere Stirnfläche A gehen, und setzt daher auch bei der Bestimmung der äußeren Zahnstärke nach der Formel $a = 13{,}91 \sqrt{\frac{L}{\nu u r}}$, für r den größeren Radhalbmesser CA ein. Die Zahnbreite b ist wieder $= \nu a$, die äußere Kranzdicke $= a$, und die Hülsenlänge $MN = l = b + 0{,}08\, r$ Zoll u. s. w. Die innere Zahndicke und Kranzbreite steht natürlich zur äußeren Zahndicke (Kranzbreite) im Verhältnisse des inneren Halbmessers DB zum äußeren Halbmesser CA.

Wegen der Contraction des Gußeisens beim Erstarren macht man die Dimensionen des Modells für ein Gußstück 1 Proc. größer, als die verlangten Dimensionen des Gußstückes, und wegen der Bearbeitung, z. B. in Folge des Abdrehens und Abhobelns, wird der verlangten Dimension x eines bearbeiteten Gußstückes noch die Größe

$y = 0{,}004 + 0{,}001 x$ Meter, oder $y = 0{,}16 + 0{,}001 x$ Zoll zugesetzt; daher sind auch die Dimensionen eines Zahnradmodells um $y_1 = 0{,}16 + 0{,}011 x$ größer zu machen, als die Dimensionen x des gußeisernen Zahnrades.

Die Zahnreibung eines Zahnräderwerkes, dessen Axen den Winkel δ einschließen, ist, auf einen der Theilkreise reducirt,

$$F = \varphi \pi R \sqrt{\left(\frac{1}{n_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{n_2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{n_1}\right)\left(\frac{1}{n_2}\right) \cos. \delta},$$

wobei n_1 und n_2 die Zähnezahlen bezeichnen und

$\varphi \pi = \frac{\pi}{5} = 0{,}63$ zu setzen ist.

Stehen die Radaxen rechtwinkelig auf einander, so hat man

$$F = \varphi \pi R \sqrt{\left(\frac{1}{n_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{n_2}\right)^2};$$

dagegen ist für ein Stirnräderwerk mit äußerer Berührung

$$F = \varphi \pi R \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right),$$

und für ein solches mit innerer Berührung

$$F = \varphi \pi R \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}\right).$$

Hiernach ist z. B. für das Räderwerk in Fig. 438, S. 605,

$$\frac{P}{Q} = \psi \frac{b}{a} \left[1 + \varphi \pi \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\right].$$

Die conischen Räder haben noch ein Bestreben zum Fortgleiten auf ihrer Axe, und folglich auch noch eine besondere Seitenreibung in einem der Zapfenlager. Bei den conoidischen Räderwerken verschieben sich die Zähne nicht bloß in radialer, sondern auch in axialer Richtung an einander, deshalb ist hier die Zahnreibung größer als bei den übrigen Zahnräderwerken.

§. 94. Riemen- und Schnurräderwerke. Bei dem Riemenräderwerke $CEFD$, Fig. 449, mit offenem Riemen laufen die Räder in gleicher, bei dem mit gekreuztem Riemen, wie $CEFD$, Fig. 450, gehen dagegen die Räder in entgegengesetzter Richtung um. Für den vom Riemen bedeckten Bogen β eines Rades ist im ersten Falle

$$\cos. \frac{\beta}{2} = \pm \frac{r_1 - r_2}{e},$$

und im zweiten

$$\cos. \frac{\beta}{2} = - \frac{r_1 + r_2}{e},$$

wobei r_1 und r_2 die Radhalbmesser CE und DF bezeichnen.

Fig. 449.

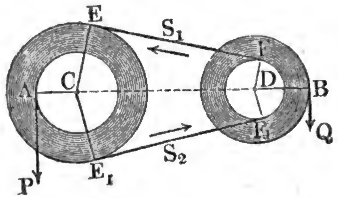
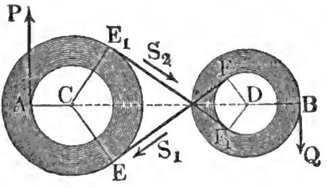


Fig. 450.



Uebrigens ist auch

$$\beta = 0{,}01745 \beta^0 = \frac{b}{r},$$

wenn b den Riemenbogen und r den Radhalbmesser bezeichnen.

Die Länge des ganzen Treibriemens ist, wenn e die Entfernung CD der Axen von einander bezeichnet, im ersten Falle:

$$l = 2 e \sin. \frac{\beta}{2} + \beta r_2 + (2\pi - \beta) r_1,$$

dagegen im zweiten:

$$l = 2 e \sin. \frac{\beta}{2} + (2\pi - \beta)(r_1 + r_2),$$

also nur von der Summe der beiden Radhalbmesser abhängig.

Die Kraft am Umfange der beiden Riemenräder (s. S. 606) ist $R = S_1 - S_2$, wo S_1 die Spannung des auf das Treibrad auf-, sowie S_2 die des vom Treibrade ablaufenden Riemenstückes bezeichnet.

Bezeichnet φ den Coefficienten der Reibung zwischen dem Riemen und dem Radumfange, so hat man

$$S_1 = e^{\varphi \beta} S_2 = 2{,}718^{\varphi \beta} S_2; \text{ wonach folgt}$$

$$1) \quad S_2 = \frac{R}{e^{\varphi \beta} - 1}, \quad 2) \quad S_1 = \frac{e^{\varphi \beta} R}{e^{\varphi \beta} - 1},$$

und die mittlere, dem Riemen vor der Bewegung zu gebende Spannung:

$$3) \quad S = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{e^{\varphi \beta} + 1}{e^{\varphi \beta} - 1} \cdot \frac{R}{2}.$$

Der Reibungscoefficient ist:

$\varphi = 0{,}47$ für gewöhnl. fette Riemen auf hölzernen Trommeln,
$\varphi = 0{,}50$ für neue Riemen auf hölzernen Trommeln,
$\varphi = 0{,}28$ für gewöhnliche fette Riemen auf abgedrehten gußeisernen Trommeln,
$\varphi = 0{,}38$ für feuchte Riemen auf abgedrehten gußeisernen Trommeln,
$\varphi = 0{,}50$ für Hanfseile auf hölzernen Trommeln.

Annähernd $\varphi \beta = 0{,}28 \,.\, \pi = 0{,}28 \,.\, 3{,}14 = 0{,}88$ gesetzt, folgt

$$e^{\varphi \beta} = 2{,}41, \text{ daher } S_2 = \frac{R}{1{,}41} = 0{,}71 R,$$

$$S_1 = 1{,}71 R \text{ und } S = 1{,}21 R.$$

Die Riemenspannungen für andere Werthe von β giebt folgende Tabelle an.

Verhältnisse $\frac{\beta}{2\pi}$	Werthe von $e^{\varphi \beta}$					
	Neue Riemen auf hölz. Trommeln	Gewöhnliche Riemen		Feuchte Riemen auf Eisen	Schnüre auf Rollen von Holz	
		auf Holz	auf Eisen		rauh	polirt
0,2	1,87	1,80	1,42	1,61	1,87	1,51
0,3	2,57	2,43	1,69	2,05	2,57	1,86
0,4	3,51	3,26	2,02	2,60	3,51	2,29
0,5	4,81	4,38	2,41	3,30	4,81	2,82
0,6	6,58	5,88	2,87	4,19	6,58	3,47
0,7	9,01	7,90	3,43	5,32	9,01	4,27
0,8	12,34	10,62	4,09	6,75	12,34	5,25
0,9	16,90	14,27	4,87	8,57	16,90	6,46
1,0	23,14	19,16	5,81	10,89	23,14	7,95

Die Laufriemen werden gewöhnlich aus gutem lohgaren Rindsleder geschnitten, in der neuesten Zeit verwendet

man hierzu auch wohl Gutta percha. Die gewöhnliche Breite der Riemen ist 2 bis 8 Zoll. Man kann dieselbe durch die Formel $b = 25 \frac{L}{c}$ Zoll bestimmen, wobei vorausgesetzt wird, daß der Riemen den halben Umfang einer Trommel bedeckt. Die in der Mitte etwas zu wölbende Spur macht man mindestens $\frac{5}{4}\, b$ weit.

Um die Axenreibung der Riemenräder durch die Riemenspannung nicht zu sehr zu vergrößern, soll man nach Armengaud bei einer Leistung von L Pferdekräften, die Umfangsgeschwindigkeit der Räder nicht unter
$c = 0{,}5\,(L + 1)$ Meter $= 1{,}6\ (L + 1)$ Fuß herabgehen lassen, wonach dann

$$R = 150\ \frac{L}{L + 1}\ \text{Kilogr.} = \frac{300\,L}{L + 1}\ \text{Pfund folgt.}$$

Bei der gewöhnlichen Dicke von $\frac{1}{6}$ Zoll des guten lohgaren Rindsleders ist, unter der Voraussetzung, daß der Tragmodul desselben, $T = 300$ Pfund beträgt, die erforderliche Riemenbreite 1) wenn der Riemen auf gußeisernen Trommeln läuft:

$$b = 0{,}02\ S_1 = 0{,}0342\,R = 16{,}42\ \frac{L}{c}$$

$$= 1880\ \frac{L}{u_1\, r_1} = 1880\ \frac{L}{u_2\, r_2}\ \text{Zoll}$$

und 2) wenn derselbe auf hölzernen Trommeln läuft:

$$b = 0{,}02\ S_1 = 0{,}026\,R = 12{,}5\ \frac{L}{c}$$

$$= 1430\,\frac{L}{u_1\, r_1} = 1430\ \frac{L}{u_2\, r_2}\ \text{Zoll.}$$

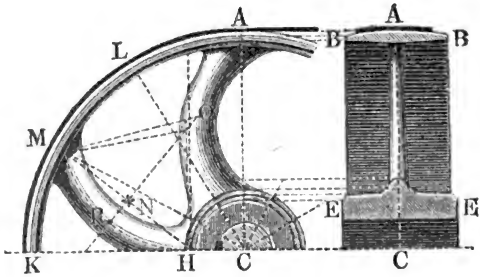
Wenn die berechnete Riemenbreite 10 bis 12 Zoll übertrifft, so sind zwei Riemen in Anwendung zu bringen.

Wird der Riemen durch eine Spannrolle so gespannt, daß der Riemen unter dem Winkel α gebrochen wird, so ist die Kraft, mit welcher die Rolle aufdrücken muß: $Z = 2\, S \cos. \frac{\alpha}{2}$ (s. Seite 353).

Aus der Riemenbreite b folgt die Kranzbreite der Riemenscheibe: BB, Fig. 451 (a. f. S.), $b_1 = 1{,}25\, b$; die äußere Dicke dieses Kranzes: $e_1 = 0{,}03\, b + 0{,}005\, r$, die mittlere Dicke desselben: $e_2 = 0{,}12\, b + 0{,}005\, r$, wovon die Höhe der Wölbung der äußeren Kranzfläche den Theil $0{,}03\, b$ einnimmt. Die Länge der Hülse EE ist $l = 1{,}4\, b$, und die Wanddicke derselben: $e = 0{,}3\, b$ zu machen. Die Breite a_2 der Arme berechnet man nach derselben Formel (S. 619) wie die der Zahnräder, die Dicke ist aber hier $b_2 = 0{,}5\, a_2$, und der Querschnitt eine Ellipse mit den Axen a_2 und b_2. Nach dem Kranze zu kann man a_2 bis auf $\frac{3}{4}\, a_2$ vermindern. Um das Abreißen der Arme

vom Kranze zu verhindern, krümmt man die Radarme wie folgt. Man halbire den Winkel KCL zwischen zwei ideellen geraden Armen durch eine Gerade CM, ziehe HM, wo H der Fuß-

Fig. 451.



punkt der Are des einen Armes ist, halbire HM in N, und errichte in H auf CK, sowie in N auf MH ein Perpendikel; der Durchschnitt O dieser Perpendikel ist der Halbmesser der Are des Armes HRM.

Durch die Stufenscheiben lassen sich die Umsetzungsverhältnisse ψ_1, $\psi_2 = \psi^2$, $\psi_3 = \psi^3$, $\psi_4 = \psi^4$ u. s. w. herstellen. Bei gekreuztem Riemen sind die einem gegebenen Umsetzungsverhältnisse ψ_n entsprechenden Scheibenhalbmesser

$$r_{2n} = \frac{l - 2e\,sin.\,\frac{\beta}{2}}{(1 + \psi_n)\beta} \text{ und } r_{2n-1} = \psi_n \cdot r_{2n};$$

bei offenem Riemen hat man dagegen

$$r_{2n} = \left[1 - \left(\frac{\psi_n - 1}{\psi_n + 1}\right)^2 \frac{l - 2e}{\pi^2 e}\right] \frac{l - 2e}{\pi(\psi_n + 1)}$$

und $r_{2n-1} = \psi_n \cdot r_{2n}$ zu setzen.

Hierbei ist natürlich aus den Halbmessern r_2 und $r_1 = \psi_1 r_2$ des ersten Scheibenpaares erst die Länge l des ganzen Riemens zu berechnen.

§. 95. Seile und Ketten. Die runden Hanfseile kann man pr. Quadratzoll mit $T = 2000$ Pfund belasten, wonach bei einer gegebenen Stärke von d Zoll die Tragkraft $P = 1570\,d^2$ Pfund, sowie umgekehrt,

$d = 0{,}0252\,\sqrt{P}$ Zoll $= 0{,}302\,\sqrt{P}$ Linien folgt.

Für französisches Maaß ist $P = 115\,d^2$ Kilogramm, sowie $d = 0{,}093\,\sqrt{P}$ Centimeter.

Das Gewicht des laufenden Fußes Seil ist $G = 0{,}45\,d^2$ Pfund zu setzen, oder wenn man d in Centimeter giebt, das Gewicht des laufenden Meters Seil, $G_1 = 0{,}105\,d^2$ Kilogr.

Nasse, sowie getheerte Seile tragen nur 0,8 so viel als trockene und ungetheerte Seile und erhalten deshalb 10 Proc. mehr Stärke als die letzteren.

Für die Eisendrahtseile ist $T = 12000$ Pfund zu setzen, wonach die Tragkraft eines Seiles, welches aus n Drähten von je d_1 Zoll Stärke besteht, $P = 9425\, n d_1^2$ Pfd. zu setzen ist, und

$$n d_1^2 = 0{,}0001061\, P \text{ Pfd., sowie } d_1 = 0{,}0103 \sqrt{\frac{P}{n}} \text{ Zoll}$$

folgt.

Für $n = 24$, ist $P = 226200\ d_1^2$ Pfd. und

$$d_1 = 0{,}00210 \sqrt{P} \text{ Zoll} = 0{,}0252 \sqrt{P} \text{ Linien;}$$

für $n = 36$, ist $P = 339300\ d_1^2$ Pfd. und

$$d_1 = 0{,}00172 \sqrt{P} \text{ Zoll} = 0{,}0206 \sqrt{P} \text{ Linien.}$$

Das Gewicht des laufenden Fußes Drahtseil ist

$G = 2{,}70\, n d_1^2 = 0{,}0002865\, P$ Pfd., für $n = 24$, $G = 64{,}8\, d_1^2$ Pfd., für $n = 36$, $G = 97{,}2\, d_1^2$ Pfd.

Für das französische Maaß hat man

$P = 689\, n d_1^2$ Kilogr., $n d_1^2 = 0{,}001451\, P$ Kilogr. und

$d_1 = 0{,}0381 \sqrt{\frac{P}{n}}$ Centimeter. Das Gewicht des laufenden Meters Drahtseil ist $G = 0{,}63\, n d_1^2$ Kilogr.

Besteht ein Bandseil aus m Rundseilen, so hat man für dasselbe: $P = 9425\, m\, n\, d_1^2$ Pfd. $= 689\, m\, n\, d_1^2$ Kilogr. Sehr gewöhnlich macht man $m = 6$ und $n = 24$, also $mn = 144$, weshalb hier

$$P = 1357200\, d_1^2 \text{ Pfd.} = 99216\, d_1^2 \text{ Kilogr., sowie}$$

$$d_1 = 0{,}000858 \sqrt{P} \text{ Zoll} = 0{,}003175 \sqrt{P} \text{ Centimeter}$$

folgt.

Gewöhnlich ist $d_1 = \frac{1}{24}$ bis $\frac{1}{8}$ Zoll. Die Drehung der Drähte und Litzen ist 10 bis 20 Grad. Sehr zweckmäßig ist es, sowohl die Drähte, als auch die Litzen um Hanfseelen zu winden.

Stehendes Seilwerk, welches nicht um Rollen zu liegen kommt und deshalb sehr wenig gedreht ist, kann 1,75mal so viel tragen, als laufendes Seilwerk, wie es im Vorstehenden vorausgesetzt wird.

Für die einfachen Gliederketten in Fig. 452 (a. f. S.) ist T ebenfalls $= 12000$ Pfd. zu setzen, wonach dann die Tragkraft $P = 18850\, d_2^2$ Pfd., und die Stärke des Ketteneisens, $d_2 = 0{,}00735 \sqrt{P}$ Zoll folgt.

Die Tragkraft der Gliederketten oder Kettenträger mit Steeg, Fig. 453, ist P um die Hälfte größer, daher $P = 28275\, d_2^2$ Pfund und $d_2 = 0{,}00595 \sqrt{P}$ Zoll.

Bei den in Fig. 452 angegebenen Dimensionsverhältnissen eines einfachen Kettengliedes ist die Axenlänge desselben, $l = 9{,}66\, d_2$ und die Länge des entsprechenden Kettenstückes, $s = 2{,}6\, d_2$, sowie das Gewicht eines Kettengliedes, $G_1 = 2{,}12\, d_2^3$ Pfd.

und das des laufenden Fußes Kette, $G = 9{,}76\, d_2^2$ Pfd. Bei den in Fig. 453 angegebenen Dimensionen eines Kettengliedes

Fig. 452.

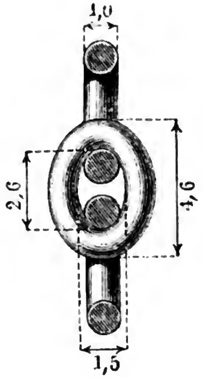
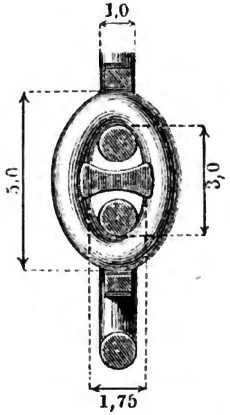


Fig. 453.



mit Steeg ist, $l = 10{,}69\, d_2$ und $s = 3\, d_2$, ferner das Gewicht eines Kettengliedes sammt Steeg, $G_1 = 2{,}62\, d_2^3$ Pfd. und $G = 14{,}48\, d_2^2$ Pfd.

Für das französische Maaß hat man bei den einfachen Gliederketten, $G_1 = 0{,}0593\, d_2^3$ und $G = 2{,}28\, d_2^2$ Kilogr., dagegen bei Steeggliederketten, $G_1 = 0{,}0809\, d_2^3$ und $G = 2{,}70\, d_2^2$ Kilogr.

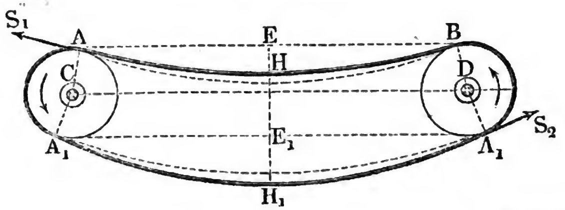
Der Halbmesser a der Rollen u. s. w., um welche sich ein Seil wickelt, muß in einem gewissen Verhältnisse zur Seildicke d stehen. Für Hanfseile ist $a > 4\, d$, und steigert sich bei Fördermaschinen auf $a = 24\, d$; für Eisendrahtseile ist $a = 60\, d$ bis $80\, d = 60\, d_1 \sqrt{n}$ bis $80\, d_1 \sqrt{n}$, da annähernd $d = d_1 \sqrt{n}$ ist. Bei den Gliederketten macht man $a = 10\, d_2$ bis $15\, d_2$. Aus theoretischen Gründen ist

$$a = \frac{E}{T} \frac{d_1}{2} = 600\, d_1, \text{ z. B. für } d_1 = \frac{d}{6}, \quad a = 100\, d$$

zu machen.

§. 96. Seil- und Kettenräder. Bei Entfernungen von mindestens 100 Fuß läßt sich eine Welle mittelst einer anderen durch ein Drahtseil ohne Ende, Fig. 454, in

Fig. 454.



Umtrieb setzen. Ein solches Drahtseil besteht gewöhnlich aus $n = 6 . 6 = 36$ Drähten, deshalb ist der erforderliche Rollenhalbmesser $CA = DB = a = 150\, d_1$. Die beiden Seilspannungen sind $S_1 = 2R$ und $S_2 = R$ zu setzen, wenn R die Größe der überzutragenden Kraft bezeichnet. Aus $S_1 = 2R$ bestimmt sich die nöthige Stärke der Drähte nach der Formel:

$$d_1 = 0{,}0103 \sqrt{\frac{S_1}{n}} = 0{,}0146 \sqrt{\frac{R}{n}} \text{ Zoll, z. B. für } n = 36,$$

$$d_1 = 0{,}00243 \sqrt{R} \text{ Zoll.}$$

In der Regel ist die Entfernung $CD = e$ der Rollenaxen C und D von einander groß im Vergleich zur Bogenhöhe h des Seiles in der Mitte zwischen beiden Rollen, und es läßt sich setzen: $h = \frac{Ge}{8S}$, wo G das Gewicht des Kettenbogens von einer Rolle bis zur anderen und S die Spannung desselben bezeichnet. Setzt man $S = \frac{S_1 + S_2}{2} = {}^3/_2 R$ ein, so erhält man die Bogenhöhe im Stillstande der Maschine, $h = \frac{Ge}{12R}$, dagegen sind die Bogenhöhen während des Ganges:

$$EH = h_1 = \frac{Ge}{16R} \text{ und } E_1 H_1 = h_2 = \frac{Ge}{8R}.$$

Setzt man noch $G = 2{,}70\, n d_1^2 e$ ein, so erhält man $h = 0{,}225 \frac{n d_1^2 e^2}{R}$, oder $\frac{h}{e} = 0{,}225 \frac{n d_1^2 e}{R}$, wobei e in Fußen auszudrücken ist.

Endlich $n d_1^2 = 0{,}0002132\, R$ angenommen, folgt

$$\frac{h}{e} = 0{,}000048\, e, \text{ z. B. } e = 100 \text{ Fuß giebt}$$

$$\frac{h}{e} = 0{,}0048 \text{ und } h = 0{,}48 \text{ Fuß.}$$

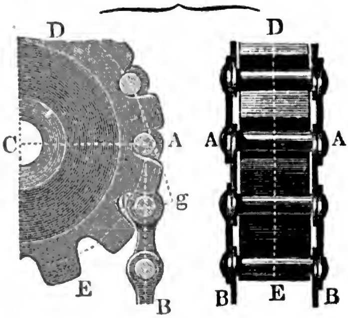
Die Länge des ganzen Spannseiles läßt sich annähernd $l = 2 (\pi a + e)$ setzen. Um bei sehr langem Drahtseilbetrieb keine übermäßige Durchbiegung (h) zu erhalten, bringt man in Abständen von 200 bis 300 Fußen noch besondere Tragrollen an. Die Seilenden sind auf eine Länge von 4 bis 6 Fuß sorgfältig in einander zu splissen. Der Rollenkranz erhält zur Aufnahme des einen Rundseiles eine $1^1/_4$ bis $1^3/_4$ Zoll breite und $1^1/_2$ bis 2 Zoll tiefe Rinne, deren Sohle von einem $1^1/_2$ bis $2^1/_2$ Linien dicken Lederkranz gebildet wird.

Man wendet diese Seilräder wie die Riemenräder vorzüglich bei großen Geschwindigkeiten an, welche sogar bis 100 Fuß steigen können.

Bei großen Kräften wendet man zur Fortpflanzung langsamer Umdrehungsbewegungen auch statt der Riemenräder sogenannte Kettenvorgelege an. Die Bolzen der Laschen-

kette *AABB*, Fig. 455, welche hierbei zur Anwendung kommt, liegen hier zwischen den Zähnen des Zahnrades *DAE*,

Fig. 455.

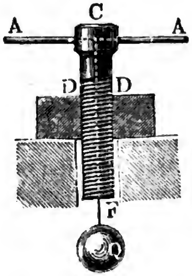


während die Laschen den Radkranz umschließen. Die Dicke eines Bolzens läßt sich wie bei den Gliederketten, $d = 0{,}00735 \sqrt{R}$ setzen, wenn R die Zugkraft bezeichnet; wogegen die Länge desselben, $l = 2{,}5\, d$ gemacht wird. Die Dicke der Laschen ist $\frac{d}{2}$, die kleinste Breite derselben, $\frac{3}{2} d$ und die größte Breite, $\frac{5}{2} d$ zu machen. Die Zahndicke macht man $\frac{3}{2} d$, und die Zahntheilung $s = d + \frac{3}{2} d + 0{,}05\, d = 2{,}55\, d$. Die Sehnentheilung ist natürlich gleich dem Axenabstande zweier Bolzen. Die Flanken des Zahnobertheiles sind nach einer Aequidistante zur Kreisevolvente fg und die des Zahnuntertheiles nach einem Kreise vom Durchmesser $1{,}05\, d$ zu construiren.

§. 97. Schrauben, Schraubenräder und Schneckenräder. Das Kraftmoment, welches zur Umdrehung einer flachgängigen Schraube *DF*, Fig. 456, nöthig ist, um eine Last Q zu heben oder niederzulassen, ist

$$Pa = Q b \; tang. (\alpha \pm \varrho) = \left(\frac{h \pm \varphi \pi d}{\pi d \mp \varphi h}\right) Q b,$$

Fig 456.



wobei α den Steigwinkel, h die Ganghöhe und $d = 2b$, den mittleren Durchmesser des Schraubengewindes, sowie ϱ den Reibungswinkel und φ den Reibungscoefficienten bezeichnen.

Sind d_1 und d_2 die größten und kleinsten Durchmesser des Schraubengewindes, so hat man

$$d = 2b = \frac{d_1 + d_2}{2} \left[1 + \tfrac{1}{3} \left(\frac{d_1 - d_2}{d_1 + d_2}\right)^2\right],$$

also annähernd $= \frac{d_1 + d_2}{2}$, und es ist

$$tang.\,\alpha = \frac{h}{\pi d}, \text{ sowie } tang.\,\varrho = \varphi \text{ (der Reibungscoefficient).}$$

Ohne Rücksicht auf Reibung wäre $Pa = Qb\,tang.\,\alpha = \frac{Qh}{2\pi}$; folglich ist der Wirkungsgrad einer solchen Schraube, wenn dieselbe als Bewegungsmechanismus dient, $\eta = \frac{tang.\,\alpha}{tang.\,(\alpha + \varrho)}$.

Bei schwachsteigenden Schrauben ist α kleiner als ϱ, daher der Wirkungsgrad sehr klein.

Für eine scharfgängige Schraube hat man, wenn β den Neigungswinkel der Erzeugungslinie gegen den Querschnitt der Schraube bezeichnet annähernd

$$Pa = Qb\ tang.\ (\alpha \pm \varrho_1) = \left(\frac{h\cos.\beta \pm \varphi\pi d}{\pi d\cos.\beta \mp \varphi h}\right) Qb,$$

wobei $tang.\,\varrho_1 = \frac{tang.\,\varrho}{cos.\,\beta} = \frac{\varphi}{cos.\,\beta}$ zu setzen ist.

Der Wirkungsgrad $\eta = \frac{tang.\,\alpha}{tang.\,(\alpha + \varrho_1)}$ fällt hier noch kleiner aus als bei der Schraube mit rectangulärem Gewinde, weshalb sich letztere zu einem bewegenden Maschinentheil besser eignet wie erstere.

Wird die Schraubenmutter, wie Fig. 457 darstellt, in Um-

Fig. 457.

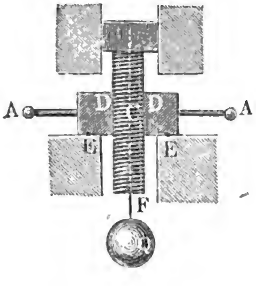
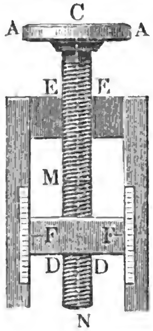


Fig. 458.



drehung gesetzt, so ist noch die Reibung an der Basis der drehbaren Mutter mit zu überwinden, und deshalb

$$Pa = Q\,[b\,tang.\,(\alpha + \varrho_1) + \varphi b_1] \text{ zu setzen,}$$

wenn b_1 den mittleren Halbmesser des Reibungsringes EE bezeichnet.

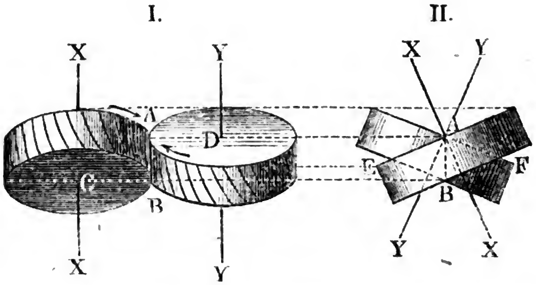
Während bei einer einfachen Schraube, wie Fig. 456 u. 457, das Verhältniß zwischen dem axialen Wege oder dem Wege w des Lastpunktes der Schraube zum Wege v des Kraftpunktes A: $\frac{w}{v} = \frac{h}{2\pi a} = \frac{b}{a}\,tang.\,\alpha$ ist, fällt dagegen bei der Differenzialschraube AMN, Fig. 458, dieses Verhältniß

$\frac{w}{v} = \frac{b\, tang.\, \alpha - b_1\, tang.\, \alpha_1}{a}$ aus, wenn α und α_1 die Steigwinkel, sowie b und b_1 die mittleren Halbmesser der Gewinde MD und ME bezeichnen. Bei gleichem Halbmesser und den Ganghöhen h und h_1 ist

$$\frac{w}{v} = \frac{b}{a}(tang.\, \alpha - tang.\, \alpha_1) = \frac{h - h_1}{2 \pi a}.$$

Bei einem Schraubenräderwerke $CABD$, Fig. 459 I u. II,

Fig. 459.



werden die Zähne von Schraubengewinden gebildet. Die Summe $\alpha_1 + \alpha_2$ der Steigwinkel $EAB = \alpha_1$ und $FAB = \alpha_2$ (II) dieser Gewinde ergänzt den Winkel $XAY = \alpha$ zwischen den Axenrichtungen der Räder zu 180 Grad. Ist Pa das Kraftmoment und r_1 der Halbmesser CB des Rades ABC (I), sowie Qb das Lastmoment und r_2 der Halbmesser DA des Rades ABD, so hat man

$$Pa = Qb \cdot \frac{r_1 \sin. (\alpha_1 + \varrho)}{r_2 \sin. (\alpha_2 - \varrho)},$$

folglich ohne Rücksicht auf die Reibung,

$$Pa = Qb \cdot \frac{r_1 \sin. \alpha_1}{r_2 \sin. \alpha_2}.$$

Der Normaldruck zwischen zwei Zähnen ist $R = \frac{Pa}{r_1 \sin. \alpha_1}$ $= \frac{Qb}{r_2 \sin. \alpha_2}$. Hiernach bestimmt sich nach §. 90, die Zahndicke a_1, woraus die Theilungen auf den Radumfängen:

$s_1 = \frac{2{,}1\, a_1}{\sin. \alpha_1}$ und $s_2 = \frac{2{,}1\, a_1}{\sin. \alpha_2}$, sowie die Zähnezahlen

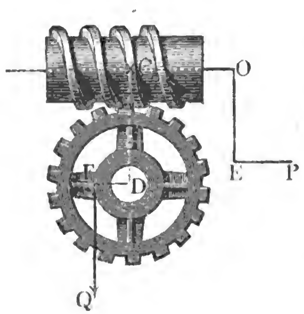
$n_1 = \frac{2 \pi r_1}{s_1}$ und $n_2 = \frac{2 \pi r_2}{s_2}$ folgen.

Das Umsetzungsverhältniß ist $\psi = \frac{n_1}{n_2} = \frac{r_1 \sin. \alpha_1}{r_2 \sin. \alpha_2}$, daher das Geschwindigkeitsverhältniß

$$\frac{w}{v} = \frac{b\, r_1 \sin. \alpha_1}{a\, r_2 \sin. \alpha_2} = \frac{n_1}{n_2}\, \frac{b}{a} = \psi \cdot \frac{b}{a}.$$

Die Schraube ohne Ende, Fig. 460, ist ein Schraubenräderwerk, wo der Axenwinkel, folglich auch $\alpha_1 + \alpha_2$, $= 90$ Grad mißt. Daher hat man hier

Fig. 460.



$$Pa = Q b \, \frac{r_1}{r_2} \, tang. (\alpha_1 + \varrho),$$

wobei a den Hebelarm OE der Kraft und b den Hebelarm DF der Last bezeichnet. Noch hat man hier

$$\psi = \frac{n_1}{n_2} = \frac{r_1}{r_2} \, tang. \, \alpha_1,$$

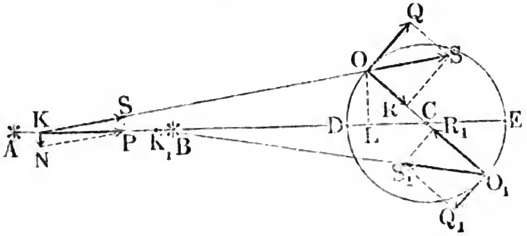
daher

$$Pa = Qb \cdot \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{tang. (\alpha_1 + \varrho)}{tang. \alpha_1},$$

also ohne Rücksicht auf Reibung, $Pa = \frac{n_1}{n_2} Q b$. Sehr oft hat die Welle CO nur ein Gewinde, ist also $n_1 = 1$, daher dann $Pa = \frac{Q b}{n_2}$.

§. 98. Statik der Kurbel und des Kreisexcentriks. Die **Daumen** oder **Warzen** eines **Excentriks**, wodurch eine umlaufende Welle eine Stange oder einen Hebel in Bewegung setzt, lassen sich entweder wie die Zähne eines Räderwerkes construiren oder werden nach der **Daumencurve** (s. S. 181), und insbesondere entweder nach der **archimedischen Spirallinie** oder nach der **Kreisevolvente** geformt. Das **Kreisexcentrik** ist in der Wirkungsweise von der **Kurbel** oder dem **Krummzapfen** nicht verschieden; bei jenem ist der Halbmesser der Warze größer, bei diesem ist er kleiner als die Kurbelarmlänge oder der Halbmesser des Warzenkreises. Bezeichnet a, Fig. 461, die Länge $CO = CD = CE$ des

Fig. 461.



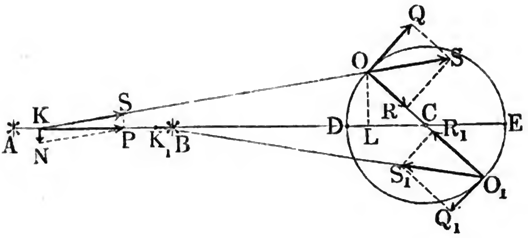
Kurbelarmes, l die Länge $KO = AD = BE$ der Kurbelstange, β den veränderlichen Umdrehungswinkel DCO (ECO_1) und α den veränderlichen Winkel CKO $(CK_1 O_1)$, um welchen die Kurbelstange KO $(K_1 O_1)$ von der Schubrichtung AC abweicht, so sind die entsprechenden Stangenschübe

$$AK = s = a(1 - cos.\beta) + l\,(1 - cos.\alpha),$$ und
$$BK_1 = s_1 = a(1 - cos.\beta) - l\,(1 - cos.\alpha).$$

Da in der Regel ist $\frac{l}{a} \geqq 6$ ist, so läßt sich

$$s = a\,(1 - cos.\beta) + \frac{a^2}{2l}\,(sin.\beta)^2$$
$$= a\,(1 - cos.\beta)\left[1 + \frac{a}{l}\left(cos.\frac{\beta}{2}\right)^2\right],$$ sowie
$$s_1 = a\,(1 - cos.\beta) - \frac{a^2}{2l}\,(sin.\beta)^2$$
$$= a\,(1 - cos.\beta)\left[1 - \frac{a}{l}\left(cos.\frac{\beta}{2}\right)^2\right]$$ setzen.

Fig. 462.



Ist w die Geschwindigkeit der Warze O (O_1) und v die Geschwindigkeit der Stange, so hat man

$$\frac{v}{w} = \left(1 \pm \frac{a}{l}\;cos.\beta\right) sin.\beta.$$

Bezeichnet ferner P die Stangenkraft und Q die Umdrehungskraft der Warze eines doppeltwirkenden Krummzapfens, so hat man, da $Pv = Qw$ ist,

$$Q = \frac{P sin.(\beta \pm \alpha)}{cos.\alpha} = P\left(1 \pm \frac{a}{l}\;cos.\beta\right) sin.\beta.$$

Bei constanter Stangenkraft P ist der Maximalwerth der Umdrehungskraft:

$$Q = P\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{l}\right)^2\right],$$ wobei $cos.\beta = \pm\frac{a}{l}$,

und daher der entsprechende Schub:

$$s = a \mp \frac{a^2}{2l} = a\left(1 \mp \frac{a}{2l}\right)$$ ausfällt.

Hierbei ist der mittlere Werth der Umdrehungskraft:

$$Q = \frac{2}{\pi}\,P = 0{,}6366\,P,$$ und umgekehrt, die Stangenkraft

$$P = \frac{\pi}{2}\,Q = 1{,}5708\,Q.$$

Der Umdrehungswinkel β, bei welchem die mittlere Umdrehungskraft wirkt, ist bestimmt durch die Gleichung

$$\sin.\beta\left(1 \pm \frac{a}{l}\cos.\beta\right) = \frac{2}{\pi}, \text{ oder}$$

$$\sin.\beta = \frac{2}{\pi}\left[1 \pm \frac{a}{l}\sqrt{1-\left(\frac{2}{\pi}\right)^2}\right]$$

$$= 0{,}6366\left(1 \pm 0{,}7712\,\frac{a}{l}\right),$$

wonach für eine sehr lange Kurbelstange, $\beta = 39^0 32'$ und $140^0 28'$ folgt.

Ist die Kraft beim Hingange, P_1 und beim Rückgange, P_2, so hat man die mittlere Kraft $P = \frac{P_1 + P_2}{2}$, und

$$Q = \frac{P_1 + P_2}{\pi} = 0{,}3183\,(P_1 + P_2).$$

Bei einem einfachwirkenden Krummzapfen ist $P_2 = 0$, daher

$$P = \frac{P_1}{2} \text{ und } Q = \frac{P_1}{\pi} = 0{,}3183\,P_1.$$

Zwei einfachwirkende Kurbeln mit diametral gegenüberstehenden Warzen wirken genau wie ein einfacher doppeltwirkender Krummzapfen.

Die Warzenreibung auf den Warzenkreis reducirt, ist

$F_1 = \frac{r}{a}\varphi P$, wenn r den Warzenhalbmesser und φ den Reibungscoefficienten bezeichnet; sie fällt beim Kreisexcentrik, wo $r > a$ ist, besonders groß aus.

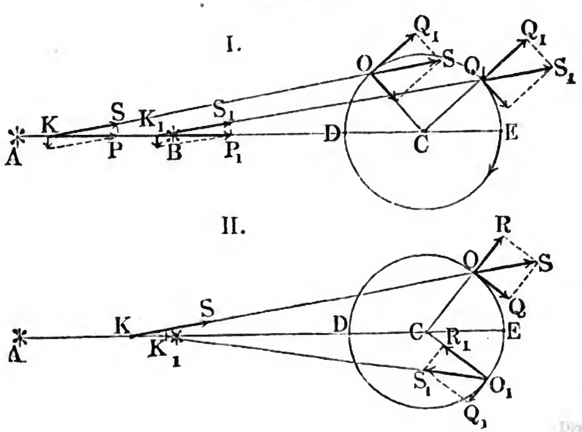
Die Reibung in der Führung, eben dahin reducirt, ist

$F_2 = \frac{a}{2l}\varphi P$, sinkt aber auf

$F_2 = \frac{r_2}{r_1}\cdot\frac{a}{2l}\varphi P$ herab, wenn der Stangenkopf mit Frictionsrädern versehen ist, deren Halbmesser r_1 mißt, während die Zapfen derselben den Halbmesser r_2 haben.

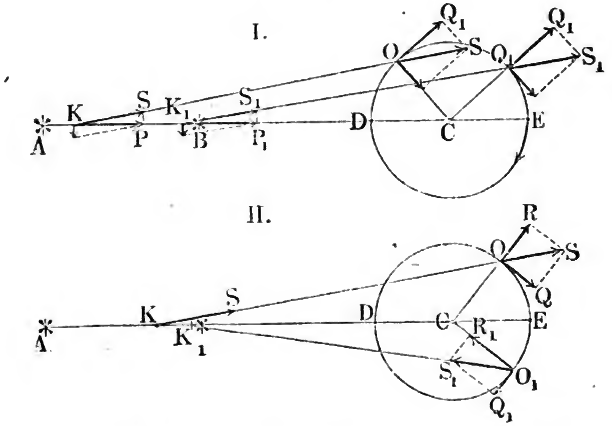
Bei einer doppelten Kurbel OCO_1, Fig. 463 I und II,

Fig. 463.



mit den aufs Viertel gestellten Warzen und den Stangenkräften P und P_1 ist die ganze Umdrehungskraft oder Last im ersten Quadranten (I)

Fig. 464.



$$Q = P \sin.\beta + P_1 \cos.\beta \pm (P - P_1) \frac{a}{2l} \sin.2\beta;$$

folglich für $P_1 = P$:

$$Q = P(\sin.\beta + \cos.\beta).$$

Im zweiten Quadranten (II) ist dagegen:

$$Q = P \sin.\beta - P_1 \cos.\beta \pm (P + P_1) \frac{a}{2l} \sin.2\beta,$$

daher für $P_1 = P$:

$$Q = P(\sin.\beta - \cos.\beta) \pm P \frac{a}{l} \sin.2\beta.$$

Für $\beta = 45$ und 135 Grad nimmt Q den Maximalwerth $Q_m = P\sqrt{2} = 1{,}4142\,P$ an. Der Mittelwerth der Umdrehungskraft ist

$$Q = \frac{4}{\pi} P = \frac{2}{\pi} \cdot 2P = 0{,}6366 \cdot 2P = 1{,}2732\,P,$$

und kommt zur Wirkung für $\sin.\beta + \cos.\beta = \frac{4}{\pi}$, oder

$$\sin.2\beta = \pm\left[\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 - 1\right] = \pm\, 0{,}6211, \text{ wonach}$$

$\beta = 19^0 12'$ und $70^0 48'$, sowie $109^0 12'$ und $160^0 48'$ folgt.

§. 99. Mechanik des einfachen und doppelten Krummzapfens. Sind beide Kräfte P und Q eines doppeltwirkenden einfachen Krummzapfens constant, ist ferner M die gesammte, auf den Warzenkreis reducirte träge Umdrehungsmasse, und M_1 die gesammte träge Stangenmasse, wobei man ein Drittel der Kurbelstangenmasse zu M und zwei Drittel derselben zu M_1 rechnet, so läßt sich aus der mittleren Geschwindigkeit c in dem todten Punkte D die dem Umdrehungswinkel β entsprechende Warzengeschwindigkeit mittels der Formel

1) $M(v^2 - c^2) + M_1 v^2 (sin.\beta \pm \frac{a}{2l}\ sin.\ 2\beta)^2$

$$= 2Pa\left[1 - cos.\beta - \frac{2}{\pi}\beta \pm \frac{a}{2l}\ (sin.\ \beta)^2\right]$$

bestimmen, wonach, da zur Erlangung einer kleinen Veränderlichkeit in der Geschwindigkeit der Umdrehungsbewegung, M viel größer als M_1 ist, folgt

2) $v\left[1 + \frac{M_1}{2M}\left(sin.\beta \pm \frac{a}{2l}\ sin.\ 2\beta\right)^2\right]$

$$= c\left[1 + \frac{Pa}{Mc^2}\left(1 - cos.\beta - \frac{2}{\pi}\beta \pm \frac{a}{2l}(sin.\beta)^2\right)\right].$$

In der Regel ist die Masse M_1 klein genug gegen M, um sie vernachlässigen zu können, daher ergiebt sich

3) $v = c\left[1 + \frac{Pa}{Mc^2}\left(1 - cos.\beta - \frac{2}{\pi}\beta \pm \frac{a}{2l}(sin.\beta)^2\right)\right].$

Der Umdrehungswinkel, bei welchem v ein Maximum oder Minimum ist, wird durch die Gleichung

4) $sin.\beta = \frac{2}{\pi} \mp \frac{a}{2l}\ sin.\ 2\beta$ bestimmt.

Für $\frac{a}{l} = 0$, ist $sin.\beta = \frac{2}{\pi} = 0{,}6366$, daher $\beta =$ $39^0 32'$ und $140^0 28'$; wonach die Maximalgeschwindigkeit

5) $\begin{cases} v_m = \left(1 + 0{,}2105\ \frac{Pa}{Mc^2}\right)c, \text{ ferner d. Minimalgesch} \\ v_n = \left(1 - 0{,}2105\ \frac{Pa}{Mc^2}\right)c, \text{ und der Ungleichför-} \end{cases}$

migkeitsgrad

6) $\delta = \frac{v_m - v_n}{c} = 0{,}4210\ \frac{Pa}{Mc^2}$ folgt.

Für $\frac{a}{l} = \frac{1}{5}$, ist $sin.\ \beta = \frac{2}{\pi} \pm 0{,}1\ sin.\ 2\beta$, daher entweder $\beta = 47^0 25'$ und $146^0 45'$, oder $\beta = 33^0 5'$, und $132^0 35'$.

Hiernach hat man für die eine Umdrehungshälfte der Kurbel

7) $v_m = \left(1 + 0{,}2577\ \frac{Pa}{Mc^2}\right)c$ und $v_n = \left(1 - 0{,}1757\ \frac{Pa}{Mc^2}\right)c$,

und dagegen für die andere Umdrehungshälfte:

8) $v_m = \left(1 + 0{,}1757\ \frac{Pa}{Mc^2}\right)c$ und $v_n = \left(1 - 0{,}2577\ \frac{Pa}{Mc^2}\right)c$,

so daß der Ungleichförmigkeitsgrad:

9) $\delta = \frac{v_m - v_n}{c} = 0{,}5154\ \frac{Pa}{Mc^2}$ folgt.

Für den doppelten Krummzapfen, dessen Arme um den Rechtwinkel von einander abweichen, hat man, wenn sich die nachfolgende Warze im ersten oder dritten Quadranten befindet:

10) $\begin{cases} (M + M_1)(v^2 - c^2) = 2Pa\left(1 + sin.\beta - cos.\beta - \frac{4}{\pi}\beta\right), \\ \text{ferner, wenn sie den zweiten od. vierten Quadranten durchläuft:} \\ (M + M_1)(v^2 - c^2) = 2Pa\left(1 + sin.\beta - cos.\beta - \frac{4}{\pi}\beta \right. \\ \left. \quad \pm \frac{a}{l}\ (sin.\beta)^2\right). \end{cases}$

Für die Maximal- und Minimalgeschwindigkeiten im ersten und dritten Quadranten ist:

11) $sin. 2\beta = \pm\left[\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 - 1\right] = \pm\, 0{,}6211,$

wonach $\beta = 19^0 12'$ und $70^0 48'$ folgt, und sich

12) $v_m = \left(1 + 0{,}04217 \frac{Pa}{(M+M_1)c^2}\right)c$, sowie

$v_n = \left(1 - 0{,}04217 \frac{Pa}{(M+M_1)c^2}\right)c$ ergiebt.

Für den zweiten und vierten Quadranten hat man dagegen:

13) $sin. 2\beta = \left(\frac{4}{\pi} \pm \frac{a}{l}\, sin.\, 2\beta\right)^2 - 1$, z. B. für $\frac{a}{l} = 1/_5$,

14) $sin. 2\beta = (1{,}2732 \pm 0{,}2\; sin. 2\beta)^2 - 1$
$= 0{,}6211 \pm 0{,}5093\; sin. 2\beta + 0{,}04\,(sin. 2\beta)^2,$

d. i. $sin. 2\beta = 1{,}2657 + 0{,}0785\,(sin. 2\beta)^2$ oder auch
$= 0{,}4115 + 0{,}0265\,(sin. 2\beta)^2.$

Da $sin. 2\beta$ höchstens $= 1$ sein kann, so findet nur im zweiten Quadranten ein Maximum und Minimum von v statt, und zwar für

$\beta = 12^0 17\tfrac{1}{2}'$ und $77^0 42\tfrac{1}{2}$. Hiernach ist

15) $v_{m_1} = \left(1 + 0.2283 \frac{Pa}{(M+M_1)c^2}\right)c$ und

$v_{n_1} = \left(1 - 0{,}0283 \frac{Pa}{(M+M_1)c^2}\right)c.$

Endlich folgt der Ungleichförmigkeitsgrad, für $\frac{a}{l} = 0$,

16) $\delta = \frac{v_m - v_n}{c} = 0{,}08434 \frac{Pa}{(M+M_1)c^2}$

$= 0{,}04217 \frac{2Pa}{(M+M_1)c^2}$, und für $\frac{a}{l} = 1/_5$,

17) $\delta = \frac{v_{m_1} - v_n}{c} = 0{,}2705 \frac{Pa}{(M+M_1)c^2}$

$= 0{,}1352 \cdot \frac{2Pa}{(M+M_1)c^2}.$

Bei directwirkenden Kolbenmaschinen, wo der Krummzapfen nur zum Anschluß eines Schwungrades dient, ist $P = Q$, und daher

$M(v^2 - c^2) + M_1 v^2 \left(sin.\, \beta \pm \frac{a}{2l}\, sin.\, 2\beta\right)^2 = 0,$

wonach

18) $v^2\left[M + M_1\left(sin.\, \beta \pm \frac{a}{2l}\, sin.\, 2\beta\right)^2\right] = Mc^2$, und

19) $v = c\sqrt{\frac{M}{M + M_1\left(sin.\, \beta \pm \frac{a}{2l}\, sin.\, 2\beta\right)^2}}$ folgt.

Hier ist für $\beta = 0$ die Geschwindigkeit v am größten, und zwar $v_m = c$, dagegen für $cos.\, \beta = \mp \frac{a}{l}\, cos.\, 2\beta$, an-

nähernd $\cos.\beta = \pm \frac{a}{l}$, ein Minimum, und zwar

20) $$v_n = c \sqrt{\frac{M}{M + M_1\left[1 + \left(\frac{a}{l}\right)^2\right]}}.$$

Der entsprechende Ungleichförmigkeitsgrad ist

21) $$\delta = \frac{v_m - v_n}{c} = 1 - \sqrt{\frac{M}{M + M_1\left[1 + \left(\frac{a}{l}\right)^2\right]}}.$$

Für $\frac{a}{l} = 0$, ist $\delta = 1 - \sqrt{\frac{M}{M + M_1}}$ und für $\frac{a}{l} = \frac{1}{5}$,

$$\delta = 1 - \sqrt{\frac{M}{M + \frac{26}{25} M_1}}.$$

Wenn, wie z. B. bei den Dampfmaschinen mit Expansion, die Stangenkraft P nicht constant ist, so fällt unter übrigens gleichen Verhältnissen der Ungleichförmigkeitsgrad noch kleiner aus. Folgende Tabelle enthält den Ungleichförmigkeitsgrad für den einfachen doppeltwirkenden Krummzapfen bei Dampfmaschinen mit verschiedenen Expansionen.

Expansionsverhältniß ε		1	2	3	4	5
Ungleichförmigkeitsgrad δ	für $\frac{a}{l} = 0$	0,661	0,792	0,852	0,891	0,922 $\frac{Pa}{Mc^2}$
	für $\frac{a}{l} = \frac{1}{5}$	0,810	0,947	1,004	1,033	1,062 $\frac{Pa}{Mc^2}$

Diese Verhältnisse ändern sich nicht wesentlich, wenn die Krummzapfen nicht direct an die Kolbenstange, sondern an einen langarmigen Hebel oder Balancier angeschlossen sind.

§. 100. Dimensionen der Krummzapfen und Excentriks. Der Durchmesser d einer Kurbelwelle ist nach den in §. 86 (S. 597) angegebenen Formeln zu berechnen, und der Durchmesser des Wellenkopfes ist $= 1,2\,d$ zu machen. Die Nabe, womit die Kurbel B, Fig. 465 und 466 auf der Welle

Fig. 465.

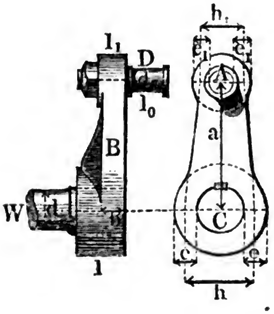
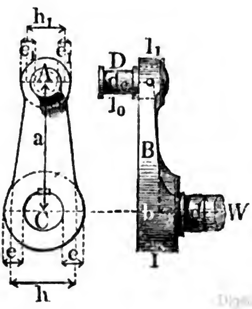


Fig. 466.



W aufsitzt, erhält die Länge $l = 1{,}2\,d$ und die Wanddicke $e = 0{,}425\,d$ bis $0{,}5\,d$, und zwar $e = 0{,}425\,d$, wenn die Kurbel aus Schmiedeeisen und die Welle aus Gußeisen besteht, dagegen $e = 0{,}50\,d$, wenn beide aus demselben Material bestehen. Bezeichnet $\mu = \frac{b}{h}$ das Verhältniß der Breite b zur Dicke h des Kurbelarmes, unmittelbar in der Wellenaxe gemessen, so ist zu setzen

$$h = 8\sqrt[3]{\frac{L}{\mu u}}\ \text{Zoll} = 20{,}9\sqrt[3]{\frac{L}{\mu u}}\ \text{Centimeter},$$

wo L die durch den Krummzapfen überzutragende Arbeit in Pferdekräften und u die Umdrehungszahl der Kurbelwelle pro Minute bezeichnen.

Auch läßt sich, wenn der Kurbelarm und die Welle aus gleichem Material bestehen, setzen: $\frac{h}{d} = \frac{1{,}2}{\sqrt[3]{\mu}}$

für $\mu =$	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,5	0,6
$\frac{h}{d} =$	2,05	1,90	1,79	1,70	1,63	1,51	1,42

Ist der Krummzapfen aus Schmiedeeisen und die Welle aus Gußeisen, so nehme man h um $1/_8 h$ kleiner an. Aus h folgt $b = \mu h$. Die Stärke d_0 der Warze bestimmt sich aus der Stangenkraft P nach der bekannten Formel

$d_0 = 0{,}0415\sqrt{\lambda P}$ Zoll $= 0{,}155\sqrt{\lambda P}$ Centimeter (s. §. 85, S. 594).

Auch hat man einfach für die gewöhnlichen schmiedeeisernen Warzen

$\frac{d_0}{d} = 0{,}90\sqrt[3]{\frac{d_0}{a}}$, wenn die Welle, wie in Fig. 467, von Gußeisen, und

$\frac{d_0}{d} = 1{,}1\sqrt[3]{\frac{d_0}{a}}$, wenn die Welle, wie in Fig. 468, aus Schmiedeeisen besteht. Die Länge der Warze ist $l_0 = \lambda d_0 = 1{,}25\,d_0$ zu setzen.

Fig. 467.

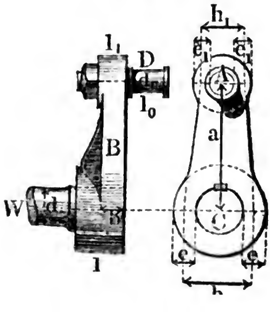
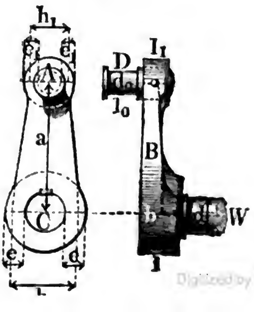


Fig. 468.

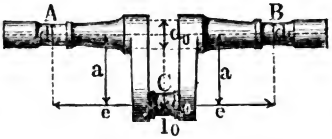


Der Warzendicke giebt man gewöhnlich einen Anlauf (s. S. 594). Die Warzennabe erhält die Länge $l_1 = 1{,}3\,d_0$, ferner ist bei einem gußeisernen Kurbelarm r, die Nabendicke $e_1 = 0{,}6\,d_0$, und in der Axe des Auges gemessen, die Armdicke $h_1 = 1{,}5\,d_0$ sowie die Armbreite $b_1 = 1{,}1\,d_0$, dagegen bei einem schmiedeeisernen Kurbelarme, $e_1 = 0{,}5\,d_0$, $h_1 = 1{,}3\,d_0$ und $b_1 = 0{,}7\,d_0$.

Zuweilen ersetzt man die cylindrische Warze durch eine kugelförmige vom Durchmesser $1{,}5\,d_0$.

Wenn eine gekröpfte Welle ACB, Fig. 469, die von der Warze C ausgehende Kraft P je zur Hälfte nach beiden Seiten A und B hin fortpflanzt, so erhält jeder der Zapfen A und B die Dicke

Fig. 469.



$$d = 0{,}140\,\sqrt[3]{\frac{Qa}{2}}$$

$$= 5{,}31\,\sqrt[3]{\frac{L}{2u}}\ \text{Zoll}$$

(s. S. 597), und die Warze C, sowie das imaginäre Wellenmittel, das Stärkeverhältniß $\frac{d_0}{d} = 0{,}95\,\sqrt[3]{\frac{e}{a}}$, wobei a die Armhöhe und e den Abstand der Zapfenmitten A und B von der Warzenmitte C, in der Axenrichtung gemessen, bezeichnen.

Wird die Kraft $P = \frac{2}{\pi}\,Q$, nur nach einer Seite A hin fortgepflanzt, so hat der andere Zapfen B keine Torsion auszuhalten und es ist die erforderliche Stärke desselben

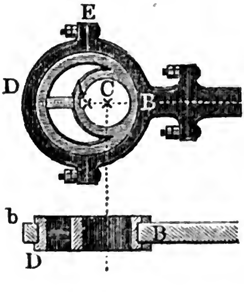
$$d_1 = 0{,}037\,\sqrt{\frac{P}{2}}\ \text{Zoll, wogegen die Stärke des Zapfens } A\text{:}$$

$$d = 0{,}140\,\sqrt{Qa} = 5{,}3\,\sqrt[3]{\frac{L}{u}}, \text{ u. d. Warzenstärkeverhältniß}$$

$$\frac{d_0}{d} = 0{,}76\,\sqrt[3]{\frac{e}{a}} \text{ folgt.}$$

Das Kreisexcentrik AEB, Fig. 470, ist eine Kurbel, deren Armlänge $CA = a$ kleiner ist, als der Warzenhalbmesser $AB = \frac{d}{2}$. Es fällt bei demselben die Arbeit der Warzenwirkung größer aus als bei der gewöhnlichen Kurbel, wo $a > \frac{d}{2}$ ist. Wenn man das Excentrik mit seinem Auge nicht auf die Welle aufstecken kann, muß es, wie der

Fig. 470.



Excentrikgurt BDE, aus zwei Theilen zusammengeschraubt werden. Natürlich läßt sich ein Kreisexcentrik durch eine gewöhnliche Kurbel ersetzen, dessen Warzendicke d_0 und Länge l_0 nach der obigen Formel zu berechnen ist, daher kann man auch die letztere für den Gurt beibehalten. Die Tiefe der Rinne, in welche der letztere zu liegen kommt, ist $\alpha = 0,2 + 0,07 l_0$ Zoll, und die ganze Breite des Excentriks: $\beta = l_0 + 2\alpha$ zu machen.

Der Durchmesser d_1 einer Kurbelstange mit kreisförmigem Querschnitte ist, wenn dieselbe nur Zug auszuhalten hat, dem Durchmesser d_0 der Kurbelwarze proportional zu setzen, und zwar hat man, eine schmiedeeiserne Kurbelwarze vorausgesetzt, für Kurbelstangen aus

Schmiedeeisen	Gußeisen	Gußstahl	Eichenholz
$\frac{d_1}{d_0} = 0,41$	0,58	0,20	1,12

Wenn dagegen, wie gewöhnlich, die Kurbelstange durch Zug und Druck wirkt, so hat man bei der Länge l derselben, wenn dieselbe besteht aus

Schmiedeeisen	Gußeisen	Gußstahl	Eichenholz
$\frac{d_1}{d_0} = 0,21 \sqrt{\frac{l}{d_0}}$	$= 0,25 \sqrt{\frac{l}{d_0}}$	$= 0,19 \sqrt{\frac{l}{d_0}}$	$= 0,44 \sqrt{\frac{l}{d_0}}$

An den Enden d genügt der Durchmesser $0,7\, d_1$.

Soll der kreisförmige Stangenquerschnitt durch einen rectangulären ersetzt werden, dessen größere Dimension $= h$ und kleinere Dimension $b = \nu h$ ist, so hat man zu setzen:

$$\frac{h}{d_1} = \sqrt[4]{\frac{3\pi}{16\nu}} = \frac{0,88}{\sqrt[4]{\nu}}, \text{ und } \frac{b}{h} = \nu.$$

Gußeiserne Kurbelstangen, wie AB, Fig. 471, erhalten einen kreuzförmigen Querschnitt $CDEF$, welcher als die Differenz von einem Quadrate und von vier Kreisquadranten anzusehen ist. Ist s die Seitenlänge $CD = CE$ und $r = \mu s$, der Halbmesser eines solchen Quadranten, so hat man zu setzen:

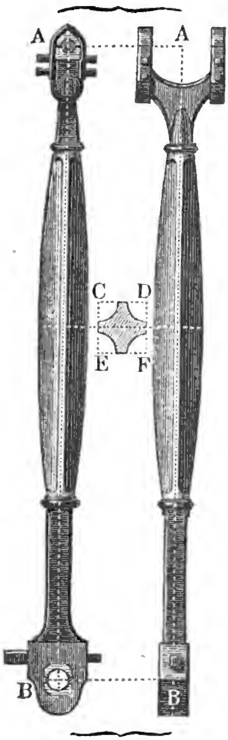
$$\frac{s}{d_1} = \frac{1}{2\sqrt[4]{\left[\frac{1}{3\pi}(1 + 16\mu^3) - (\mu^2 + \mu^4)\right]}},$$

z. B. für $\mu = 0,425$,

$$\frac{s}{d_1} = \frac{0,5}{\sqrt[4]{[0,1061(1+16\mu^3)-(\mu^2+\mu^4)]}} = \frac{0,5}{\sqrt[4]{0,0232}} = 1,281.$$

§. 101. Die Geradführung. Die Kurbelstange wirkt entweder direct oder mittels eines Hebels oder Balanciers auf den Kolbenstangenkopf, und damit sich der letztere in möglichst gerader Linie bewege, erhält derselbe entweder eine Stangen- oder eine Gelenkführung.

Fig. 471.



Bei der Stangenführung gleitet das Querhaupt ADB, Fig. 472, mittelst der Backen AB, AB zwischen Stangen oder Schienen und ergreift das gabelförmige Ende der Kurbelstange mittels der Zapfen C, C. Zuweilen ersetzt man auch die Backen durch ein Paar Frictionsräder u. s. w. Die Stärke der Zapfen C, C ist $d_1 = \sqrt{1/2} \cdot d_0 = 0,71\, d_0$, ferner die Länge der Gleitbacken, sowie der Abstand derselben von einander, $l_1 = 5\, d_1$ bis $7\, d_1$.

Bei der Gelenkführung wird das Querhaupt CAC, Fig. 473, der Kolbenstange durch zwei in besonderen Zapfen E, E angreifende und mit schwingenden Hebeln verbundene Gelenke in einem von einer Geraden nicht sehr abweichenden Bogen einer Schleifenlinie

Fig. 472.

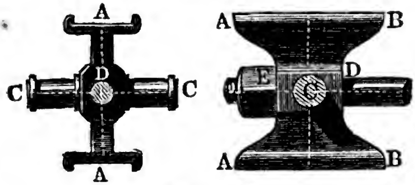
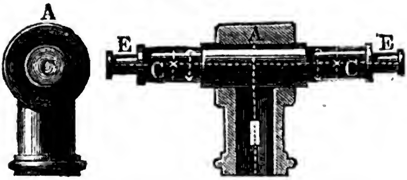


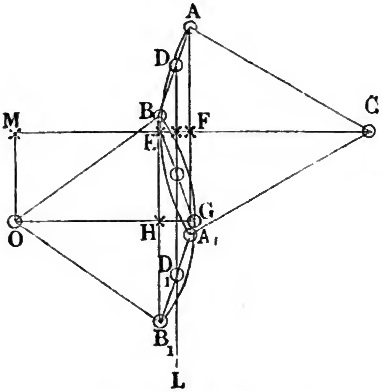
Fig. 473.



geleitet. Die Stärke der Zapfen C, C für die Kurbelstange oder, nach Befinden, für die Hängestangen, ist wieder $d_1 = 0{,}71\, d_0$, wogegen für die Zapfen E, E der Gelenke die Stärke $\frac{1}{2} d_1$ genügt.

Für eine Geradführung durch Gegenlenker, wie Fig. 474, hat man Folgendes. Es ist gegeben: die Balancierarmlänge

Fig. 474.



$CA = CE = l$, der Hub $AA_1 = BB_1 = DD_1 = s$, die Länge $AB = A_1B_1 = EG = a$ eines Hängeeisens, und das Verhältniß $\frac{AB}{AD} = \frac{A_1B_1}{A_1D_1} = n$, welches den Aufhängepunkt D oder D_1 der Kolbenstange am Hängeeisen bestimmt. Hieraus berechnet sich die Bogenhöhe EF des Balanciers:

$$1)\quad h = l - \sqrt{l^2 - \frac{s^2}{4}},$$

die Länge $OB = OB_1 = OG = l_1$ des Gegenlenkers:

$$2)\quad l_1 = \frac{s^2 + 4(n-1)^2 h^2}{8(n-1)h} = \frac{l + n(\frac{1}{2}n - 1)h}{n-1};$$

ferner der Horizontalabstand CM der Drehaxen C und M:

$$3)\quad x = l + l_1 - \frac{nh}{2},$$

und der Verticalabstand MO:

$$4)\quad y = \sqrt{a^2 - \left(\frac{nh}{2}\right)^2}.$$

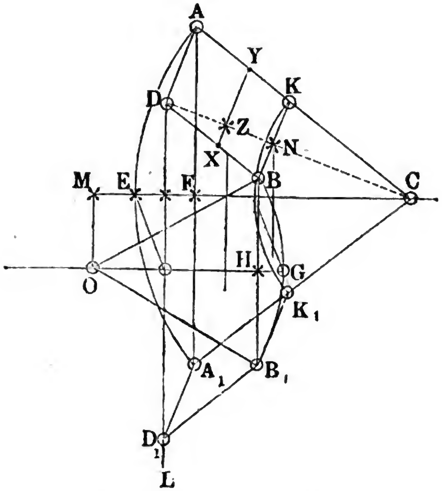
Gewöhnlich nimmt man $n = 2$ an, hängt also die Kolbenstange in der Mitte des Hängeeisens auf. Es ist dann $l_1 = l$ und die größte Seitenabweichung:

$$\delta = \pm\, 0{,}00138\, \frac{s^5}{a\, l^3}.$$

Folgende Verhältnisse gelten für die Geradführung durch ein Parallelogramm in Fig. 475. Es ist gegeben:

Die Balancierarmlänge $CA = CA_1 = CE = l$, die Balancierarmlänge $CK = CK_1 = \frac{1}{n} l$, also die Länge des

Fig. 475.



Parallelogrammes $AK = BD = \left(1 - \frac{1}{n}\right) l$; ferner der Stangenhub $AA_1 = DD_1 = s$ und die Länge eines Hängeeisens $AD = KB = a$.

Hieraus berechnet sich die Bogenhöhe EF des Banlanciers:

1) $h = l - \sqrt{l^2 - \frac{s^2}{4}}$,

die Länge $OB = OB_1 = OH$ des Lenkers:

2) $l_1 = \frac{s^2 + 4(n-1)^2 h^2}{8n(n-1)h} = \frac{l + n(\frac{1}{2}n - 1)h}{n(n-1)}$.

Ferner der Horizontalabstand CM der Drehaxen ist:

3) $x = \frac{l}{n} + l_1 - \frac{h}{2}$,

und der Verticalabstand MO:

4) $y = \sqrt{a^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}$.

Gewöhnlich nimmt man $n = 2$ an, giebt also dem Parallelogramme halb so viel Länge als dem Balancierarm, weshalb dann $l_1 = \frac{1}{2} l$ sich herausstellt. Die größte Seitenabweichung, welche hierbei eintritt, ist:

$$\delta = \pm\ 0{,}00138 \frac{s^5}{a l^3}.$$

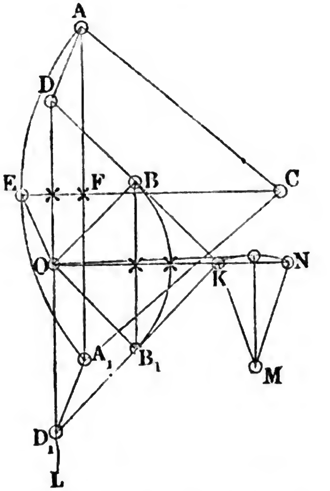
Punkte, wie N und Z, in welchen eine Gerade CD die

41 *

Hängeeisen BK und XY schneidet, bewegen sich parallel mit D, können daher ebenfalls als Aufhängepunkte von Kolbenstangen dienen.

Für die **Geradführung mit Lenker und Träger**, wie Fig. 476. gilt Folgendes:

Fig. 476.



Die Hublinie DD_1 halbirt, wie oben, die Bogenhöhe EF. Die Länge $OB = OB_1 = l_1$ des Lenkers ist willkürlich, die Länge des Gelenkes, $DK = 2\,\overline{DB}$ ist $= 2\,\overline{OB} = 2\,l_1$.

Die Sehne KN des vom Träger MK beschriebenen Bogens ist $s_1 = 2\,l_1 - \sqrt{4\,l_1^2 - \frac{1}{4}s^2}$, wenn s, wie oben, den Kolbenhub bezeichnet. Setzt man ferner die Trägerlänge $MK = MN = r$, so hat man die Höhe des Bogens KN: $h_1 = r - \sqrt{r^2 - \frac{s_1^2}{4}}$, und die entsprechende größte Seitenabweichung:

$$\delta = h_1 \sqrt{\frac{s_1}{2\,l_1}} = 0{,}0000863\ \frac{s^5}{r\,l_1^3}.$$

Bei einem unendlich langen Träger ist $r = \infty$ und daher $\delta =$ Null.

Man kann auch den Balancier AC unmittelbar auf einem Träger wie MK aufsetzen und in seiner Mitte von dem Lenkarm OB ergreifen lassen, wobei dann die Gelenke AD und KD ganz wegfallen.

§. 102. Hebel und Balancier. Bei einem **Hebel** ACB, Fig. 477, ist, wenn Q die Last, P die Kraft und n das Verhältniß $\dfrac{CB}{CA} = \dfrac{b}{a}$ bezeichnet,

$\frac{P}{Q} = \frac{b}{a} = n$, und wenn α den Winkel ACB zwischen beiden Hebelarmen angiebt, der Druck im Zapfen C:

Fig. 477.

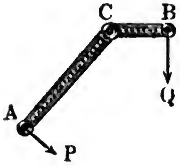
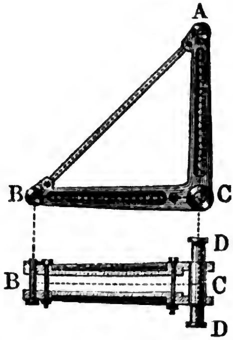


Fig. 478.



$R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ\cos.\alpha} = Q\sqrt{1 + n^2 - 2n\cos.\alpha}$.
(Vergl. §. 9, S. 345.)

Die Stärke des Zapfens der Last Q ist $d_0 = 0{,}035\sqrt{Q}$ Zoll, die des Zapfens der Kraft, $d_1 = 0{,}035\sqrt{P} = d_0\sqrt{n}$, und die des Axenzapfens C:

$$d = 0{,}035\sqrt{R} = d_0\sqrt[4]{1 + n^2 - 2n\cos.\alpha}.$$

Ist ein Zapfen doppelt, so erhält der einfache nur 0,71mal so viel Stärke als diese Formeln angeben. (Vergl. §. 85, S. 594.)

Die Armstärken lassen sich wie die Stärken eines Krummzapfenarmes berechnen. (S. §. 100, S. 638.)

Bei einem sogenannten **Kunstkreuze** ACB, Fig. 478, wo die Armenden durch eine schmiedeeiserne Zugstange AB mit einander verbunden sind, hat man

$$d_0 = 0{,}025\sqrt{Q},\ d_1 = d_0\sqrt{n} \text{ und}$$
$$d = d_0\sqrt[4]{1 + n^2}$$

dagegen sind die Armstärken nach der Zerknickungsfestigkeit (s. S. 394 u. s. w.) zu berechnen. Die Zugkraft in der Zugstange ist $S = Q\sqrt{1 + n^2}$, die Druckkraft im Arme CA: $N_1 = Q$, und die im Arme CB, $N_0 = P = nQ$.

Hiernach folgt der Querschnitt der schmiedeeisernen Zugstange:

$$F = \frac{S}{6000} = \frac{Q\sqrt{1 + n^2}}{6000} \text{ Quadratzoll,}$$

und der Durchmesser derselben

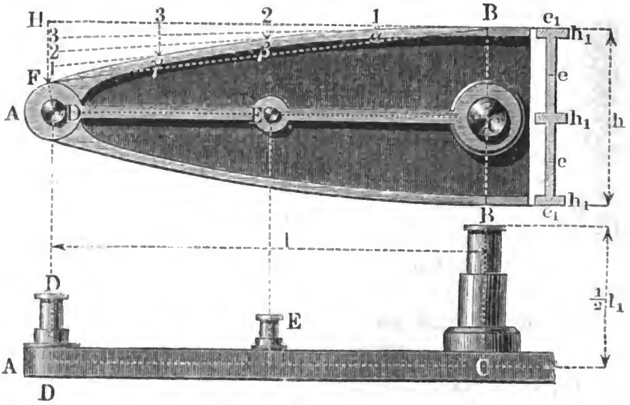
$$d = 0{,}0146\sqrt{Q}\sqrt[4]{1 + n^2} \text{ Zoll.}$$

Balanciers oder geradlinige Hebel sind nur bei größeren Maschinen, welche sich mit höchstens 6 Fuß mittlerer Kolbengeschwindigkeit bewegen, anzuwenden. Kleinere Balanciers

bestehen gewöhnlich aus einem Gußstück, größere aber aus zwei neben einander liegenden Theilen, welche durch Bolzen, sowie durch die Drehaxe u. s. w. fest mit einander verbunden sind. Die leichteren schmiedeeisernen Balanciers setzt man stets aus zwei symmetrischen Blechschilden zusammen, auch ist es sehr vortheilhaft, den Raum zwischen diesen Trägern noch durch einen Blechmantel von oben und unten zu bedecken.

Die Armlänge $CA = l$ eines Balanciers ABB, Fig. 479,

Fig. 479.



wird gewöhnlich $^3/_2$mal so groß als der Kolbenschub s, d. i. drei mal so groß als die Länge $a = {}^1/_2\, s$ des Kurbelarmes gemacht, wobei der Schwingungswinkel $\beta = 39$ Grad und die Höhe des Schwingungsbogens oder die Seitenbewegung des Punktes A, $= 0{,}0572\, l = 0{,}0858\, s$ beträgt. Die Querschnitte eines Balanciers sind in der Hauptform rechtwinkelig und die Höhe desselben nimmt vom Ende A an, allmälig nach der Mitte BB zu; zur Verstärkung erhält aber der ganze Balancierkörper noch eine Saum- und eine Mittelrippe. Das Verhältniß der Höhe $BB = h$ des Balanciers in der Mitte zur Armlänge $CA = l$ ist $\frac{h}{l} = {}^1/_4$ bis $^1/_3$. Hiernach bestimmt sich die Dicke e des Balanciers nach der Formel $e = \frac{6\,P\,l}{h^2\,T}$, wobei P die Stangenkraft am Balancierende A bezeichnet.

Für Gußeisen $T = 7000$ Pfd. angenommen, folgt $e = 0{,}01371\,\frac{P}{l}$ bis $0{,}00771\,\frac{P}{l}$ Zoll, jedoch setzt man in der Regel noch $^1/_4$ bis $^1/_2$ Zoll zu. Schmiedeeiserne Balanciers macht man um $\left(\frac{e}{4}\right)$ schwächer. Auch läßt sich für $\frac{h}{l} = {}^1/_4$,

$\frac{e}{d_0} = 6{,}37\ \frac{d_0}{l} + \frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{2}$ Zoll, und für $\frac{h}{l} = \frac{1}{8}$,
$\frac{e}{d_0} = 3{,}58\ \frac{d_0}{l} + \frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{2}$ Zoll setzen, wenn d_0 den Warzendurchmesser bezeichnet.

Gewöhnlich ist auch $\frac{h}{e} = 12$ bis 20.

Die Rippen erhalten die Höhe $h_1 = e$ und die Breite $e_1 = \frac{1}{5}h$. Die Länge l_1 der schmiedeeisernen Drehungsaxe C des Balanciers macht man $= \frac{3}{2}h$, und die Stärke d derselben bestimmt man wie die einer Tragwelle (s. §. 85, S. 592) nach der Formel $d = 0{,}10\ \sqrt[3]{M}$ Zoll, worin M das Moment $\frac{1}{4}Rl_1$ der Biegung in Zollpfund ausgedrückt, bezeichnet. Sind die Kräfte an beiden Balancierenden P und P_1 und ist G das ganze Gewicht des Balanciers, so hat man die ganze Last desselben $R = P + P_1 + G$, und daher

$$d = 0{,}063\ \sqrt[3]{(P + P_1 + G)\,l_1}\ \text{Zoll}.$$

Die Zapfen dieser Axe erhalten die Stärke

$$d_1 = 0{,}035\ \sqrt{\frac{R}{2}} = 0{,}0247\sqrt{P + P_1 + G}.$$

Uebrigens giebt man diesen Zapfen den gewöhnlichen Anlauf (s. S. 594) und den Axenhälsen eine bis d allmälig wachsende Dicke.

Annähernd läßt sich $G = 0{,}0016\,Pl$ Pfund setzen.

Sehr oft macht man diese Zapfenstärke auch gleich der Warzenstärke d_0 des Krummzapfens.

Der Nabe des Balanciers für die Drehungsaxe giebt man die Länge $l_2 = 3{,}5\,d_1$ und die Wandstärke $e_2 = 0{,}7\,d_1$. Auch macht man wohl $l_2 = 0{,}4\,h$ bis $0{,}5\,h$ und $e_2 = 0{,}09\,h$ bis $0{,}10\,h$.

Die Stärke des Doppelzapfens an dem Balancierende A ist $= 0{,}71\,d_0$, während die des Mittelstückes $= d_0$ gemacht wird. Die Hülse oder Nabe dieses Endzapfens erhält die Wandstärke $0{,}71\,d_0$ und die Länge $2\,d_0$; auch macht man wohl die äußere Dicke dieser Nabe, $= 0{,}4\,h$ und die Länge derselben $= 1{,}6\,e_1 = 0{,}32\,h$. Wäre das Balancierende gegabelt, und das Stangenende einfach, so würde die Stärke des Endzapfens $= 0{,}5\,d_0$ gemacht werden können. Die Dimensionen der Zapfen E für die in der halben Armlänge angeschlossenen Kolbenstangen u. s. w. müssen nach der Größe der von ihnen auszuübenden Kräften besonders bestimmt werden.

Um den Umriß $B\beta F$ des Balanciers zu finden, ziehe man von B aus eine Tangente BF an den Umfang der Nabe A, und eine Parallele BH zur Axe CA, dann theile die Verticale FH sowie die Parallele BH in gleiche Theile, ziehe von den Theilpunkten 1, 2, 3 ... der ersteren Transversalen nach B und durch die Theilpunkte 1, 2, 3 ... der letzteren

Parallele zu FH oder BC: die Durchschnitte α, β, γ ... der von gleichnamigen Theilpunkten ausgehenden Linien, liegen in dem gesuchten Umriß.

§. 103. Schwungräder. Durch ein Schwungrad soll die Ungleichförmigkeit einer Bewegung bis auf einen gewissen Grad herabgezogen werden. Diese Ungleichförmigkeit hat ihren Grund in der veränderlichen oder absetzenden Wirkung der Kraft oder Last, oder in der Veränderlichkeit des Verhältnisses der gleichzeitigen Wege der Kraft und Last, wie z. B. beim Krummzapfen. Es ist eine praktische Regel, das Schwungrad demjenigen Theil der Maschine so nahe wie möglich zu bringen, von welchem die Ungleichförmigkeit ausgeht. Also z. B. bei einem Hammerwerke mit Vorgelege, dasselbe nicht auf die Wasserrad-, sondern auf die Daumenwelle zu setzen.

Der Grad der Ungleichförmigkeit ist:

$\delta = 1/_{20}$ bis $1/_{30}$ bei Maschinen, wie Pumpen, Mühlen u. s. w., welche keine große Gleichförmigkeit in der Bewegung erfordern;

$\delta = 1/_{30}$ bis $1/_{40}$ bei Maschinen von ziemlich gleichförmigem Gange; und

$\delta = 1/_{40}$ bis $1/_{60}$ bei Maschinen, wie z. B. Spinnereien, Maschinenwebereien, welche den möglichst gleichförmigen Gang beanspruchen.

Für Dampfmaschinen nimmt man sehr gewöhnlich $\delta = 1/_{32}$ an. Bei Hammerwerken steigt wohl δ bis $1/_5$.

Ist nun G das Gewicht des Schwungringes und G_1 das seiner Arme, ferner c die mittlere Umfangsgeschwindigkeit, u die Umdrehungszahl des Rades pr. Minute und L die Leistung der Maschine in Pferdekräften, so hat man für Pumpen, Dampfmaschinen ohne Expansionen u. s. w. mit einfachem Krummzapfen und einer sehr langen Kurbelstange

$$(G + 1/_3\, G_1)\, c^2 = \frac{0{,}421\,.\, g P a}{\delta} = 94700\, \frac{L}{\delta u},$$

oder, wenn man $1/_3\, G_1$ vernachlässigt:

$$1.)\quad G = \frac{94700 L}{\delta u c^2} \text{ Pfund;}$$

dagegen für Maschinen mit doppeltem Krummzapfen im Rechtwinkel:

$$2.)\quad G = \frac{9500 L}{\delta u c^2} \text{ Pfund,}$$

(vergl. §. 99, S. 635); und für einen dreifachen Krummzapfen, dessen Warzen um je 120 Grad von einander abstehen:

$$3.)\quad G = \frac{2720 L}{\delta u c^2} \text{ Pfund.}$$

Bei Kurbelstangen, welche nur 4- bis 6mal so lang sind, als die Kurbelarmlänge, fällt das Gewicht des Schwungrades

größer aus als bei einer langen Kurbelstange. Ebenso ist bei einer veränderlichen Stangenkraft, z. B. bei Expansionsdampfmaschinen, dieses Gewicht größer zu machen als bei constanter Kraft, z. B. bei Dampfmaschinen ohne Expansion.

Allgemein ist für alle Maschinen mit Kurbelmechanismus zu setzen:

$$G = \alpha \frac{L}{\delta u c^2} = 91{,}2\, \alpha \frac{L}{\delta u^3 r^2},$$

oder wenn man $\frac{\alpha}{\delta}$ durch β bezeichnet:

$$G = \beta \frac{L}{u c^2} = 91{,}2\, \beta \frac{L}{u^3 r^2},$$

wobei α und $\beta = \alpha \delta$, Coefficienten bezeichnen, welche bei verschiedenen Kurbelmechanismen u. s. w. verschieden sind.

Folgende Tabelle enthält die Werthe dieser Coefficienten für die vorzüglichsten Anwendungen des Krummzapfens.

Tabelle

zur Bestimmung des Gewichts von Schwungrädern bei Maschinen mit Kurbelbewegung, in Neupfunden.

	Coefficient α	Coefficient $\beta = 32\,\alpha$
I. Krummzapfen mit constanter Stangenkraft P, z. B. bei Pumpen, Sägemühlen, Dampfmaschinen ohne Expansion.		
1. Einfacher Krummzapfen:		
bei der Lenkstangenlänge $l = \infty\, a$	94700	3030000
„ „ „ $l = 6\, a$	112000	3580000
„ „ „ $l = 5\, a$	116000	3710000
„ „ „ $l = 4\, a$	122300	3910000
2. Zweifacher Krummzapfen, dessen Warzen um je 90 Grad von einander abstehen, z. B. bei Dampfwagen, Dampfschiffen u. s. w.:		
bei der Lenkstangenlänge $l = \infty\, a$	9500	304000
„ „ „ $l = 6\, a$	26300	842000
„ „ „ $l = 5\, a$	30400	974000
„ „ „ $l = 4\, a$	35800	1146000
3. Dreifacher Krummzapfen, dessen Warzen um je 120 Grad von einander abstehen:		
bei der Lenkstange . . $l = \infty\, a$	2720	87000
„ „ „ . . $l = 5\, a$	8700	278500

Tabelle

zur Bestimmung des Gewichts von Schwungrädern bei Maschinen mit Kurbelbewegung, in Neupfunden.

(Fortsetzung.)

	Coefficient α	Coefficient $\beta = 32\,\alpha$
II. Krummzapfen mit veränderlicher Stangenkraft, insbesondere bei Expansionsdampfmaschinen.		
1. Einfacher Krummzapfen:		
a. die Lenkstangenlänge $l = \infty\, a$:		
bei dem Expansionsverhältn. $\varepsilon = 2$	113500	3631000
" " " $\varepsilon = 3$	122100	3907000
" " " $\varepsilon = 4$	127700	4086000
" " " $\varepsilon = 5$	132100	4228000
" " " $\varepsilon = 6$	135700	4342000
b. Die Lenkstangenlänge $l = 5\,a$:		
bei dem Expansionsverhältn. $\varepsilon = 2$	135700	4343000
" " " $\varepsilon = 3$	143800	4602000
" " " $\varepsilon = 4$	148700	4758000
" " " $\varepsilon = 5$	152100	4868000
" " " $\varepsilon = 6$	155300	4969000
2. Doppelter Krummzapfen mit sehr langer Lenkstange:		
bei dem Expansionsverhältn. $\varepsilon = 2$	4230	135200
" " " $\varepsilon = 3$	13810	441900
" " " $\varepsilon = 4$	19470	622900
" " " $\varepsilon = 5$	23540	753100
" " " $\varepsilon = 6$	26130	836100

Bei Maschinen, welche wie Poch-, Hammer- und Walzenwerke, plötzlichen Geschwindigkeitsveränderungen ausgesetzt sind, hat man das Gewicht des Schwungrades zu setzen:

$$G = \frac{\mu}{\delta}\left[\frac{60\,g\,L}{n\,c^2} + \tfrac{1}{2}\,H_1\left(\frac{a}{r}\right)^2\right],$$

oder, wenn die ganze Leistung L der Maschinen in Pferdekräften zu 480 Fuß gegeben ist, und die Beschleunigung der Schwere, $g = 31{,}25$ Fuß eingesetzt wird:

$$G = \frac{\mu}{\delta}\left[900000\ \frac{L}{n c^2} + \tfrac{1}{2}\,H_1\left(\frac{a}{r}\right)^2\right] \text{ Pfd.},$$

wobei bezeichnet: H_1 die reine Last, als träge Masse auf den Angriffspunkt der Kraft, z. B. bei Hammerwerken das Gewicht des Hammers auf den Angriffspunkt der Welldaumen reducirt ferner a den Abstand dieses Punktes von der Axe der umlaufenden Welle, bei Hammerwerken die Armlänge der Wellodaumen, r den Halbmesser und c die mittlere Geschwindigkeit des Schwungringes, sowie n die Anzahl der Spiele pro Minute,

z. B. bei Hammerwerken die Anzahl der Schläge des Hammers pro Minute, δ den Grad der Ungleichförmigkeit, z. B. $^1/_5$, und μ das Verhältniß des Weges des Angriffspunktes der Kraft während die Maschine leer geht, z. B. während der Hammer fällt und ruht, zu dem Wege während des ganzen Spieles.

Setzt man $\mu = ^1/_2$ und $\delta = ^1/_5$ ein, so erhält man für Hammerwerke

$$G = 2250000 \frac{L}{n c^2} + \, ^5/_4 \, H_1 \left(\frac{a}{r}\right)^2 \text{ Pfund.}$$

Bezeichnet H das Gewicht des Hammers und h den Hub seines Schwerpunktes, sowie l den Abstand des Kraftpunktes von der Drehungsaxe und k den Drehungshalbmesser der Masse des Hammers, so läßt sich setzen:

$$G = H \left[9261 \frac{h}{u^2 r^2} + \, ^5/_4 \left(\frac{k}{l}\right)^2 \left(\frac{a}{r}\right)^2\right] \text{ Pfund,}$$

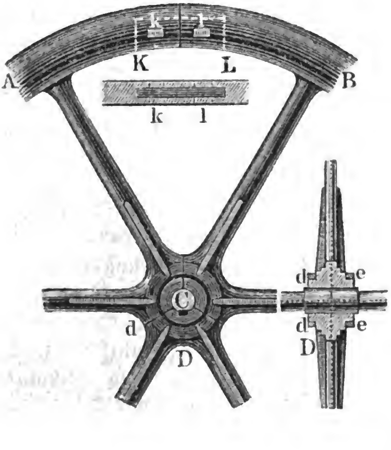
oder allgemein:

$$G = H \left[296{,}3 \frac{g h}{u^2 r^2} + \, ^5/_4 \left(\frac{k}{l}\right)^2 \left(\frac{a}{r}\right)^2\right].$$

Für große Stirnhammer von 60 bis 100 Centner Gewicht und $1^1/_4$ bis $1^1/_2$ Fuß Hub rechnet man gewöhnlich $G = \frac{600000}{r^2}$ Pfund, wogegen für Aufwerfhämmer und große Schwanzhämmer von 12 bis 15 Centner Gewicht und 2 Fuß Hub: $G = \frac{300000}{r^2}$, und für kleine Schwanzhämmer von 2 bis 3 Centner Gewicht und 1 Fuß Hub: $G = \frac{50000}{r^2}$ Pfd., wobei r in Fußen auszudrücken ist.

Für Walzwerke ist nach Morin:

Fig. 480.



$$G = \frac{2640000 L}{\delta u c^2} = 240000000 \frac{L}{\delta u^3 r^2}$$

Pfund zu setzen, wobei $\delta = ^1/_{80}$ bis $^1/_{20}$ anzunehmen ist, und zwar letzteres bei sehr großen Walzenwerken von 80 bis 100 Pferdekräften.

Den Halbmesser $CA = CB$ eines Schwungrades ABD, Fig. 480, für Krummzapfenbewegung macht man $r = 3a$ bis $4a$ und den Querschnitt des Schwungringes AB.,

$$F = de = \frac{G}{2\pi r\gamma} = \frac{G}{19,6\,r} = 0,0510\ \frac{G}{r}\ \text{Quadratzoll.}$$

Gewöhnlich macht man die Breite d doppelt so groß als die Dicke e des Ringes, und es ist dann

$$d = 0,320\sqrt{\frac{G}{r}},\ \text{sowie}\ e = 0,160\sqrt{\frac{G}{r}}\ \text{Zoll.}$$

Bei Anwendung eines elliptischen Querschnittes wäre aber

$$d = 0,361\sqrt{\frac{G}{r}}\ \text{und}\ e = 0,181\sqrt{\frac{G}{r}}\ \text{Zoll.}$$

Die Anzahl der Radarme ist, je nach der Höhe der Schwungräder, $m = 4$ bis 8, gewöhnlich aber $= 6$, und der Querschnitt eines Radarmes, $F_1 = \frac{F}{4}$ bis $\frac{F}{2}$.

Die Stärke der Schwungradwelle bei Krummzapfenbewegung ist mittels der Formel (vergl. §. 86, S. 597):

$$d_1 = 0,175\sqrt[3]{Qa} = 0,150\sqrt[3]{Pa} = 0,85\sqrt[3]{\frac{Qc}{u}}$$

$$= 6,64\sqrt[3]{\frac{L}{u}}\ \text{Zoll}$$

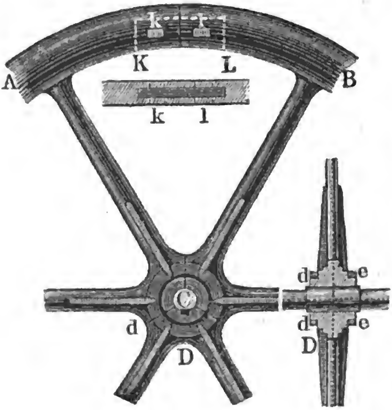
zu bestimmen, wonach sich wieder die Dimensionen der Radarme berechnen lassen. Bezeichnet $\mu = \frac{a_1}{b_1}$ das Verhältniß der Dicke a_1 zur Breite b_1 eines Armes, so läßt sich setzen:

$$\frac{b_1}{d_1} = \frac{1,01}{\sqrt[3]{\mu m}}\ \text{und für}\ \mu = 1/2,\ \frac{b_1}{d_1} = \frac{1,26}{\sqrt[3]{m}};$$

wonach dann $a_1 = \mu b_1$, z. B. $= 1/2\, b_1$ folgt.

Damit das Schwungrad keine schädlichen Spannungen erleide, und sich die Radarme von dem später erstarrenden Ringe nach dem Gusse nicht trennen, setzt man größere Schwungräder, aus mehreren Theilen, z. B. wie Fig. 481 darstellt, aus drei Stücken, mit je zwei Armen zusammen, und verbindet entweder dieselben durch zwei schmiedeeiserne Ringe dd, ee, oder durch Schrauben und einen gußeisernen Armstern zu einem Ganzen. Die Verbindung an den Stößen der Ringstücke erfolgt entweder durch schwalbenschwanzförmige Laschen aus Schmiedeeisen, oder besteht, wie Fig. 481 darstellt, aus

Fig. 481.



einem schmiedeeisernen Einsatz KL, welcher durch Keile k und l mit den Ringstücken fest verbunden wird. Der Querschnitt dieser schmiedeeisernen Verbindungsstücke ist $F_2 = 0{,}1\,F$ zu machen. Die größte zulässige Umfangsgeschwindigkeit des Schwungrades hat den Werth $c = \sqrt{\frac{gT}{\gamma}} = 168$ Fuß, man geht jedoch mit derselben in der Regel nie über 84 Fuß hinaus.

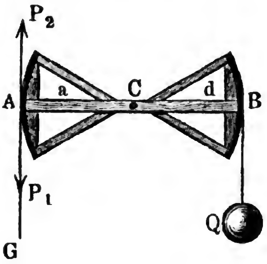
Man kann auch, um eine größere Einfachheit zu erzielen, das Schwungrad zugleich als Riemen- oder als Zahnrad benutzen, in welchem Falle aber noch stärkere Radarme nöthig sind. Die Stärke der Welle ist hier nach der Formel

$d_1 = 0{,}175 \sqrt[3]{Pa} = \sqrt[3]{\frac{Qc}{u}} = 7{,}72 \sqrt[3]{\frac{L}{u}}$ Zoll zu berechnen, woraus sich dann die Querschnittsdimensionen b_1 und a_1 der Radarme mittels der obigen Formeln berechnen lassen.

§. 104. Gegengewichte, Regulatoren u. Bremse.

Ist die Kraft zum Aufziehen einer Stange oder eines ganzen Gestänges AG, Fig. 482, $= P_1$ und die zum Niederdrücken $= P_2$, sowie das Gewicht desselben, $= G$, so hat man bei den Hebelarmen $CA = a$ und $CB = b$ des Gegengewichtsbalanciers ACB das erforderliche Gegengewicht zum Ausgleichen:

Fig. 482.



1) $Q = \frac{a}{b}\left(G + \frac{P_1 - P_2}{2}\right)$,

und die erforderliche mittlere Kraft beim Auf- und Niedergang: $P = \frac{P_1 + P_2}{2}$.

Man kann auch das Gegengewicht Q durch eine Wassersäule von der Höhe h und dem Querschnitt

2) $F = \frac{Q}{h\gamma}$

ersetzen, und erhält dadurch einen sogenannten hydraulischen Balancier.

Die Formel (1) findet auch ihre Anwendung bei der Kurbelbewegung, wo man das Gegengewicht an dem Schwungrad anbringt und a die Länge des Kurbelarmes, sowie b die Entfernung des Schwerpunktes des Gegengewichtes von der Axe der Kurbelwelle bezeichnet. Das Gegengewicht Q gleicht aber die träge Masse des Gestänges G nur theilweise aus; zur vollständigen Ausgleichung der ganzen Kurbelmassen ist dagegen eine armirte Gegenkurbel nöthig.

Bei dem Schwungkugelregulator, oder dem Regulator

mit conischem Pendel ACB, Fig. 483, ist die Schwingungszeit oder die Zeit einer Umdrehung:

Fig. 483.

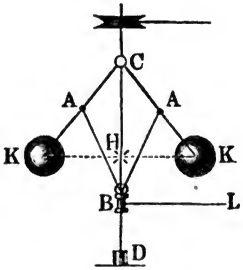
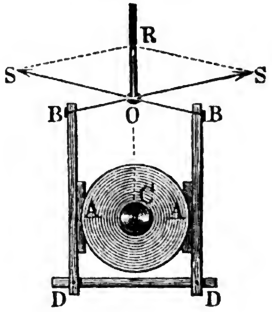


Fig. 484.



$t = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}} = 1{,}124 \sqrt{h}$ Secunden, wenn die Höhe oder die Tiefe CH der Schwungkugeln K, K unter dem Aufhängepunkte C, $= h$ und zwar im letzteren Falle in Fußen gegeben ist. Umgekehrt hat man

$$h = g \left(\frac{t}{2\pi}\right)^2 = 0{,}02533\, g t^2 = 0{,}792\, t^2 \text{ Fuß, auch}$$

$$h = g \left(\frac{30}{\pi u}\right)^2 = 91{,}19 \frac{g}{u^2} = \frac{2850}{u^2} \text{ Fuß,}$$ wenn u die Umdrehungszahl der Welle CD des Regulators pr. Minute bezeichnet.

Umgekehrt ist

$$u = 9{,}549 \sqrt{\frac{g}{h}} = \frac{53{,}38}{\sqrt{h}}.$$

Ist b die mittlere Entfernung CB der verschiebbaren Hülse B vom Aufhängepunkte C, β der entsprechende Winkel ABC, welchen die Hängestangen AB, AB mit der Axe CB einschließen, ferner r der mittlere Abstand, HK der Kugelmittelpunkte von der Welle BC, sowie δ der zulässige Grad der Ungleichförmigkeit der zu regulirenden Maschine, und endlich Q der Widerstand der Hülse B gegen das Verschieben, so folgt das nöthige Gewicht einer Schwungkugel: $K = \frac{Q b \, tang. \beta}{2 \delta r}$.

Der an B angreifende Hebel BL steht bei Dampfmaschinen unmittelbar mit der Dampfklappe in Verbindung, bewirkt dagegen bei Wasserrädern nur die Umsteuerung des Mechanismus zum Heben und Senken der Schütze.

Das gewöhnliche Gewicht einer Schwungkugel ist 30 bis 80 Pfd. und der Winkel, welchen die Kugelstangen CK in der mittleren Stellung mit der Spindel CD einschließen, 30 Grad.

Abweichende Constructionen der Schwungkugelregulatoren haben bis jetzt keine allgemeine Anwendung gefunden.

Ist α_1 der kleinste und α_2 der größte Ausschlagwinkel, sowie l die Länge der Pendelarme, so giebt der Ausdruck:

$$a = \frac{l\,(cos.\,\alpha_1 - cos.\,\alpha_2)}{cotg.\,\alpha_1 - cotg.\,\alpha_2}$$

den Abstand an, um welchen die Aufhängepunkte dieser Arme von der Drehungsaxe abstehen müssen, damit

$$h = l\,cos.\,\alpha_1 - a\,cotg.\,\alpha_1 = l\,cos.\,\alpha_2 - a\,cotg.\,\alpha_2,$$

folglich auch u nahe constant bleibt und daher der Regulator möglichst vollkommen regulirt.

Kommt es darauf an, die Umfangsgeschwindigkeit v eines Rades ACA mittels eines Bremses $BDDB$, Fig 484, in der Zeit t oder beim Durchlaufen des Weges s in die Geschwindigkeit c zu versetzen, so ist am Umfang dieses Rades der Reibungswiderstand

$$F = P + \left(\frac{v - c}{t}\right)M = P + \left(\frac{v^2 - c^2}{2\,s}\right)M$$

nöthig, dessen Größe noch von der Umdrehungskraft oder Ueberwucht P am Umfang von AA, sowie von der eben dahin reducirten Masse M der armirten Welle C abhängig ist.

In dem abgebildeten Falle ist auch $F = 2\,\varphi\,.\,N$, wobei bezeichnet: N die Kraft, mit welcher der Brems auf das Bremsrad in AA aufdrückt, und φ den Coefficienten der Reibung zwischen den Bremsbacken und dem Rade. Wenn nun noch α den Winkel angiebt, um welchen die Richtungen der Zugstangen BO, BO von den Axen der Bremsbalken BD, BD abweichen, sowie a die Entfernung BD des Angriffspunktes B und b den Abstand DA des Reibungspunktes A von der Drehungsaxe D der Bremsstangen, so hat man die nöthige Bremskraft

$$R = 2\,S\,cos.\,\alpha = 2\,N\,\frac{b}{a}\,cotg.\,\alpha = \frac{F}{\varphi}\,\frac{b}{a}\,cotg.\,\alpha$$

$$= \left[P + \left(\frac{v - c}{t}\right)M\right]\frac{b\,cotg.\,\alpha}{\varphi\,a}$$

$$= \left[P + \left(\frac{v^2 - c^2}{2s}\right)M\right]\frac{b\,cotg.\,\alpha}{\varphi\,a}.$$

Zweites Kapitel.

Die Arbeitsmaschinen zum Heben und Fortschaffen von Lasten.

§. 105. Aufzüge und Winden. Wenn ein Rollenzug aus n losen Rollen besteht, so ist an demselben die Kraft zum Heben der Last Q, $P = \frac{Q}{2^n}$, z. B. für $n = 4$, $P = \frac{Q}{16}$. Um durch denselben die Last auf h zu heben, muß der Angriffspunkt des Zugseiles den Weg $s = 2^n h$ machen und die oberste lose Rolle anfangs mindestens $2^{n-1} h$ unter der Leitrolle hängen.

Fügt man zu jeder losen Rolle $A, B \ldots$ eine Leitrolle $D, E \ldots$ hinzu, wie Fig. 485 darstellt, so ist die Kraft zum Heben der Last Q, $P = \frac{Q}{3^n}$, wo n wieder die Anzahl der losen Rollen bezeichnet, z. B. in dem abgebildeten Falle, $P = \frac{Q}{3^n} = \frac{Q}{9}$.

Wenn bei einem Kloben- oder Flaschenzuge der bewegliche Kloben, an welchem die Last Q hängt, durch n Seile mit dem festen Kloben verbunden ist, so hat man die Kraft zum Aufziehen: $P = \frac{Q}{n}$, und den Weg derselben, um Q auf die Höhe h zu heben, $s = nh$. Wegen der Zapfenreibung und der Steifigkeit des Seiles kann P noch um 15 bis 25 Proc. größer ausfallen.

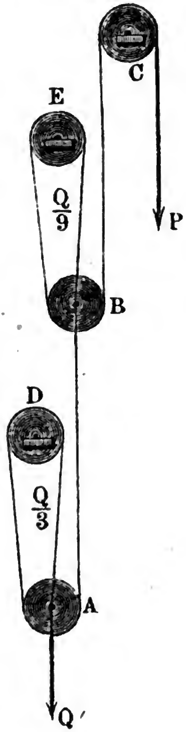
Bei den gewöhnlichen Winden mit Kurbel und Zahnradvorgelege ist die Kraft $P = \frac{n_1}{n_2} \frac{b}{a} Q$, wenn a den Kraft- oder Kurbelarm, b den Lastarm, n_1 die Anzahl der Zähne des

Rades auf der Kurbel- und n_2 die des Rades auf der Lastwelle bezeichnet. Bei doppeltem Vorgelege ist

$$P = \frac{n_1 n_3}{n_2 n_4} \frac{b}{a} Q \text{ (s. S. 605, §. 89).}$$

Bei der Differenzialwinde ohne Vorgelege ist $P = \frac{b_1 - b_2}{a} Q$, wenn b_1 und b_2 die beiden Lastarme oder Wellendurchmesser bezeichnen. Wegen der Reibungen u. s. w. fällt die effective Kraft noch um 10 bis 20 Proc. größer aus als der berechnete Kraftwerth P. Wird eine Last Q direct durch eine hydraulische Presse gehoben, so hat man die nöthige Kraft

Fig. 485.



$$P = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \left(\frac{b}{a}\right) Q,$$

wenn die Kraft am Arme a, und der Kraftkolben am Arme b eines Hebels wirkt, und wenn d_1 und d_2 die Durchmesser des Kraft- und des Preßkolbens bezeichnen.

Bei einem Wassersäulenaufzuge, wo die Last Q mittels eines Rollenzuges an die Kolbenstange angeschlossen ist, hat man $2^n Q$ oder nach Befinden, $3^n Q = F h \gamma$, und daher die nöthige Kolbenfläche

$$F = \frac{2^n Q}{h\gamma} \text{ oder } \frac{3^n Q}{h\gamma},$$

wobei bezeichnet: h die Höhe der drückenden Wassersäule, und γ die Dichtigkeit des Wassers, z. B. = 61,74 Pfd., wenn h in Fußen gegeben und F in Quadratfußen ausgedrückt wird. Soll die Last auf die Höhe h_1 gehoben werden, so muß der Kolbenhub $s = \frac{h_1}{2^n}$ oder $\frac{h_1}{3^n}$ betragen.

§. 106. Haspel-, Hand- und Pferdegöpelförderung. Der gewöhnliche zweimännische Haspel hat zwei einander gegenüberstehende Kurbelhörner von 16 bis 18 Zoll Armlänge, während der Durchmesser des Rundbaumes 8 Zoll mißt. Die reine Last ist circa $M = 100$ Pfd. und das Gewicht eines Kübels ungefähr $= 0{,}4\, M = 40$ Pfd.

Die Kraft an der Spille des Kurbelhornes zum Heben einer

Last M ist $P = 1{,}075\ \frac{b}{a} M\,(sin.\,\alpha + 0{,}5\,cos.\,\alpha)$ zu setzen, wenn a die Länge des Kraft-, b die des Lastarmes und α das Fallen des Schachtes oder der Bahn ist, auf welcher die Kübel herab- und hinaufgleiten. Die mittlere Kraft eines Arbeiters, $K = 16$ Pfd., also $P = 2 \cdot 16 = 32$ gesetzt, und $a = 16$ Zoll angenommen, folgt der Lastarm

$b = \frac{476}{M(sin.\alpha + 0{,}5 cos.\alpha)}$ Zoll. Hierbei ist die Geschwindigkeit der Kraft $v = c = 2{,}4$ Fuß, und die der Last:

$$w = \frac{b}{a}\,v = \frac{71{,}4}{M(sin.\,\alpha + 0{,}5\,cos.\,\alpha)} \text{ Fuß.}$$

Ferner ist der ganze Förderweg in der achtstündigen Schicht:

$$s = 28800\,w = \frac{2056000 \text{ Fuß}}{M\,(sin.\,\alpha + 0{,}5\,cos.\,\alpha)}$$

und die tägliche Nutzleistung:

$$M\,s\,sin.\,\alpha = \frac{2056000}{1 + 0{,}5\,cotg.\,\alpha} \text{ Fußpfd.}$$

Damit bei größeren Lasten b nicht unter 4 Zoll ausfalle, ist der Haspel mit einem Vorgelege zu versehen, welches aus einem kleineren Treibrad mit n_1 und einem größeren Getriebrad mit n_2 Zähnen besteht. Auch wendet man dann statt der Kübel, Wagen oder sogenannte Tonnen mit Rädern an, wobei man

$$P = 1{,}125\,\frac{n_1}{n_2}\,\frac{b}{a}\,M\left(sin.\,\alpha + 0{,}3\,\frac{\varrho}{r}\,cos.\,\alpha\right), \text{ oder}$$

$$= 1{,}125\,\frac{n_1}{n_2}\,\frac{b}{a}\,M\,(sin.\,\alpha + 0{,}075\,cos.\,\alpha) \text{ zu setzen}$$

hat, letzteres, wenn der Zapfenhalbmesser ohngefähr 4mal in dem Halbmesser der Tonnenräder enthalten ist.

Hiernach hat man

$$b = \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{455}{M\,(sin.\,\alpha + 0{,}075\,cos.\,\alpha)},$$

sowie $w = \frac{n_1}{n_2}\,\frac{b}{a}\,v$ u. s. w.

Beim Hand- oder Menschengöpel arbeitet der Mensch noch etwas vortheilhafter als am Haspel (s. S. 511, §. 59). Uebrigens ist sowohl beim Hand- als beim Pferdegöpel die Kraft am Schwengel

$$P = 1{,}15\,\frac{b}{a}\,M\left(sin.\,\alpha + 0{,}3\,\frac{\varrho}{r}\,cos.\,\alpha\right), \text{ für } \frac{\varrho}{r} = \tfrac{1}{4},$$

$P = 1{,}15\,\frac{b}{a}\,M\,(sin.\,\alpha + 0{,}075\,cos.\,\alpha)$ zu setzen, wo a den Kraftarm oder die mechanische Schwengellänge sowie b den Lastarm bezeichnet. Bei mehrfacher Aufwickelung des Seiles auf den Korb ist der Lastarm b ansehnlich größer als der Halbmesser r des Korbes. Bezeichnet s die Förderteufe, d die Seilstärke und l die Länge des Korbfaches, worin sich das Seil aufwickelt, so hat man den mittleren Lastarm annähernd

$$b = r + \frac{d}{2} + \frac{s d^2}{4 \pi l r}.$$

Liegt vom ganzen Seile die Länge s_1 auf dem Korbe, ohne abgewickelt zu werden, so ist statt r, der Halbmesser

$$r_1 = r + \frac{s_1 d^2}{2 \pi l r}$$

in die letzte Formel zu setzen, wonach annähernd

$$r_1 = r + \frac{d}{2} + \frac{(2 s_1 + s) d^2}{4 \pi l r} \text{ folgt.}$$

Der gewöhnliche Korbhalbmesser ist $r = 5$ bis 6 Fuß, die Stärke des Drahtseiles, $d = \frac{1}{2}$ bis $\frac{5}{8}$ Zoll, und die Seilfachlänge $l = 1$ bis 1,5 Fuß. Bei der mechanischen Schwengellänge $a = 24$ Fuß und der mittleren Kraft $2 K = 2 . 90 = 180$ Pfund der beiden Zugpferde ist

$$b = \frac{3757 \text{ Fuß}}{M (sin. \alpha + 0{,}075 \, cos. \alpha)},$$

ferner $v = c = 2{,}9$ Fuß angenommen, folgt die Geschwindigkeit der Last

$$w = \frac{b}{a} v = \frac{454 \text{ Fuß}}{M (sin. \alpha + 0{,}075 \, cos. \alpha)},$$

sowie der ganze Förderweg in der achtstündigen Schicht,

$$s = 28800 \, w = \frac{13075000 \text{ Fuß}}{M (sin. \alpha + 0{,}075 \, cos. \alpha)},$$

und endliche tägliche Nutzleistung

$$M s \, sin. \alpha = \frac{13075000}{1 + 0{,}075 \, cotg. \alpha} \text{ Fußpfd.}$$

Bei Anwendung eines conischen Spiralkorbes ist, wenn G das Gewicht einer Triebtonne und G_1 das Gewicht des Triebseiles bezeichnet, der größere Lastarm

$$b_1 = \left(1 + \frac{G_1}{M + 2 G + G_1}\right) b,$$

und der kleinere Lastarm

$$b_2 = \left(1 - \frac{G_1}{M + 2 G + G_1}\right) b$$

zu machen, wobei b den nach den obigen Formeln zu berechnenden mittleren Lastarm bezeichnet. Die entsprechenden Korbhalbmesser sind $r = b - \frac{d}{2}$, $r_1 = b_1 - \frac{d}{2}$ und $r_2 = b_2 - \frac{d}{2}$.

§. 107. **Wasser- und Dampfgöpelförderung.** Ein gewöhnlicher Wassergöpel mit verticalem Wasserrade von 30 bis 40 Fuß Höhe erhält einen Korb von 8 bis 10 Fuß Durchmesser, und fördert bei 5 bis 6 Radumdrehungen pro Minute, mit $w = 2{,}10$ bis 3,15 Fuß Geschwindigkeit; so daß bei einer Förderlast von 1800 Pfd., die Nutzleistung desselben

pro Secunde $L = 3780$ bis 5670 Fußpfd. $= 8$ bis 12 Pferdekräfte beträgt.

Bei dem Wirkungsgrade $\eta = 0,75$, dem Gefälle h und dem Aufschlagwasserquantum Q pro Secunde ist die Leistung des Wasserrades, welches die Korbwelle unmittelbar in Umdrehung setzt, $L = 46,3\,Qh$. Dieselbe der mechanischen Arbeit

$$L = 1,15\,Mw\,(sin.\,\alpha + 0,075\,cos.\,\alpha)$$

des Göpels gleichgesetzt, folgt

1.) das Aufschlagwasserquantum

$$Q = 0,02484\,\frac{Mw}{h}\,(sin.\,\alpha + 0,075\,cos.\,\alpha)\ \text{Cubikfuß},$$

oder

2.) die reine Förderlast

$$M = \frac{40,3\,Qh}{w\,(sin.\,\alpha + 0,075\,cos.\,\alpha)}\ \text{Pfund}.$$

Bei einem Wassergöpel mit Stangenvorgelege, wo die Kraft vom Wasserrade durch vier Stangen auf die Korbwelle übergetragen wird, ist M ungefähr um 8 Proc. größer, oder Q ebensoviel kleiner.

Ein Turbinengöpel erfordert in der Regel ein oder zwei Zahnradvorgelege, da selbst bei dem kleinsten Gefälle die Umdrehungszahl u_1 der Turbine viel größer ist als die gewöhnliche Umdrehungszahl der Korbwelle. Setzt man z. B. die Radgeschwindigkeit einer Turbine

$$v = 0,75\sqrt{2gh_1} = 5,88\sqrt{h_1}\ \text{Fuß},$$

so erhält man bei dem Gefälle $h_1 = 9$ Fuß und dem Radhalbmesser $r = 3$ Fuß, die Umdrehungszahl der Turbine

$$u = \frac{30v}{\pi r} = \frac{30\,.\,5,88\,.\,3}{3,14\,.\,3} = \frac{176,4}{3,14} = 56,$$

und wenn nun bei einer Fördergeschwindigkeit $w = 3$ Fuß der Lastarm $b = 5$ Fuß mißt, so macht die Korbwelle pro Minute

$$u_1 = \frac{30\,.\,w}{\pi\,.\,b} = \frac{30\,.\,3}{\pi\,.\,5} = \frac{18}{\pi},$$

d. i. nahe sechs Umdrehungen, und es ist daher ein Umsetzungsverhältniß $\psi = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$ in Anwendung zu bringen, wozu ein doppeltes Vorgelege nöthig sein möchte, welches etwa die Umdrehungszahlen in den Verhältnissen $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{7}$ umsetzt. Da die Korbwelle, je nachdem die eine oder die andere Tonne ausgetrieben wird, nach der einen oder nach der anderen Richtung umlaufen muß, so ist entweder eine sogenannte Ein- und Ausrückvorrichtung oder ein Doppel- oder sogenanntes Kehrrad in Anwendung zu bringen.

Es ist vortheilhaft, wenn das Aufschlagwasser während der Stillstandszeit beim Füllen und Stürzen der Tonne angesammelt werden kann.

Wassersäulengöpel erhalten zwei liegende Treibcylinder, deren doppeltwirkende Kolben mittels Kurbelmechanismen an die mit einem Schwungrad ausgerüstete Korbwelle so angeschlossen werden, daß die Kurbelwarzen um den Rechtwinkel von einander abweichen (S. 633, §. 98).

Nimmt man den Wirkungsgrad einer solchen Wassersäulenmaschine, $\eta = 0{,}65$ an, so erhält man hier das Aufschlagquantum

$$Q = 0{,}02865 \, \frac{Mw}{h} \, (sin.\, \alpha + 0{,}075 \, cos.\, \alpha) \text{ Cubikfuß,}$$

und die Förderlast:

$$M = \frac{34{,}9 \, Q h}{w \, (sin.\, \alpha + 0{,}075 \, cos.\, \alpha)}.$$

Aus dem Aufschlagquantum Q folgt der Inhalt einer Kolbenfläche, $F = \frac{Q}{2v}$, oder die mittlere Kolbengeschwindigkeit $v = 1$ Fuß angenommen, $F = 0{,}5\, Q$ Quadratfuß $=$ $72\, Q$ Quadratzoll, und daher der Durchmesser eines Treibekolbens: $d_1 = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = 9{,}58 \sqrt{Q}$ Zoll.

Der Kolbenhub s ist gleich dem Doppelten der Kurbelhöhe a, und zwar $s = \frac{\pi b v}{w}$, z. B. $b = 5$ Fuß, $v = 1$ und $w = 3$ Fuß angenommen, $s = \frac{5\pi}{3} = 5{,}24$ Fß. $= 62{,}9$ Zoll.

Der **Dampfgöpel** erhält zuweilen auch zwei Dampfcylinder wie der Wassersäulengöpel, wobei das Schwungrad ganz wegfallen kann; es ist jedoch nur bei einer kleineren Kolbengeschwindigkeit und größeren Lastgeschwindigkeit möglich. Nimmt man z. B. $b = 5$ Fuß, $v = 3$ Fuß und $w = 12$ Fuß an, so erhält man den Kolbenschub

$$s = \frac{\pi b v}{w} = \frac{3{,}14 \,.\, 5 \,.\, 3}{12} = 3{,}925 \text{ Fuß} = 47{,}1 \text{ Zoll.}$$

Gewöhnlicher wird nur ein Dampfcylinder angewendet, wobei natürlich ein Schwungrad nöthig ist. Auch erhält ein solcher Göpel ein Zahnradvorgelege, denn wenn man auch hier mit 10 Fuß Geschwindigkeit treibt, so ist doch bei einem Korbdurchmesser von 10 Fuß die Umdrehungszahl der Korbwelle: $u = 19$, während die Dampfmaschine vielleicht 30 Spiele macht. Man setzt deshalb durch ein Zahnradvorgelege gewöhnlich im Verhältniß $\psi = \frac{1}{2}$ bis $\frac{2}{3}$ um, so daß z. B. die Kurbel- oder Schwungradwelle 30, und die Korbwelle $= 20$ Umdrehungen pro Minute macht. Es ist hier allgemein

$$s = \psi \, \frac{\pi b v}{w} = \frac{n_1}{n_2} \, \frac{\pi b v}{w},$$

wenn n_1 die Anzahl der Zähne des Rades auf der Kurbelwelle und n_2 die des Rades auf der Korbwelle bezeichnet.

Die effective Leistung der Dampfmaschine ist
$L = 1{,}15\, M w\, (sin.\, \alpha + 0{,}075\, cos.\, \alpha)$ zu setzen, und hieraus kann man nach §. 77, S. 566 u. s. w. das erforderliche Dampfquantum

$$Q = \frac{L}{\eta p_0 \left(1 + L\varepsilon - \frac{\varepsilon q_0}{p_0}\right)}$$

berechnen, wonach sich dann auch die Größe der Kolbenfläche, der Kolbendurchmesser u. s. w. bestimmen läßt.

Der Dampfdruck p_0 im Kessel ist gewöhnlich 3 bis 5 Atmosphären; der Gegendruck q_0 gewöhnlich 1 Atmosphäre, jedoch wendet man auch in neueren Zeiten Condensation an, wobei man vielleicht q_0 auf $1/4$ Atmosphäre herabziehen kann. Das Expansionsverhältniß ε steigt selten auf 2.

Die äußere Steuerung dieser Göpel besteht aus zwei durch eine Stephenson'sche Coulisse verbundenen Kreisercentriks. Mit Hülfe dieses Mechanismus wird nicht allein der Gang der Maschine regulirt, sondern auch die Maschine in und außer Gang gesetzt, und die Umdrehungsrichtung des Korbes in die entgegengesetzte verwandelt. — Von den beiden Körben ist der eine nur durch einen lösbaren Bolzen mit der Welle verbunden, um beim Wechseln der Förderteufe diesen beweglichen Korb, an welchem die Tonne über Tage hängt, festhalten zu können, während mittelst des festen Korbes die leere Tonne bis auf das neue Füllort getrieben wird.

Um endlich die Stillstandszeit so viel wie möglich abzukürzen, sind statt der Treibetonnen sogenannte Förderschalen, auf welchen die Förderwagen unmittelbar empor gefördert werden, anzuwenden.

§. 108. **Strassenförderung.** Die mittlere Kraft (P) zum Fortziehen eines Schlittens oder einer Schleife auf einer horizontalen glatten Holz- oder Steinbahn ist ungeschmiert, $\mu = 0{,}38$, mit trockener Seife geschmiert 0,15, und mit Talg eingerieben, nur 0,07 der Last; ferner ist dieselbe zum Fortziehen eines gewöhnlichen Schlittens auf einer guten Schneebahn nur 0,035 und zum Fortziehen eines Schlittens mit stählernen Schlittensohlen, auf einer glatten Eisbahn, sogar nur 0,02 der Last. Allgemein ist die Kraft zum Fortziehen eines Schlittens oder Wagens:

$P = (\mu + sin.\,\alpha)\,(M + G)$, wo μ den Widerstandscoefficienten z. B. $= 0{,}035$, α den Steigwinkel des Weges, M die reine Förderlast und G das Gewicht des Vehikels bezeichnet. Gewöhnlich ist bei voller Ladung $G = 0{,}2\,M$ bis $0{,}5\,M$. Beim Abwärtsfahren hat man
$P = (\mu - sin.\,\alpha)\,(M + G)$, so lange $sin.\,\alpha$ kleiner als μ ist. Wird μ von $sin.\,\alpha$ übertroffen, so muß gehemmt werden.

Der Widerstand, welchen ein gutes Steinpflaster oder eine festgefahrene Schotterstraße der Bewegung eines Wagens ent-

gegensetzt, ist proportional der Last, umgekehrt proportional der Höhe der Räder, und beinahe unabhängig von der Reifenbreite der Räder. Auf weichem oder zusammendrückbarem Boden nimmt dagegen dieser Widerstand ab, wenn die Reifenbreite eine größere wird. Bis zu einer mäßigen Geschwindigkeit von 3 Fuß ist dieser Widerstand ziemlich unabhängig von der Geschwindigkeit und bei Wagen mit Federn eben so groß als bei Wagen ohne Federn. Bei größerer Geschwindigkeit nimmt aber dieser Widerstand mit der Geschwindigkeit bemerkbar zu.

Die Reifenbreite von $4\frac{1}{2}$ Zoll ist die angemessenste, schmälere Räder greifen die Straßen an, und breitere Räder geben keinen bemerkbaren Vortheil. Bei großen Geschwindigkeiten über 10 Fuß werden die Straßen durch Wagen mit Federn weniger angegriffen als durch Wagen ohne Federn.

In folgender Tabelle sind die Widerstandscoefficienten verschiedener Wagen auf verschiedenen Straßen angegeben. Um die Kraft zum Fortziehen einer gegebenen Last zu finden, soll man die Letztere mit dem entsprechenden Coefficienten aus der Tabelle multipliciren. Z. B. um eine Last von 8000 Pfd. durch einen Frachtwagen auf einer horizontalen Schotterstraße fortzuschaffen, ist bei gutem und trockenem Zustande der letzteren und bei $53\frac{1}{2}$ Zoll mittlerer Radhöhe, die nöthige Zugkraft $P = \frac{1}{50} . 8000 = 160$ Pfd.; steigt aber die Straße $\frac{1}{40}$ an, so ist die Kraft noch um $\frac{1}{40} . 8000 = 200$ größer, also im Ganzen 360 Pfd.; fährt dagegen der Wagen mit $\frac{1}{40}$ Fallen, so ist eine überflüssige Kraft $200 - 160 = 40$ Pfd. vorhanden, welche durch Einhemmen vernichtet werden muß.

Tabelle
der Widerstandscoefficienten (μ) für Fuhrwerke.

Die Reifenbreite ist 4 bis $4\frac{1}{2}$ Zoll, die Axenstärke $2\frac{1}{2}$ Zoll, der Coefficient der Axenreibung, $\varphi = 0{,}065$.

Bezeichnung der Straße.	Frachtwagen. Mittlere Radhöhe in Fußen.		Karren. Radhöhe in Fußen.		Eilwagen. Radhöhe in Fußen.
	4	$4\frac{1}{2}$	5	$6\frac{2}{5}$	$3\frac{2}{3}$
I. Schotterstraße:					
1) in sehr gutem Zustande, trocken und eben.	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{58}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{1}{83}$	Schritt $\frac{1}{48}$, Trab $\frac{1}{41}$, scharf. Tr. $\frac{1}{40}$
2) wenig feucht, mit Staub und einigen freiliegenden Schotterstücken.	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{41}$	$\frac{1}{47}$	$\frac{1}{59}$	Schritt $\frac{1}{34}$, Trab $\frac{1}{27}$, scharf. Tr. $\frac{1}{24}$
3) sehr hart, grober Schotter, naß.	$\frac{1}{43}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{57}$	$\frac{1}{71}$	Schritt $\frac{1}{42}$, Trab $\frac{1}{27}$, scharf. Tr. $\frac{1}{23}$

(Fortsetzung umstehend.)

Tabelle

der Widerstandscoefficienten (μ) für Fuhrwerke. (Fortsetzung.)

Die Reifenbreite ist 4 bis 4½ Zoll, die Axenstärke 2½ Zoll, der Coefficient der Axenreibung, $\varphi = 0,065$.

Bezeichnung der Straße.	Frachtwagen. Mittlere Radhöhe in Fußen.		Karren. Radhöhe in Fußen.		Eilwagen. Radhöhe in Fußen.
	4	4½	5	6⅖	3⅔
I. Schotterstraße:					
4) hart, mit leichten Geleisen und weichem Koth.	1/27	1/32	1/36	1/45	Schritt 1/26 Trab 1/22 scharf. Tr. 1/20
5) hart, mit Geleisen und Koth.	1/22	1/26	1/30	1/37	Schritt 1/21 Trab 1/18 scharf Tr. 1/17
6) sehr aufgefahren und mit dickem Kothe.	1/19	1/22	1/25	1/31	Schritt 1/18 Trab 1/16 scharf. Tr. 1/15
7) sehr aufgerissen, mit Koth und 2 bis 3 Zoll tiefen Geleisen.	1/14	1/17	1/19	1/24	Schritt 1/14 Trab 1/12 scharf. Tr. 1/12
8) sehr schlecht, dicker Koth, harter und rauher Grund, 3 bis 4 Zoll tiefe Geleise.	1/13	1/15	1/17	1/21	Schritt 1/12 Trab 1/10.5
II. Sandsteinpflaster:					
1) sehr gutes.	1/65	1/75	1/86	1/108	Schritt 1/62 Trab 1/42 scharf. Tr. 1/38
2) gewöhnliches, trocken.	1/60	1/70	1/80	1/100	Schritt 1/57 Trab 1/41 scharf. Tr. 1/36
3) gewöhnliches, naß u. mit Koth.	1/46	1/54	1/61	1/76	Schritt 1/44 Trab 1/33 scharf. Tr. 1/29
III. Brückenbahn von Holz.	1/43	1/50	1/69	1/71	Schr. u. Tr. 1/42
IV. Erddamm:					
1) sehr gut u. trocken.	1/27	1/32	1/36	1/45	" " " 1/26
2) mit einer 1 bis 1⅔ Zoll hohen Kiesdecke.	1/10.5	1/12	1/14	1/17	" " " 1/10
3) mit einer 2 bis 3½ Zoll hohen Kiesdecke.	1/9	1/10	1/12	1/15	" " " 1/8.6
4) mit einer 4 bis 5½ Zoll hohen Kiesschicht.	1/8	1/10	1/11	1/14	" " " 1/8
V. Straße mit ungebahntem Schnee.	1/14	1/17	1/19	1/24	" " " 1/14

Hierbei ist die mittlere Kraft eines Zugpferdes $K = 112$ Pfd. und die mittlere Geschwindigkeit desselben $c = 4$ Fuß anzunehmen (s. Tab. S. 511).

§. 109. Eisenbahnförderung. Die mittlere Fahrgeschwindigkeit auf Eisenbahnen ist:

bei Schnellzügen . .	50 bis 60 Fß. pr. Sec.	7 bis 10 Meil. stündl.
» gewöhnlichen Personenzügen . .	40 » 50 » » »	5 » 7 » »
» Güterzügen . . .	20 » 40 » » »	3 » 5 » »
» Bergfahrten . . .	15 » 20 » » »	2 » 3 » »

Bezeichnet W das Bruttogewicht eines Eisenbahnzuges sammt Tender, c die Geschwindigkeit desselben in Meilen, zu je 24000 Fuß, und $\pm\, \alpha = \pm \frac{h}{l}$, das Ansteigen oder Fallen der Bahn, so läßt sich die Kraft zum Fortziehen des Zuges auf einer geraden Bahnstrecke setzen:

$$P_1 = (0{,}00268 + 0{,}0000408\, c^2 \pm \alpha)\, W,$$

wonach z. B. auf einer horizontalen Bahn,

für $c = 2{,}5$ Meilen, $P = 0{,}00293\, W = \frac{1}{341}\, W$
» $c = 5{,}0$ » , $P = 0{,}00370\, W = \frac{1}{270}\, W$ und
» $c = 10{,}0$ » , $P = 0{,}00676\, W = \frac{1}{148}\, W$

ausfällt.

Unter ungünstigen Umständen, namentlich beim Durchfahren von Curven und im schlechten Zustande befindlichen Bahnstrecken, sowie beim Fahren gegen den Wind kann dieses Kraftbedürfniß noch um die Hälfte größer ausfallen.

Nach Rankine ist der Widerstand in einer Curve, deren Halbmesser r Fuß mißt, $P_r = 3{,}2 \frac{W}{r}$.

Die Kraft, welche der Dampfwagen sammt Tender zu seiner Fortbewegung erfordert, ist, wenn R das Gewicht dieses Wagens bezeichnet,

$$P_2 = (0{,}00268 + 0{,}0000408\, c^2 \pm \alpha) R$$
$$+ \tfrac{1}{3}\, (0{,}00268 + 0{,}0000408\, c^2 \pm \alpha)\, (R + W),$$

und daher die Gesammtkraft des Dampfwagens zur Bewegung eines Trains

$$P = P_1 + P_2 = \tfrac{4}{3} (0{,}00268 + 0{,}0000408\, c^2 \pm \alpha)\, (R + W),$$

oder pro Centner Bruttolast,

$$P = (0{,}357 + 0{,}00544\, c^2 \pm 133\, \alpha) \text{ Pfund},$$

oder pro Tonne, zu je 2000 Pfund,

$$P = (7{,}14 + 0{,}1088\, c^2 \pm 2660\, \alpha) \text{ Pfund},$$

und unter den ungünstigsten Verhältnissen,

$$P = (10{,}71 + 0{,}1632\, c^2 \pm 3990\, \alpha) \text{ Pfund}.$$

Die zu fordernde Leistung der Dampfmaschine pr. Sec., bei

der Fahrgeschwindigkeit c Meilen:

$$L = \frac{24000}{60 \cdot 60} P c \text{ Fußpfund} = \frac{50}{60 \cdot 60} P c \text{ Pferdekräfte.}$$

Mit Hülfe der Formel $Q = \dfrac{L}{\eta p_0 \left(1 + Ln\,\varepsilon - \dfrac{\varepsilon q_0}{p_0}\right)}$ aus §. 77, S. 566, kann man aus der Leistung L das Dampfquantum Q berechnen, wobei der Wirkungsgrad $\eta = 0{,}60$ und das Expansionsverhältniß $\varepsilon = \frac{5}{4}$ bis $\frac{3}{2}$ anzunehmen ist, während der Dampfdruck im Kessel: $p_0 = 4$ bis 7 Atmosphären und der mittlere mit der Fahrgeschwindigkeit zunehmende Gegendruck 1,5 Atmosphäre ausfällt. Sieht man von der Expansion des Dampfes ab, so ist bei der Leistung L Pferdekräfte und der Druckdifferenz $p_m = p_0 - q_0$ pr. Quadratzoll

$$Q = \frac{L}{\eta p_m} = 0{,}397 \frac{L}{p_m} \text{ Cubikfuß zu setzen.}$$

Bezeichnet s die Größe des Kolbenschubes, $a = \frac{s}{2}$ die Kurbelarmlänge und r den Halbmesser der auf der Kurbelwelle sitzenden Treibräder, so hat man die mittlere Kolbengeschwindigkeit v, und die mittlere Fahrgeschwindigkeit c,

$$v = \frac{cs}{\pi r} = \frac{2}{\pi} \frac{a}{r} c = 0{,}6366 \frac{a}{r} c, \text{ sowie}$$

$$c = \frac{\pi r v}{s} = \frac{\pi}{2} \frac{r}{a} v = 1{,}5708 \frac{r}{a} v.$$

Der gewöhnliche Kolbenschub ist $s = 18$ bis 24 Zoll, und daher die entsprechende Länge der Kurbelarme, $a = 9$ bis 12 Zoll.

Der Durchmesser der Treibräder ist bei verschiedenen Locomotiven verschieden und zwar bei Locomotiven

für Eilzüge .	$2r = 2{,}1$ Meter	od. $r = 1{,}05$ Met. $= 40$ Zoll
» Personenz.	$= 1{,}75$ »	» $r = 0{,}875$ » $= 33\frac{1}{2}$ »
» Güterzüge	$= 1{,}45$ »	» $r = 0{,}725$ » $= 27\frac{1}{2}$ »
» Bergfahrten	$= 1{,}10$ »	» $r = 0{,}550$ » $= 21$ »

Die mittlere Kolbengeschwindigkeit ist $v = 5$ bis 8 Fuß.

Für $c = 42$ und $v = 7$ Fuß erhält man

$$\frac{r}{a} = 0{,}6366 \frac{c}{v} = 3{,}82.$$

Z. B. $a = 10$ Zoll, giebt $r = 38{,}2$ Zoll.

Aus Q und c folgt der Inhalt der beiden Kolbenflächen,

$$2F = \frac{\varepsilon Q}{v} = 1{,}5708 \frac{r}{a} \frac{\varepsilon Q}{c},$$

und der Durchmesser derselben

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = \sqrt{\frac{r}{a} \frac{\varepsilon Q}{c}} \text{ Fuß,}$$

wenn man v in Fußen und Q in Cubikfußen ausdrückt.

Die Bruttolast W besteht aus der Nettolast M und aus dem Wagengewichte. Letzteres macht bei Kohlen- und Güterwagen $^1/_3$ bis $^1/_2$, und bei Personenwagen sogar $^2/_3$ der Bruttolast aus. Das Gewicht eines vierräderigen Kohlen- oder Güterwagens ist 60 bis 70 Centner, das eines sechsräderigen 100 bis 130 Centner; wogegen ein vierräderiger Personenwagen 80 bis 90 und ein sechsräderiger Personenwagen 100 bis 125 Centner wiegt. Es ist die Regel, eine Axe oder ein Paar Räder höchstens mit 100 bis 130 Centner zu belasten. Während die Höhe eines Rades ohngefähr 1 Meter = 38 Zoll beträgt, mißt der Axendurchmesser desselben 4 bis 5 Zoll.

Die Zugkraft P_1, welche ein Dampfwagen ausüben kann, ohne zu gleiten, ist ein Theil von dem Gewichte, welches die Treibräder tragen, und zwar je nach dem Zustande der Schienen, $^1/_4$ bis $^1/_{20}$ dieses Gewichtes R_1. Im Mittel läßt sich $P_1 = {}^1/_7 R_1 = \frac{\nu}{7} R$ annehmen. Es ist folglich beim Fahren auf einer Bahn vom Ansteigen α:

$$\left(\frac{\nu}{7} - \alpha\right) R = (0{,}00268 + 0{,}0000408\, c^2 + \alpha)\, W$$

zu setzen, und man hat hiernach das Verhältniß $\nu = \frac{R_1}{R}$ um so größer zu machen, je größer die erforderliche Zugkraft, je größer also auch die Fahrgeschwindigkeit c (Meilen) und je stärker das Ansteigen α der Bahn ist.

Es ist hiernach:

1) $$\frac{R}{W} = \frac{0{,}00268 + 0{,}0000408\, c^2 + \alpha}{\frac{\nu}{7} - \alpha},$$

2) $$c = 157 \sqrt{\left(\frac{\nu}{7} - \alpha\right) \frac{R}{W} - (0{,}00268 + \alpha)},$$

3) $$\alpha = \frac{\frac{\nu}{7} R - (0{,}00268 + 0{,}0000408\, c^2)\, W}{W + R}.$$

Wenn z. B. bei einem Ansteigen $\alpha = 0{,}02$, wo die Räder mit einander gekuppelt sind, also $\nu = 1$ ist, mit $c = 3$ Meilen Geschwindigkeit gefahren werden soll, so muß sein:

$$\frac{R}{W} = \frac{0{,}00268 + 0{,}00037 + 0{,}02000}{0{,}1229} = 0{,}1875;$$

folglich bei der Locomotivenlast $R = 30$ Tonnen, die Wagenlast $W = \frac{30}{0{,}1875} = 160$ Tonnen $= 3200$ Centner.

Im Allgemeinen kann man annehmen, daß bei einer sechsräderigen Locomotive mit einer Treibaxe, $\nu = {}^1/_2$, bei solchen

mit zwei gekuppelten Treibaren, $\nu = 2/3$ bis $3/4$, und bei solchen, an welchen alle drei Axen gekuppelt sind, $\nu = 1$ ist. Das gewöhnliche Gewicht eines Dampfwagens ist 20 bis 30 Tonnen = 400 bis 600 Centner, folglich die Zugkraft derselben, bei einer einzigen Treibare:

$$\frac{\nu R}{7} = \frac{R}{14} = 2800 \text{ bis } 4300 \text{ Pfund.}$$

Der belastete Tender wiegt 12 bis 15 Tonnen. Große Tendermaschinen, wo der Tender mit dem Dampfwagen ein Ganzes bildet, wiegen im Ganzen gegen 40 Tonnen.

Aus dem Dampfquantum Q der Maschine läßt sich nun auch die Heizfläche berechnen, indem man annimmt, daß 1 Quadratfuß Heizfläche stündlich 12 Pfund Dampf erzeugt. Dies vorausgesetzt, ist die gesuchte Heizfläche

$$S = \tfrac{1}{12} Q\gamma = \frac{5{,}15\, Q}{\mu} \text{ Quadratfuß.}$$

Rechnet man, daß durch Verbrennung von 1 Pfd. Coaks 8 Pfd. Wasser in Dampf verwandelt werden, so erhält man durch den Ausdruck

$$K = \tfrac{1}{8} Q\gamma = 7{,}72 \frac{Q}{\mu}$$

den erforderlichen Coaksaufwand K. Die ganze Heizfläche bei Locomotiven ist $S = 800$ bis 1300 Quadratfuß, wovon die Heizfläche im Feuerkasten, $1/10$ bis $1/15$ und die Rostfläche $1/80$ beansprucht. Man kann auch annehmen, daß 1 Pferdekraft stündlich 6 Pfund Coaks erfordert. Bei einer Leistung von 250 Pferdekräften ist folglich der stündliche Coaksbedarf 15 Centner, und wenn nun der Tender mit 60 Centner Coaks beladen wird, so ist folglich nach je 4 Stunden Fahrzeit eine neue Coaksladung nöthig. Hierzu kommt noch die Wasserladung des Tenders von circa 200 Cubikfuß = 123,5 Centner, wovon jede Pferdekraft stündlich 48 Pfd. verbraucht. Eine Maschine von 250 Pferdekräften consumirt daher stündlich 120 Centner Wasser, und muß stündlich, d. i. auf je eine Strecke von 4 bis 6 Meilen, neues Speisewasser fassen. Im Mittel kann man bei der gedachten Maschine annehmen, daß pro Meile $2\frac{1}{2}$ Centner Kohle und 20 Centner Wasser verbraucht werden.

Um die Störungen in der Bewegung einer Locomotive möglichst herabzuziehen, ist gegenüber jeder Kurbelwarze in einem willkürlichen Abstande r_1, ein Gegengewicht G anzubringen, welches durch die Formel

$$G = (\tfrac{1}{2} G_1 + G_2 + \tfrac{3}{4} G_3) \frac{a}{r_1}$$

bestimmt wird, worin G_1 das Gewicht des Kolbens sammt Kolbenstange, G_2 das auf die Warzenaxe reducirte Gewicht des Kurbelarmes und G_3 das Gewicht der Kurbelstange sowie a die Länge des Kurbelarmes bezeichnet.

Folgende Tabelle enthält die vorzüglichsten Dimensionen der Locomotiven auf der französischen Eisenbahn Du Nord.

Tabelle.

Benennungen.	Gemischte Züge.	Güterzüge.	Personenzüge.
Länge der Roſtfläche . .	1,255 Met.	0,925 Met.	1,370 Met.
Breite „ „ . .	0,915 „	0,914 „	1,029 „
Inhalt „ „ . .	1,148 □M.	0,845 □M.	1,420 „
Anzahl der Feuerröhren .	125	125	178
Länge derſelben	3,470 Met.	3,800 Met.	3,615 „
Innerer Durchmeſſer derſ.	0,046 „	0,045 „	0,047 „
Wanddicke derſelben . . .	0,002 „	0,002 „	0,002 „
Heizfläche „ . . .	68,10 □M.	66,50 □M.	94,96 □M.
„ im Brennheerd .	6,25 „	5,01 „	7,38 „
Ganze Heizfläche	74,35 „	71,51 „	102,34 „
Innerer Durchmeſſer des cylindr. Keſſelkörpers .	0,950 Met.	0,950 Met.	1,200 Met.
Länge deſſelben	3,355 „	3,685 „	3,550 „
Volumen des Waſſers im Keſſel, 0,1 Meter über dem Brennheerd ſtehend	2,427 C.-M.	2,228 C.-M.	2,779 C.-M.
Dampfvolumen	1,469 „	1,167 „	0,615 „
Länge des Rauchkaſtens .	0,665 Met.	0,849 Met.	0,675 Met.
Breite deſſelben	1,156 „	1,156 „	1,200 „
Höhe „	1,220 „	1,100 „	1,200 „
Innerer Durchmeſſer der Eſſe	0,328 „	0,328 „	0,400 „
Höhe derſelben über dem Rauchkaſten	1,710 „	1,815 „	1,950 „
Kolbendurchmeſſer einer Speiſepumpe	0,060 „	0,105 „	0,064 „
Schub derſelben	0,560 „	0,116 „	0,550 „
Waſſervolumen pr. Schub	1,58 Liter	1,00 Liter	1,76 Liter
Querſchnitt der Eintrittsmündung des Dampfes	0,0112 □M.	0,012 □M.	0,0132 □M.
Entſprechender Durchmeſſer	0,119 Met.	0,124 Met.	0,130 Met.
Querſchnitt der Austrittsmündung des Dampfes	0,0113 □M.	0,01227 □M.	0,0209 □M.
Entſprechender Durchmeſſer	0,120 Met.	0,125 Met.	0,163 Met.
Winkel des Voreilens . .	30 Grad	30 Grad	15 Grad
Voreilen des Dampfſchiebers beim Zulaſſen des Dampfes	0,004 Met.	0,004 Met.	0,004 Met.
Voreilen des Dampfſchiebers beim Ablaſſen deſſelben	0,026 „	0,026 „	0,032 „
Innere Bedeckung des Schiebers	0,001 „	0,001 „	0,0068 „
Aeußere Bedeckung, deſſ. .	0,025 „	0,024 „	0,028 „
Kleinſte Expanſion des Dampfes.	1,25	1,25	1,25

Tabelle.

Benennungen.	Gemischte Züge.	Güterzüge.	Personenzüge.
Größte Expansion des Dampfes	4,0	4,0	4,0
Schieberweg	0,116 Met.	0,116 Met.	0,184 Met.
Länge des Querschnitts der Einströmungsöffnung .	0,250 „	0,250 „	0,300 „
Breite desselben	0,040 „	0,040 „	0,050 „
Inhalt „	0,010 □M.	0,010 □M.	0,015 □M.
Länge des Querschnitts der Ausströmungsöffnung .	0,250 Met.	0,250 „	0,300 Met.
Breite desselben	0,075 „	0,076 „	0,090 „
Inhalt „	0,019 □M.	0,019 □M.	0,027 □M.
Länge des Dampfschiebers	0,310 Met.	0,312 Met.	0,360 Met.
Breite desselben	0,245 „	0,244 „	0,286 „
Fläche „	0,076 □M.	0,076 □M.	0,103 □M.
Axenabstand der liegenden Dampfcylinder . . .	1,880 Met.	2,076 Met.	1,850 Met.
Lichter Durchmesser eines Dampfcylinders . . .	0,380 „	0,380 „	0,400 „
Lichte Länge desselben . .	0,720 „	0,742 „	0,682 „
Kolbenschub	0,560 „	0,610 „	0,550 „
Länge des schädl. Raumes	0,025 „	0,025 „	0,020 „
Länge der Kurbelstange .	1,825 „	1,470 „	2,310 „
Federn d. mittleren Axe, Länge ders. . .	0,950 „	0,950 „	0,966 „
Federn d. mittleren Axe, Breite „ . .	0,090 „	0,090 „	0,100 „
Federn d. mittleren Axe, Höhe in d. Mitte	0,158 „	0,140 „	0,115 „
Federn d. mittleren Axe, Bogenhöhe während der Belast.	0,054 „	0,080 „	0,115 „
Federn der Vorderaxe, Länge ders. . .	0,950 „	0,950 „	0,966 „
Federn der Vorderaxe, Breite „ . .	0,090 „	0,090 „	0,100 „
Federn der Vorderaxe, Höhe in d. Mitte	0,174 „	0,158 „	0,150 „
Federn der Vorderaxe, Bogenhöhe während der Belast.	0,083 „	0,076 „	0,172 „
Federn der Hinteraxe, Länge ders. . .	0,950 „	0,950 „	0,966 „
Federn der Hinteraxe, Breite „ . .	0,090 „	0,090 „	0,100 „
Federn der Hinteraxe, Höhe in d. Mitte	0,132 „	0,158 „	0,150 „
Federn der Hinteraxe, Bogenhöhe während der Belast.	0,080 „	0,080 „	0,172 „
Durchmesser der mittleren Räder	1,740 „	1,220 „	1,220 „
Durchmesser der Vorderräder	1,040 „	1,220 „	1,350 „
Durchmesser der Hinterräder	1,740 „	1,220 „	2,100 „
Mittlere Axe, Halsdurchmesser .	0,160 „	0,160 „	0,180 „
Mittlere Axe, Halslänge . . .	0,150 „	0,150 „	0,250 „
Mittlere Axe, Durchm. des Kopfes	0,180 „	0,180 „	0,190 „
Mittlere Axe, „ in der Mitte	0,160 „	0,155 „	0,150 „

Tabelle.

Benennungen.		Gemischte Züge	Güterzüge.	Personenzüge.
Vorderaxe	Halsdurchmesser .	0,140 Met.	0,150 Met.	0,150 Met.
	Halslänge . . .	0,170 „	0,150 „	0,300 „
	Durchm. d. Kopfes	0,160 „	0,180 „	0,230 „
	„ in d. Mitte	0,180 „	0,145 „	0,160 „
Hinteraxe	Halsdurchmesser .	0,160 „	0,150 „	0,180 „
	Halslänge . . .	0,150 „	0,150 „	0,260 „
	Durchm. d. Kopfes	0,180 „	0,180 „	0,210 „
	„ in d. Mitte	0,196 „	0,145 „	0,172 „
Innerer Abstand der Räder von einander		1,355 „	1,355 „	1,355 „
Innerer Abstand der Schienen von einander . .		1,440 „	1,440 „	1,440 „
Abstand der äußeren Axen von einander		4,420 „	2,935 „	4,860 „
Abstand der Vorderaxe von der Mittelaxe		2,200 „	1,585 „	2,300 „
Breite der Radreifen . .		0,140 „	0,140 „	0,140 „
Conicität derselben . . .		0,05 „	0,05 „	0,05 „
Gewicht der leeren Maschine		21,71 Tonn.	20,07 Tonn.	24,20 Tonn.
Gewicht der gefüllten Maschine		24,40 „	22,30 „	27,32 „
Gewicht des leeren Tenders		7,37 „	7,37 „	9,95 „
„ „ Wassers . .		5,78 „	5,78 „	6,39 „
„ „ Coaks . . .		1,76 „	1,75 „	1,23 „
„ „ belasteten Tenders		14,91 „	14,90 „	17,57 „

Der Feuerkasten oder Feuerbox erhält doppelte Wände von nahe $^3/_4$ Zoll Stärke, welche $2^1/_2$ bis 3 Zoll von einander abstehen, und durch $^3/_4$ Zoll dicke, $4^1/_2$ Zoll von einander abstehende Stehbolzen mit einander verbunden sind; die innere Wand ist von Kupfer, während die äußere aus Eisenblech gemacht wird.

§. **110. Förderung zu Wasser.** Bezeichnet l die Länge eines Schiffes, sowie b die größte Breite, h die größte Höhe und a den Tiefgang desselben, ferner F den Inhalt des eingetauchten Hauptquerschnittes, G den Inhalt der Schwimmfläche oder des von der geladenen Wasserlinie begrenzten Flächenraumes, und endlich V das Volumen des verdrängten Wassers, so hat man im Mittel

	$\frac{b}{l}$	$\frac{h}{b}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{F}{ab}$	$\frac{G}{bl}$	$\frac{V}{abl}$
1) Für Flußdampfer	$\frac{1}{16}$ bis $\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	0,92	0,65	0,50
2) » Seedampfer	$\frac{1}{5}$ » $\frac{1}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	0,85	0,75	0,60
3) » Segelschiffe	$\frac{1}{3}$ » $\frac{1}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	0,82	0,80	0,70

Aus dem Volumen V folgt der Auftrieb des Wassers: $V\gamma = 61{,}74\,V$ Pfund, welcher gleich zu setzen ist der Summe der Gewichte von der Schiffsladung, dem leeren Schiffe und dem Treibapparate, z. B. der Dampfmaschine u. s. w.

Die Stabilität eines Schiffes ist durch die Formel

$$S = (Gk^2 - Ve)\,\varphi\gamma$$

auszudrücken, in welcher Gk^2 das Trägheitsmoment der Schwimmfläche in Hinsicht auf die Längenaxe, e die Höhe des Schwerpunktes vom Schiffe über dem des verdrängten Wassers und φ die Abweichung des Schiffes von der aufrechten Stellung bezeichnet. Die Kraft zur Bewegung eines schwimmenden Schiffes ist

$$P = \zeta F \frac{(v \pm w)^2}{2g}\gamma,$$

wobei F den größten eingetauchten Querschnitt, v die absolute Geschwindigkeit des Schiffes, sowie w die Geschwindigkeit des Wassers und ζ einen von der Form und Größe des Schiffes abhängigen Coefficienten bezeichnet. Auch läßt sich

$P = 51\,\zeta F\,(v \pm w^2)$ Kilogr. $= 0{,}99\,\zeta F(v \pm w)^2$ Pfd.

setzen.

Für die Bewegung gegen den Strom ist natürlich das obere, dagegen für die in der Stromrichtung das untere Zeichen von w anzubringen, und für die Bewegung im stehenden Wasser $w = 0$ zu setzen.

Für ein prismatisches Schiff mit ebenen Endflächen ist	$\zeta = 1{,}1$
Für ein prismatisches Schiff mit zugeschärftem Vordertheile, bei dem Zuschärfungswinkel $\beta = 30^0$	$\zeta = 0{,}48$
Für ein prismatisches Schiff mit zugeschärften Vorder- und Hintertheil .	$\zeta = 0{,}37$
Für gewöhnliche Segelschiffe u. Kähne	$\zeta = 0{,}20$ bis $0{,}30$
» » Seedampfschiffe, sowie für Dampfschiffe in einem breiten Fluß	$\zeta = 0{,}15$ » $0{,}20$
» sehr schlanke und gut abgerundete Dampfschiffe	$\zeta = 0{,}05$ » $0{,}10$
» Dampfschiffe in schmalen Flüssen oder engen Kanälen	$\zeta = 0{,}20$ » $0{,}40$

Die Leistung, welche das Fortziehen eines Schiffes mit der Geschwindigkeit v in Anspruch nimmt, ist

$$L = Pv = \zeta F \frac{(v \pm w)^2 v}{2g} \gamma = 0{,}99\, \zeta F\ (v \pm w)^2 v$$

Fußpfund $= 0{,}00206\, \zeta F\ (v \pm w)^2 v$ Pferdekräfte.

Die Geschwindigkeit der Segelschiffe ist natürlich sehr verschieden; Dampfschiffe fahren gewöhnlich mit 10 bis 15 Fuß, unter günstigen Umständen jedoch auch mit 20 bis 25 Fuß, also nahe halb so schnell als Dampfwagen. Auf Flüssen fährt man natürlich schneller ab- als aufwärts. Die gewöhnliche Geschwindigkeit der Flüsse ist 3 bis 6 Fuß. Die Kraft, mit welcher ein Schiff durch ein Schaufelrad im stillstehenden Wasser bewegt wird, ist durch die Formel

$$P = \zeta_1 \frac{(c - v)^2}{2g} F_1 \gamma$$

zu berechnen, in welcher c die mittlere Umdrehungsgeschwindigkeit des Ruderrades, v die Geschwindigkeit des Fahrzeugs und F_1 den Inhalt des ins Wasser eingetauchten Theiles einer Radschaufel bezeichnet.

Führt man noch den Widerstandscoefficienten $\zeta_1 = 1{,}25$ ein, so erhält man

$P = 63{,}75\, F_1 (c - v)^2$ Kilogr. $= 2{,}47\, F_1 (c - v)^2$ Pfd.,

oder wenn sich das Schiff im Wasser bewegt, welches mit der Geschwindigkeit $\pm w$ dem Schiffe entgegen strömt,

$P = 63{,}75\, F_1 (c - v \mp w)^2$ Kilogr. $= 1{,}24 (c - v \mp w)^2$ Pfd.

Damit das Schiff vom Ruderrade fortbewegt werde, muß sein

$$\zeta_1 F_1 (c - v \mp w)^2 = \zeta F (v \pm w)^2,$$

wonach die erforderliche Radgeschwindigkeit

$$c = \left(1 + \sqrt{\frac{\zeta F}{\zeta_1 F_1}}\right) (v \pm w)$$

und die erforderliche Leistung der Umtriebsmaschine

$$L = Pc = \zeta \left(1 + \sqrt{\frac{\zeta F}{\zeta_1 F_1}}\right) \frac{(v \pm w)^3}{2g} F\gamma$$

$$= 0{,}99\, \zeta F \left(1 + \sqrt{\frac{\zeta F}{\zeta_1 F_1}}\right) (v \pm w)^3 \text{ Fußpfd. folgt.}$$

Das Verhältniß $\frac{c}{v \pm w} = 1 + \sqrt{\frac{\zeta F}{\zeta_1 F_1}}$, dessen Reciproke sowohl das Zurückbleiben des Schiffes gegen die Umdrehungsbewegung des Rades als auch den Wirkungsgrad der Ruderräder ausdrückt, ist erfahrungsmäßig 1,30 bis 1,70 und läßt sich im Mittel $= 1{,}50$ setzen, so daß sich einfach

$$L = 1{,}5\, \zeta \frac{(v \pm w)^3}{2g} F\gamma = 1{,}485\, \zeta F (v \pm w)^3 \text{ Fußpfd.},$$

z. B. für $\zeta = 0{,}1$,

$L = 0{,}1485\, F (v \pm w)^3$ Fßpfd. $= 0{,}000309\, F (v \pm w)^3$ Pferdekräfte ergiebt.

Ist z. B. der größte Querschnitt des eingetauchten Schifftheiles, $F = 50$ Quadratfuß, die Geschwindigkeit des Schiffes, $v = 16$ Fuß, und die Geschwindigkeit des Stromes, in welchem dasselbe aufwärts zu bewegt wird, $w = 4$ Fuß, so hat man die erforderliche Leistung der Umtriebsmaschine

$$L = 0{,}000309 \,.\, 50 \,.\, 20 = 30{,}9 \,.\, 4 = 123{,}6 \text{ Pferdekräfte.}$$

Aus der Geschwindigkeit $c = 1{,}5\,(v \pm w)$ und dem mittleren Halbmesser r eines Ruderrades folgt die erforderliche Umdrehungszahl desselben:

$$u = \frac{30c}{\pi r} = 9{,}55\ \frac{c}{r},$$

sowie die Größe der Schaufelfläche:

$$F_1 = \left(\frac{v \pm w}{c - v \mp w}\right)^2 \frac{\zeta F}{\zeta_1} = \frac{2g}{\gamma}\ \frac{L}{\zeta_1 (c - v \mp w)^2 c}$$

$$= \frac{485\,L}{\zeta_1 c\,(c - v \mp w)^2} = \frac{388\,L}{c\,(c - v \mp w)^2} \text{ Quadratfuß,}$$

wenn L in Pferdekräften gegeben ist.

Der Halbmesser eines Ruderrades ist, je nach der Höhe des Schiffes, 6 bis 16 Fuß, die Umdrehungszahl desselben, $u = 16$ bis 32 und die Länge einer Schaufel 4 bis 12 Fuß. Die Breite der letzteren ist 4 bis 6mal in der Länge derselben enthalten, und der Abstand zwischen je zwei Schaufeln beträgt 2 bis 3 Fuß, wonach die Anzahl der Schaufeln eines Rades $n =$ 16 bis 32 folgt.

Das **Flügel- oder Schraubenrad** wirkt nicht, wie die Schaufelräder, absetzend, sondern stetig, und daher auch vollkommener als diese. Die vorstehenden Formeln für die Schaufelräder finden auch ihre Anwendung bei den Flügelrädern, wenn man hier unter F_1 den Inhalt der auf die Umdrehungsebene projicirten Flügelflächen versteht, und statt der mittleren Umdrehungsgeschwindigkeit c, die Projection c_1 derselben in der Axenrichtung einführt. Bezeichnet α den Winkel, welchen die Flügelfläche mit der Umdrehungsebene einschließt, so hat man

$$c_1 = c\,tang.\alpha = v\left(1 + \sqrt{\frac{\zeta F}{\zeta_1 F_1}}\right),$$

wobei ζ_1 ebenfalls $= 1{,}25$ zu setzen ist.

Im Mittel ist $1 + \sqrt{\frac{\zeta F}{\zeta_1 F_1}} = 1{,}2$, und daher das **Zurückbleiben** des Schiffes gegen das Fortschreiten des Schraubenrades: $c\,tang.\alpha - v = 0{,}2v$.

Erfahrungsmäßig soll die projicirte Flügelfläche nur ein Drittel der ganzen Kreisfläche einnehmen, welche der ganzen Radhöhe als Durchmesser zukommt. Auch ist die projicirte Flügelfläche gewöhnlich ein Drittel des widerstehenden Schiffsquerschnitts, und daher auch gleich dem Inhalt der gedachten Kreisfläche.

Die Anzahl der Flügel soll eine ungerade, z. B. 3 oder 5

sein, damit nicht je zwei Flügel zugleich durch das Hintertheil des Schiffes hindurchgehen. Der mittlere Neigungswinkel der Flügelflächen gegen die Umdrehungsebene ist 30 bis 40 Grad, folglich $ctang.\, \alpha = 0{,}577\, c$ bis $0{,}839\, c$. Die Schraubenräder haben eine Höhe von 5 bis 15 Fuß und machen pro Minute 60 bis 180 Umdrehungen.

Aus der mechanischen Arbeit L zur Fortbewegung eines Dampfschiffes läßt sich mit Hülfe der Formel

$$Q = \frac{L}{\eta p_0 \left(1 + L_n\, \varepsilon - \frac{\varepsilon q_0}{p_0}\right)}$$ (s. §. 77, S. 566)

das nöthige Dampfquantum Q berechnen, woraus dann die Dimensionen und anderen mechanischen Verhältnisse der Dampfmaschine folgen. Den Wirkungsgrad η kann man $= 0{,}65$, und die Dampfspannung im Kessel, je nachdem man mit Tief- oder Mitteldruck arbeiten läßt, $1\frac{1}{4}$ bis 4 Atmosphären setzen, während der Gegendruck, da hier stets Condensation angewendet werden kann, $q_0 = \frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{8}$ Atmosphäre anzunehmen ist.

Im Durchschnitt nimmt man an, daß bei einer Schiffgeschwindigkeit von 16 Fuß, auf je 10 Quadratfuß größte Querschnittsfläche des Schiffes, bei Seeschiffen 12 bis 25, und bei Flußschiffen 50 bis 60 Pferdekräfte nöthig sind. Auch kann man auf jede Pferdekraft eine Schiffslast von 2 bis 4 Tonnen = 4000 bis 8000 Pfd. rechnen.

Die Schaufelräder eines Dampfschiffes werden in der Regel mittels des doppelten Krummzapfenmechanismus durch zwei Dampfmaschinen direct in Bewegung gesetzt, wobei die Schaufelräder auf den Enden der Kurbelwelle sitzen. Aus der geforderten Umdrehungszahl n dieser Welle und der mittleren Geschwindigkeit der Dampfkolben, $v = 3\frac{1}{2}$ bis $4\frac{1}{2}$ Fuß, folgt der Kolbenschub $s = \frac{30\, v}{n} = \frac{105}{n}$ bis $\frac{135}{n}$ Fuß. Bei Anwendung von schwingenden Dampfcylindern dienen die Kolbenstangen zugleich mit als Kurbelstangen, wobei natürlich Raum erspart wird. Die Schiffsschraube oder das Flügelrad eines Schraubendampfers läuft viel schneller um, als die Schaufelräder, daher ist nöthig, daß die Dampfmaschine ein Zahnradvorgelege erhält, oder daß sie unter ungewöhnlichen Verhältnissen, namentlich mit einer größeren Geschwindigkeit v und kleinem Hube s arbeiten, wobei auch das Verhältniß $\frac{s}{d}$ sehr klein ausfällt, und die Anwendung von vier Cylindern von Vortheil ist.

Die Hauptdimensionen einiger Fluß- und Seedampfschiffe geben folgende Tabellen I, II und III an.

Tabelle I.

Die Hauptdimensionen einiger Flußdampfschiffe.

Name des Flusses . .	Garonne	Untere Loire	Loire
Name des Schiffes . .	Clémence-Isaure	Pyroscaphe	Courier
Constructor der Schiffsmaschine	Jollet	Miller	Gache
Länge des Verdecks . .	—	39,0 Met.	—
„ der Schwimmlinie	36,0 Met.	36,0 „	48,0 Met.
Größte Breite des Hauptquerschnittes . . .	3,6 „	3,7 „	3,50 „
Tiefe der Eintauchung ohne Ladung . . .	—	—	0,42 „
Tiefe der Eintauchung mit Ladung (Nutzlast)	0,50 „	0,80 „	0,60 „
Weg im todten Wasser stündlich	17310 „	11700 „	16200 „
Weg im todten Wasser pro Secunde . . .	4,81 „	3,25 „	4,50 „
Anzahl der Dampfcylinder	2	1	2
Durchmesser der Dampfkolben	0,25 „	0,69 „	0,76 „
Länge des Schubs . .	0,50 „	0,76 „	0,50 „
Anzahl der Kolbenspiele pro Minute	42,75 „	30	34
Expansion	0	—	0
Dampfpressung im Kessel	6 Atm.	4,5 Atm.	1,5 Atm.
„ „ Condensator	—	0,15 „	0,20 „
Aeußerer Durchmesser der Ruderräder	2,90 Met.	3,22 Met.	3,70 „
Breite einer Radschaufel	0,35 „	0,43 „	0,32 „
Länge derselben . . .	1,65 „	1,60 „	2,30 „
Anzahl „	12	—	16
Totale Heizfläche . . .	19,07 □M.	—	50 □M
Stündlicher Kohlenverbrauch	1,5 Hectol.	1,4 Hectol.	—
Gewicht der Maschine .	2450 Kilogr.	—	—
Gewicht des Kessels ohne Wasser	4000 „	7000 Kilogr.	—

Tabelle I.

Die Hauptdimensionen einiger Flußdampfschiffe.

Rhein	Rhone	Rhone	Saône	Seine
Adler	Les Papins	Crocodill	Hirondelle	Le Belot
Cavé	Maudsley	Schneider	Murray	Corady
59 Met.	56 Met.	—	52,70 Met.	80,0 Met.
—	—	60 Met.	—	—
3,70 „	6,0 „	5,80 „	4,72 „	4,25 „
—	0,60 „	0,60 „	0,43 „	—
0,75 „	0,85 „	0,85 „	0,56 „	0,80 „
17397 „	15972 „	16972 „	16281 „	20000 „
4,83 „	3,96 „	4,71 „	4,52 „	5,55 „
2	2	2	2	2
0,46 Met.	0,86 Met.	0,60 Met.	0,61 Met.	0,96 Met.
1,35 „	0,91 „	1,50 „	0,914 „	0,96 „
33,5	29	30	31	33
4	0	3	$^3/_2$ bis 2	6
6 Atm.	$1^1/_3$ Atm.	3 Atm.	$3^1/_4$ Atm.	4 Atm.
0,225 „	—	0,25 „	0,10 „	—
4,20 Met.	4,26 Met.	4,50 Met.	4,18 Met.	5,00 Met.
0,43 „	0,45 „	0,50 „	0,50 „	0,40 „
2,50 „	2,13 „	2,70 „	1,92 „	3,20 „
—	14	—	14	14
47 □M.	—	110 □M.	45 □M.	223 □M.
—	4,83 Hectol.	6 Hectol.	5,3 Hectol.	—
—	—	—	—	—
—	—	—	—	—

Tabelle II.

Die Hauptdimensionen einiger Seedampfschiffe.

1. Mit Schaufelrädern.

Name des Schiffes . .	Humboldt	Asia	Thabor
Dienst desselben im .	Atlantischen Ocean	Atlantischen Ocean	Mittelländischen Meer
Constructor der Maschine	Allen und Stilman	Napier	La Ciotat
Nominelle Stärke ders.	850 Pfkr.	900 Pfkr.	370 Pfkr.
Auftrieb des Wassers .	2500 Tonn.	—	1121 Tonn.
Lastigkeit des Schiffes .	—	2136 Tonn.	—
Länge der Schwimmlinie	63,0 Met.	79,4 Met.	60,0 Met.
Größte Breite des Hauptquerschnittes . . .	13,98 „	12,12 „	8,77 „
Schiffstiefe	—	7,55 „	5,90 „
Eintauchungstiefe (beladen)	5,77 „	5,53 „	4,30 „
Inhalt des eingetauchten Querschnitts (beladen)	72,0 □M.	60,4 □M.	29,18 □M.
Geschwindigkeit . . .	10 Knoten	12 Knoten	11 Knoten
Durchmesser eines Rades	10,8 Met.	11,10 Met.	—
Anzahl der Umdrehungen pro Minute . .	15	—	20½
Anzahl der Schaufeln oder Flügel	36	—	—
Länge der Schaufeln .	3,75 Met.	3,04 Met.	—
Breite der Schaufeln .	0,65 „	1,04 „	—
Ganghöhe der Schrauben- oder Flügelräder	—	—	—
Dampfdruck	2 Atm.	Niederdruck	—
Expansion	3	—	—
Anzahl der Dampfkolben	2	2	2
Durchmesser derselben .	2,41 Met.	1,91 Met.	1,43 Met.
Kolbenweg	2,73 „	3,00 „	1,50 „
Spielzahl	15	—	20½

Tabelle II.

Die Hauptdimensionen einiger Seedampfschiffe.

2. Mit Flügelrädern (Schraube).

Provence	Mersey	Danube (Donau)	Roland
Französisches Transportschiff	Franz. Schiff (gemischt)	Franz. Schiff (gemischt)	Französische Fregatte
Bourdon zu Marseille	Smith und Rodger	La Ciotat	Mazeline
180 Pfkr.	250 Pfkr.	370 Pfkr.	400 Pfkr.
—	—	1464 Tonn.	—
—	—	—	1300 Tonnen
58,0 Met.	66,0 Met.	70,0 Met.	53,0 Met.
8,20 „	8,30 „	10,0 „	10,4 „
5,60 „	6,80 „	6,30 „	—
4,00 „	4,30 „	4,21 „	4,58 „
23,0 □M.	31,22 □M.	38,8 □M.	37,6 □Met.
10½ Knoten	—	13 Knoten	12 Knoten
3,90 Met.	—	3,70 Met.	3,71 Met.
54	70	63,7	42
4	3	6	4
—	—	—	—
—	—	—	—
6,0 Met.	7,0 Met.	6,0 Met.	5,31 Met.
2 Atm.	3 Atm.	2,5 Atm.	Niederdruck
—	2,63	10/3	10/7
2	2	2	4
1,30 Met.	1,38 Met.	1,42 Met.	1,20 Met.
0,80 „	1,06 „	0,86 „	1,00 „
54	28	63,7	42

Tabelle III.

Die Hauptdimensionen der Seedampfschiffmaschinen mit Condensation, in englischen Zollen.

Nach Maudslay, Sons and Field.

Benennung der Maschinentheile	Nominelle		
	10	20	30
Durchmesser des Dampfcylinders .	20	27	32
" der Kolbenstange desselben	2	2¾	3¼
Durchmesser der Luftpumpe . . .	12	17	18½
" " Kolbenstange derselben	1¼	2	2¼
Durchmesser der Warmwasserpumpe	2¼	3	3½
" des Speiserohres . .	1½	2	2¼
" " Dampfrohres . .	4	5¾	6½
" " Injectionsrohres .	1¼	1⅝	2
" " Ablaßrohres im Condensator	5	7	8
Durchmesser der Mittelzapfen des Balanciers	3½	5	5½
Durchmesser der Endzapfen desselben	2	2¾	3¼
" " Luftpumpenzapfen .	1¼	1¾	2
" " Kurbelwarze . . .	2½	3¼	4
" " Hauptwelle . . .	4¼	6¼	7
" " Schaufelräder . .	108	121	156
Hub des Dampfkolbens	24	30	36
" der Luftpumpe	12	15	18
" " Speisepumpe	6	7½	9
Dicke des Balanciers	1	1⅓	1½
Höhe in der Mitte	14	19	23
" an den Enden	5	6¾	8
Centrischer Abstand zwischen den Kurbelstangen der Luftpumpe .	29½	37¼	42½
Centrischer Abstand zwischen den Balanciers desselben Cylinders . .	33	42½	48
Centrischer Abstand zwischen dem langen Rahmenstücke	21	25½	27
Centrischer Abstand zwischen den Cylindern beider Maschinen . . .	66	76	84
Breite der Dampfcanäle	1½	2	2½
Länge derselben	7½	10	11½
Breite des Saugventiles	2	2½	3¼
Länge desselben	13	15½	18

Tabelle III.

Die Hauptdimensionen der Seedampfschiffmaschinen mit Condensation in englischen Zollen.

Nach Maudsley, Sons and Field.

Leistung der Maschine in Pferdekräften.					
40	50	60	80	100	120
36½	40	43	48	52½	57
3½	4	4½	4¾	5	5½
21	23	24	27½	30	34
2½	2¾	2⅞	3¼	3¾	4¼
4	4¼	4½	5½	6½	7½
2½	2⅝	2¾	3¼	3½	4
7	7¾	8½	10	11	12
2¼	2½	2¾	3⅛	3¼	3½
9	9½	10	11½	13	14
6	6½	7	8	9	9¾
3½	4	4¼	4½	5¼	5½
2¼	2⅜	2½	2⅞	3⅛	3¼
4½	5	5½	6½	7⅜	8
7½	8½	9¼	10¼	11½	12½
168	180	204	228	262	276
39	42	48	56	63	72
19½	21	24	28	31½	36
9¾	10½	12	14	16	18
1¾	1⅞	2	2⅜	2½	2⅝
25	28	29	34	36	39
8¾	10	10½	12¼	14	15½
47½	53	55¾	63	68½	72
54	60	63	69	78	83
30	34	34	40	44	46
88	96	100	108	126	130
2¾	3	3½	4	4½	4¾
13	15	18½	19	20	21
3¾	4	4½	5¼	6	7
20	24	26	28	31	32

§. 111. Wasserhebung.

Wasserheben durch animalische Kräfte.	Fußpfund täglich.
Ein Arbeiter leistet beim Wasserheben mittels eines leichten Eimers	293000
Ein Arbeiter leistet beim Wasserheben mittels einer Wurfschaufel	306000
Ein Arbeiter leistet beim Wasserheben mittels einer Schwungschaufel	765000
Ein Arbeiter leistet beim Wasserheben mittels eines Eimers am Schwengel	414000
Ein Arbeiter leistet beim Wasserheben mittels eines Eimers an einem über eine Rolle gezogenen Seile	491000
Ein Arbeiter leistet beim Wasserheben mittels Eimer, Seil u. Kurbelhaspel mit Schwungrad aus einem tiefen Brunnen	1'083000
Ein Arbeiter leistet beim Wasserheben mittels Eimer, Seil und Göpel	1'275000
Ein Pferd oder Maulthier desgl.	7'431000
Ein Ochs	7'137000
Ein Esel	2'129000
Ein Arbeiter an einer geneigten Schaufelkunst mit dem Wirkungsgrad $\eta = 0{,}38$.	433000
Ein Pferd	2'861000
Ein Arbeiter an einer verticalen Schaufelkunst	733000
Ein Pferd	4'123000
Ein Pferd an einer Kastenkunst	4'276000
» Esel » » »	2'129000
Ein Mann an einer archimedischen Wasserschnecke mit drei Schraubengängen von 20 bis 23 Grad Ansteigen, bei 30 bis 45 Grad Axenneigung	637000
Ein Mann an einem chinesischen Schöpfrade	923000
» » » » Schöpfrad mit Spiralgängen	1'345000

Ist V das Wasserquantum, welches der Eimer oder die Zelle eines Schöpfrades faßt, h die senkrechte Höhe, auf welche das Wasser gehoben wird, n die Anzahl dieser Gefäße und u die Umdrehungszahl des Rades pro Minute, so hat man die gehobene Wassermenge pro Secunde:

$$Q = \frac{n\,u\,V}{60},$$

und den theoretischen Arbeitsaufwand:

$$L = Qh\gamma = \frac{nu}{60} Vh\gamma.$$

Dieselben Formeln finden ihre Anwendung auch bei den Schaufel- und Eimerkünsten, wo n die Anzahl der Arme, Gabeln, Zähne oder Triebstöcke des Triebrades bezeichnet, womit die Schaufeln oder Eimer erfaßt werden. Ebenso finden diese Formeln auch bei den Wasserschnecken, Spiral- und Rotationspumpen ihre Anwendung.

Bei der alten Centrifugalpumpe mit Schwungröhren ist

$$Q = nFc = nF\sqrt{v^2 - 2gh},$$

wenn F den Inhalt einer Ausmündung, n die Anzahl dieser Mündungen, v die Umdrehungsgeschwindigkeit derselben, c die Ausströmungsgeschwindigkeit und h die ganze Steig- oder Förderhöhe des Wassers bezeichnen.

Sind die Mündungen an den Seiten der Röhren angebracht, so ist die absolute Austrittsgeschwindigkeit des Wassers $w = v - c$, der erforderliche Arbeitsaufwand

$$L = \left(h + \frac{w^2}{2g}\right) Q\gamma,$$

und der Wirkungsgrad der Maschine

$$\eta = \frac{Qh\gamma}{L} = \frac{h}{h + \frac{w^2}{2g}} = \frac{gh}{v(v - \sqrt{v^2 - 2gh})},$$

z. B. für $v = \sqrt{2gh}$, $\eta = 0{,}5$.

Damit die Centrifugalpumpe wirklich Wasser hebe, muß sein:

$$v > \sqrt{2gh}$$
$$< \sqrt{2gh\left[1 + \left(\frac{F_1}{nF}\right)^2 \cdot \frac{k - h_1}{h}\right]},$$

wobei F_1 den Querschnitt der Steigröhre, h_1 die Höhe des Wassers in derselben und k die Wasserbarometerhöhe (32,8 Fuß) bezeichnen.

Die neuen Centrifugalpumpen, welche den Turbinen und Ventilatoren ähnlich construirt sind, geben bei guter Construction den Wirkungsgrad $\eta = 0{,}60$ bis $0{,}70$. Eine Appold'sche Centrifugalpumpe von 12 Zoll Durchmesser und 3 Zoll Weite und mit sechs gekrümmten Schaufeln hebt bei

400	500	600 Umdrehungen pro Minute
500	1200	1800 Gallons (zu je 10 Pfd.) Wasser

$5\frac{1}{2}$ Fuß hoch.

Die Pumpen mit Ventilkolben wirken nur beim Aufgang, wobei die theoretische Kraft $P = Fh\gamma$ ist, wenn F die Größe der Kolbenfläche und h die senkrechte Höhe des Ausgußpunktes über dem Unterwasserspiegel und γ (= 61,75 Pfd.) das Gewicht der Raumeinheit Wasser bezeichnet; bei den Pumpen mit massivem Kolben ist dagegen die theoretische Kraft beim Aufgange, $P_1 = Fh_1\gamma$, und die zum Niedergange, $P_2 = Fh_2\gamma$, wenn h_1 die Höhe des mittleren Kolbenstandes über

dem Unterwasserspiegel und $h_2 = h - h_1$ die Höhe des Ausgußpunktes über diesem Kolbenstande bezeichnet. Das theoretische Hubwasserquantum ist in beiden Fällen pro Spiel:

$$V = Fs = \frac{\pi d^2}{4} s = 0{,}785\, d^2 s,$$

wenn s den Kolbenhub und d den Kolbendurchmesser bezeichnet; und das theoretische Arbeitsquantum pro Kolbenspiel:

$$A = Fh\gamma . s = Fsh\gamma = Vh\gamma$$

auch

$$A = \frac{\pi d^2}{4} sh\gamma = 48{,}5\, d^2 sh = 61{,}75\, Vh \text{ Pfd.}$$

Ist n die Anzahl der einfachen Kolbenspiele pro Minute, so folgt die mittlere Kolbengeschwindigkeit

$$v = \frac{n}{60} \cdot 2s = \frac{ns}{30},$$

die theoretische Hubwassermenge pro Secunde

$$Q = \frac{n}{60} V = \frac{ns}{60} F = 0{,}01309\, nsd^2 = \tfrac{1}{2} Fv = \frac{\pi d^2}{8} v,$$

und die theoretische Leistung der einfachwirkenden Pumpe,

$$L = \frac{n}{60} A = \frac{n}{60} Vh\gamma = \frac{ns}{60} Fh\gamma = \tfrac{1}{2} Fvh\gamma = Qh\gamma.$$

Die effectiven Hubwassermengen V_1 und Q_1 sind um 5 bis 15 Proc. kleiner als die theoretischen; es ist daher $V_1 = \mu V$, sowie $Q_1 = \mu Q$ zu setzen, wobei μ den Ausgußcoefficienten $\mu = 0{,}85$ bis $0{,}95$ bezeichnet. Der Sicherheit wegen ist

$$Q_1 = \mu \frac{ns}{60} F = 0{,}85 \frac{ns}{60} F = 0{,}85 \frac{Fv}{2} = 0{,}425 Fv$$

zu setzen.

Hiernach folgt dann der Kolbenquerschnitt

$$F = \frac{2 Q_1}{\mu v} = 2{,}353 \frac{Q_1}{v},$$

und der nöthige Kolbendurchmesser

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = 1{,}1284 \sqrt{F} = 1{,}731 \sqrt{\frac{Q_1}{v}} \text{ Fuß}$$

$$= 20{,}77 \sqrt{\frac{Q_1}{v}} \text{ Zoll.}$$

Der Kolbenhub s ist bei gewöhnlichen Handpumpen $\tfrac{1}{2}$ bis 1 Fuß, bei Pumpen, welche durch Wasserräder getrieben werden, aber $s = 3$ bis 4 Fuß, und bei Dampf- und Wassersäulenkünsten 6 bis 10 Fuß; die Kolbengeschwindigkeit beträgt bei den gewöhnlichen Pumpen $\tfrac{1}{2}$ bis 1 Fuß, und steigert sich nur bei Dampfkünsten auf 2 bis 3 Fuß. Aus s und v folgt die Anzahl der Kolbenspiele pro Minute: $n = \frac{30 v}{s}$, z. B. $v = \tfrac{1}{2}$ und $s = 3$, giebt $n = 5$, ferner $v = 1$ und $s = 5$; $n = 6$ u. s. w.

Bei doppeltwirkenden Pumpen ist das Hubwasser und

die Leistung doppelt so groß, als bei den einfachwirkenden, weshalb hier

$$Q_1 = \frac{\mu n s}{30} F = 0{,}85 F v \text{ und } F = 1{,}176 \frac{Q_1}{v},$$

folglich

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = 1{,}224 \sqrt{\frac{Q_1}{v}} \text{ Fuß} = 14{,}69 \sqrt{\frac{Q_1}{v}} \text{ Zoll}$$

zu setzen ist.

Die Saug- und Steigröhren macht man gewöhnlich $\frac{1}{2}$ bis $\frac{2}{3}$ so weit als die Kolbenröhre. Man läßt die Geschwindigkeit des Wassers in denselben nicht über 4 Fuß steigen, und hat hiernach die unterste Grenze der Weite dieser Röhren, je nachdem die Pumpe einfach- oder doppeltwirkend ist.

1.) $d_1 = 0{,}798 \sqrt{Q}$ Fuß $= 9{,}58 \sqrt{Q}$ Zoll oder

2.) $d_1 = 0{,}564 \sqrt{Q}$ Fuß $= 6{,}77 \sqrt{Q}$ Zoll.

Der Querschnitt der Ventilöffnungen soll eigentlich die Hälfte von der Kolbenfläche sein, wenigstens nicht unter $\frac{1}{4}$ derselben heruntergehen. Die Ventilöffnungen im Ventilkolben sind so groß wie möglich zu machen. Der Ausschub eines Kegelventiles soll $\frac{1}{4}$ der Mündungsweite, und der Ausschlag eines Kegelventiles circa 30 Grad betragen. Bei Doppelventilen, wo zugleich zwei Durchgänge eröffnet werden, ist der Ausschub $\frac{1}{8}$ der Mündungsweite gleich zu machen.

Die Saughöhe h_0 einer Pumpe, vom Unterwasserspiegel bis tiefen Kolbenstand gemessen, darf sowohl die von der Höhe σ des schädlichen Raumes und von der Wasserbarometerhöhe k abhängige Größe $\frac{sk}{s+\sigma}$, als auch den von der Aufgangszeit t und dem Ausflußcoefficienten φ des Saugventiles abhängigen Werth

$$k - \frac{s}{2} - \frac{1}{2g}\left(\frac{\pi s}{2\mu t}\right)^2 - 2g\left(\frac{\mu t}{2\pi}\right)^2$$

nicht übertreffen.

Der Wirkungsgrad der Pumpen ist $\eta = 0{,}70$ bis $0{,}75$. Nimmt man der Sicherheit wegen den ersteren Werth an, so erhält man die effective Leistung

$$L_1 = \frac{Q_1 h}{\eta} = \frac{10}{7} Q_1 h = 1{,}43 Q_1 h \text{ Fußcubikfuß oder}$$

$$L_1 = \frac{Q_1 h \gamma}{\eta} = \frac{10}{7} Q_1 h\gamma = 1{,}43 Q_1 h\gamma = 88{,}2 Q_1 h \text{ Fßpfd.}$$

$$= 0{,}1837\, Q_1 h \text{ Pferdekräfte, oder,}$$

$\mu = 0{,}85$ angenommen,

$$L_1 = \frac{\mu Q h \gamma}{\eta} = 1{,}215\, Q h\gamma = 75{,}0\, Qh \text{ Fußpfd.}$$

$$= 0{,}1562\, Qh \text{ Pferdekräfte.}$$

Bei den gewöhnlichen Hebelpumpen ist die tägliche Leistung eines Arbeiters circa 1'000000 Fußpfd. = 160000 Fußcubikfuß.

Bei einer Feuerspritze ist die mittlere Kolbengeschwindigkeit $v = 1$ bis $1^1/_4$ Fuß, und der Kolbenhub $s = {}^3/_4$ bis $1^1/_4$ Fuß, daher die Anzahl der Kolbenspiele pro Minute, $n = \frac{30v}{s} = 30$ bis 40. Die mittlere Geschwindigkeit des Kraftpunktes, $v_1 = 4$ Fuß gesetzt, folgt das erforderliche Verhältniß des mittleren Kraftarmes a zum Lastarm b, $\frac{a}{b} = \frac{v_1}{v} = 3$ bis 4. Die mittlere Kraft eines Arbeiters beim Niederdrücken des Hebels $= 30$ Pfd., also im Mittel $K = 15$ Pfd. angenommen, folgt die Leistung desselben pro Secunde, $L = Kv_1 = 75$ Fußpfd., d. i. nahe doppelt so groß als bei stetiger Arbeitsverrichtung.

Wenn durch $2m$ Arbeiter, wovon die eine Hälfte arbeitet und die andere ausruht, das Wasser auf die Höhe z gespritzt werden soll, so ist die erforderliche Größe der Kolbenfläche

1.) beim Spritzen aus dem Standrohr

$$F = 0{,}6\,\frac{a}{b}\,\frac{mK}{z\gamma} = 0{,}1458\ \frac{a}{b}\cdot\frac{m}{z}\ \text{Quadratfuß},$$

2.) beim Spritzen mittels Schlauchführung

$$F = 0{,}5\,\frac{a}{b}\,\frac{mK}{z\gamma} = 0{,}1215\ \frac{a}{b}\cdot\frac{m}{z}\ \text{Quadratfuß}.$$

Der entsprechende Kolbendurchmesser beträgt im ersten Falle,

$$d = 0{,}431\sqrt{\frac{a}{b}\,\frac{m}{z}}\ \text{Fuß} = 5{,}17\sqrt{\frac{a}{b}\,\frac{m}{z}}\ \text{Zoll},$$

und im zweiten Falle,

$$d = 0{,}393\sqrt{\frac{a}{b}\,\frac{m}{z}}\ \text{Fuß} = 4{,}72\sqrt{\frac{a}{b}\,\frac{m}{z}}\ \text{Zoll}.$$

Diese Bestimmungen gelten nur für die gewöhnlichen Feuerspritzen mit zwei einfachwirkenden Kolben, sowie für die mit einem einzigen doppeltwirkenden Kolben; hat die Pumpe nur einen einfachwirkenden Kolben, so ist $1{,}414\,d$ statt d, und besteht sie aus zwei doppeltwirkenden Kolben, so ist $0{,}707\,d$ statt d in Anwendung zu bringen.

Wird der Feuerspritze das Wasser durch einen Schlauch zugeführt, so fällt unter übrigens gleichen Verhältnissen die Steighöhe z kleiner aus, als wenn, wie im Vorstehenden vorausgesetzt worden ist, das Wasser unmittelbar aus dem Wasserkasten der Spritze kommt. Die Zuführung des Wassers von entfernten Punkten ist vortheilhafter durch einen Zubringer zu bewirken.

Die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser aus der Mündung des Mundstückes strömt, ist durch die Formel

$$w = \sqrt{{}^4/_3\,.\,2gz} = 9{,}13\sqrt{z}\ \text{Fuß}$$

gegeben, und mit Hülfe derselben bestimmt sich das Verhältniß des Durchmessers d_1 dieser Mündung zum Durchmesser d des Kolbens:

$$\frac{d_1}{d} = \sqrt{\frac{\mu v}{w}} = \sqrt[4]{\frac{3\mu^2}{8g}}\sqrt{\frac{v}{\sqrt{z}}} = 0{,}305\sqrt{\frac{v}{\sqrt{z}}},$$

wobei der Ausgußcoefficient $\mu = 0{,}85$ angenommen worden ist.

Für $v = 1$ Fuß folgt daher $\frac{d_1}{d} = \frac{0{,}305}{\sqrt[4]{z}}$, wodurch sich bestimmt

für $z = 40$	50	60	70	80	90	100 Fuß,
$\frac{d_1}{d} = 0{,}121$	0,115	0,110	0,105	0,102	0,0990	0,0965.

Wenn der Wasserstrahl unter dem Winkel α aufsteigt, so ist die größte Steighöhe $z_1 = z \sin. \alpha$ (s. §. 2, S. 331).

Der gewöhnliche Kolbendurchmesser ist bei Tragspritzen $3\frac{1}{2}$ bis 4 Zoll und bei Fahrspritzen 6 bis 8 Zoll, folglich die Mündungsweite, bei den ersteren $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{2}$, und bei den letzteren $\frac{3}{5}$ bis 1 Zoll.

Das pro Minute ausgetriebene Wasserquantum ist

$$60\, Q_1 = 60 \, . \, 0{,}85\, Fv = 51\, Fv = 1{,}7\, Fns.$$

Der Fassungsraum des Windkessels ist 5= bis 6mal so groß zu machen als der Pumpenraum $V = Fs$.

Das Mundstück ist 6 bis 8 Zoll lang, hat an der Stelle, wo es angeschraubt wird, 1 bis $1\frac{1}{2}$ Zoll Weite und verengt sich ganz allmälig bis zur gefundenen Weite d_1. Die Weite der Saugröhren, sowie auch die der Schläuche ist $1\frac{1}{2}$ bis 3 Zoll und die des Standrohres $1\frac{1}{2}$ bis 2 Zoll.

Wenn eine Wasserkunst durch eine rotirende Umtriebsmaschine in Bewegung gesetzt werden soll, so ist ein Krummzapfenmechanismus anzuwenden, durch welchen die stetige Kreisbewegung der Kraftmaschine in die absetzende geradlinige Bewegung der Pumpen verwandelt wird. Noch ist in der Regel ein Hebel, ein sogenannter Balancier oder ein Kunstkreuz einzuschalten, welcher einerseits vom Pumpengestänge und andererseits von der Kurbelstange ergriffen wird. Bei Anwendung eines einzigen Gestänges ist zur Ausgleichung der Last ein Gegengewicht hinzuzufügen (s. §. 104, S. 653); bei zwei Gestängen von gleicher Belastung ist eine Ausgleichung nicht nöthig, wenn dieselben so an die Umtriebsmaschine angeschlossen sind, daß sie abwechselnd auf= und niedergehen. Wenn die Kunst die Wassermengen $Q_1, Q_2 \ldots$ auf die Höhen $h_1, h_2 \ldots$ fördert, so ist bei dem Wirkungsgrade η_1, die erforderliche mechanische Arbeit:

$$L = \frac{(Q_1 h_1 + Q_2 h_2 + \ldots)\gamma}{\eta_1} = \mu \frac{ns}{60} \frac{(F_1 h_1 + F_2 h_2 + \ldots)\gamma}{\eta_1},$$

oder $\eta_1 = 0{,}70$ und $\mu = 0{,}85$ angenommen,

$L = 88{,}2\,(Q_1 h_1 + Q_2 h_2 + \cdots) = 1{,}25\,n\,s\,(F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots)$ Fußpfd., während bei gehöriger Ausgleichung die mittlere Gestängkraft

$$P_1 = \frac{\mu\gamma}{\eta_1}(F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots) = 37{,}31\,(F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots)$$

Pfund ausfällt.

Bei Verwendung einer Wasserkraft zum Umtrieb der Wasserkunst ist auch $L = \eta\, Q\, h\, \gamma$ zu setzen, wenn Q das Aufschlagquantum, h das Gefälle und η den Wirkungsgrad des Wasserrades bezeichnet, folglich hat man

$$\eta\,\eta_1\, Q h = Q_1 h_1 + Q_2 h_2 + \cdots,$$

wonach dann

$$Q = \frac{Q_1 h_1 + Q_2 h_2 + \cdots}{\eta\,\eta_1\, h},$$

z. B. für $\eta = 0{,}75$ und $\eta_1 = 0{,}70$,

$$Q = \frac{Q_1 h_1 + Q_2 h_2 + \cdots}{0{,}525\, h} = 1{,}90\,\frac{Q_1 h_1 + Q_2 h_2 + \cdots}{h}$$

folgt.

Besteht die Umtriebsmaschine in einem verticalen Wasserrade, so ist die Anzahl n der Pumpenspiele auch zugleich die Umdrehungszahl u des Wasserrades. Bei Turbinenkünsten ist dagegen u in der Regel viel größer als n, und daher die Anwendung von Zahnradvorgelegen erforderlich. Ist z. B. die Spielzahl $n = \frac{30\, v}{s} = 8$, und die Umdrehungszahl der Turbine, $u = 96$, so fällt die erforderliche Umsetzungszahl $\psi = \frac{n}{u} = 1/12$ aus, und es sind zwei Zahnradvorgelege nöthig, wovon das eine etwa im Verhältnisse $\psi_1 = 1/4$ und das andere im Verhältnisse $\psi_2 = 1/3$ umsetzt.

Bei Anwendung der **Windkraft** ist ebenfalls eine Umsetzung nöthig; macht z. B. die Windradwelle, $u = 15$ Umdrehungen pro Min., so kann man ein Zahnradvorgelege mit dem Umsetzungsverhältnisse $\psi = 1/3$ bis $1/2$ anwenden. Bei **Roßkünsten** findet das Gegentheil statt; die Umdrehungszahl der Göpelwelle ist $u = 1$ bis 2 und muß daher durch ein Vorgelege im Verhältnisse $\psi = 4/1$ bis $5/1$ vergrößert werden.

Es ist hier $L = mKc = m \cdot 112 \cdot 4 = 448\,m$ Fußpfund zu setzen, wenn m die Anzahl der angespannten Pferde bezeichnet, z. B. für $m = 2$, folgt $Q_1 h_1 + Q_2 h_2 + \cdots = 10$ Fußcubikfuß. (S. §. 59.)

Bei **Wassersäulenkünsten** findet in der Regel gar keine Umsetzung statt. Es ist daher hier bei dem Gefälle h die erforderliche Treibekolbenfläche:

$$F = \frac{F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots}{\eta\,\eta_1\, h} = 1{,}90\,\frac{(F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots)}{h},$$

wenn man, wie oben, den Wirkungsgrad $\eta\,\eta_1$ der ganzen

Maschine = 0,525 setzt. Läßt man die Maschine direct wirken, so hat man zur Ausgleichung der Kräfte ein Gegengewicht anzubringen, welches dem Aufgange des Gestänges mit der Kraft R = Stangengewicht G minus Kraft P_2 zum Ansaugen oder Niederdrücken der Pumpenkolben zu Hülfe kommt; wirkt dagegen die Maschine indirect, so ist ein Gegengewicht erforderlich, welches den Niedergang des Gestänges mit der Kraft R = Kraft P_1 zum Empordrücken der Kolben minus Gewicht G des Gestänges unterstützt. Die letztere Wirkungsweise ist besonders dann die vorzüglichere, wenn die Pumpen nicht immer voll heben, und daher Luft mit empor fördern, weil dann die stoßende Masse kleiner ist als im ersteren Falle.

Einfache Pumpen oder kleinere Pumpenwerke werden durch doppeltwirkende Dampfmaschinen mittels Kurbelmechanismen in Bewegung gesetzt; größere Pumpen dagegen durch einfachwirkende Dampfmaschinen und zwar entweder direct oder mittels eines Balanciers.

Bei den direct hebenden Wasserhaltungsmaschinen hat der Dampfkolben mit den Pumpen eine gemeinschaftliche Geschwindigkeit, welche im Mittel 2 bis 3 Fuß beträgt; bei den Wasserhaltungsmaschinen mit Balancier hat dagegen, wenn man das Verhältniß der Länge b des Lastarmes zur Länge a des Kraftarmes $^3/_4$ macht, der Dampfkolben die gewöhnliche mittlere Geschwindigkeit $v = 3$ bis 4 Fuß.

Bei der Anwendung von Watt'schen Maschinen ist der Dampfdruck $p = 1{,}1$ Atmosphären und die Expansion 2- bis 3fach; bei der von Corni'schen Maschinen dagegen ist $p = 3$ bis 5 Atmosphären und die Expansion eine 3- bis 8fache.

Ist p_0 der Dampfdruck im Kessel, q_0 der Gegendruck im Condensator, $\varepsilon = \frac{s_1}{s}$ das Expansionsverhältniß und η der Wirkungsgrad der Dampfmaschine, so hat man die erforderliche Größe der Dampfkolbenfläche bei einer direct wirkenden Dampfkunst oder einer Balanciermaschine mit gleichen Armen $b = a$,

$$F = \frac{\mu \varepsilon \gamma (F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots)}{\eta \eta_1 p_0 \left(1 + Ln.\, \varepsilon - \frac{\varepsilon q_0}{p_0}\right)}.$$

Bei einer Balanciermaschine mit ungleichen Armen ist die Größe der Kolbenfläche $= \frac{b}{a} F$.

Das erforderliche Dampfquantum ist $Q = \frac{Fv}{2\varepsilon} = \frac{nsF}{60}$, wo s den Kolbenhub vor Eintritt der Expansion bezeichnet.

Damit von der Dampfkraft der größte Nutzen gezogen werde, muß das Expansionsverhältniß $\varepsilon = 0{,}70 \frac{p_0}{q_0}$ bis $0{,}75 \frac{p_0}{q_0}$ in Anwendung gebracht werden. Es ist von Vortheil, das

Gleichgewichtsventil zu schließen, wenn der Dampfkolben bei seinem Rückgange den vorzüglich von der Höhe σ des schädlichen Raumes abhängigen Weg $s_2 = s_1 - \sigma (\varepsilon - 1)$ gemacht hat, weil dann der Dampf bei Eröffnung des Admissionsventiles schon die volle Kraft p hat.

Für den hydraulischen Widder hat man nach Eytelwein, wenn Q das unten abfließende Betriebswasserquantum, Q_1 das oben ausfließende Hubwasserquantum, h die von der Oberfläche des Aufschlagwassers bis Mitte der Mündung des Sperrventiles zu messende Fallhöhe und h_1 die von jener Oberfläche bis Ausmündung des Steigrohres zu messende Steighöhe bezeichnet, und wofern $\frac{h_1}{h}$ innerhalb 1 und 20 liegt, den Wirkungsgrad annähernd

$$\eta = \frac{Q_1 h_1}{Q h} = 1{,}12 - 0{,}2 \sqrt{\frac{h_1}{h}} \text{ zu setzen.}$$

Es ist hiernach für

$\frac{h_1}{h} = 1$	2	4	8	12	16	20
$\eta = 0{,}92$	0,84	0,72	0,56	0,43	0,32	0,23

also der Wirkungsgrad um so kleiner, je höher das Wasser steigen muß. Es ist zweckmäßig, die beiden Ventile des Stoßhebers möglichst leicht zu machen und sie einander möglichst nahe zu legen. Die Weite der Leitröhre ist $d = \frac{\sqrt{60(Q + Q_1)}}{21}$ Zoll, wo Q und Q_1 in Cubikzollen auszudrücken sind; die Weite der Mündung des Sperrventiles soll man eben so groß machen; das Steigrohr und die Mündung des Steigventiles kann man halb so weit machen als die Leitröhre. Den Inhalt des Windkessels soll man dem der Leitröhre gleich machen. Die Länge der Leitröhre in Fußen ist = der Länge der Steigröhre $+ \frac{2h_1}{h}$ zu nehmen.

§. 112. Fortschaffen, Comprimiren und Ausdehnen der Luft durch Gebläse u. s. w. Ist der Niveauunterschied zwischen den Ausmündungen eines Luftcanales, in welchem die mittlere Temperatur $= t_1$ mißt, $= h$, während sie außen $= t$ beträgt, ist ferner l die Länge dieses Canals, p der mittlere Umfang, sowie F der mittlere Inhalt seines Querprofils, und F_1 der Inhalt des Querschnitts der Ausmündung, so läßt sich die mittlere Ausströmungsgeschwindigkeit

$$v_1 = 0{,}0606 \sqrt{\frac{(t_1 - t) \cdot 2gh}{1 + \left(\zeta_0 + \zeta_1 \frac{pl}{F}\right)\left(\frac{F_1}{F}\right)^2}}$$

$$= 0{,}479 \sqrt{\frac{(t_1 - t)\, h}{1 + \left(\zeta_0 + \zeta_1 \frac{pl}{F}\right)\left(\frac{F_1}{F}\right)^2}} \text{ Fuß setzen.}$$

Der Reibungscoefficient ζ_1 ist $= 0{,}008$ anzunehmen, wogegen der Widerstandscoefficient ζ_0 nach der Stärke und Anzahl der Querschnitts- und Richtungsänderungen sehr verschieden ausfällt, übrigens aber wie beim Wasser angenommen werden muß.

Für eine gerade Canalstrecke von überall gleichem Querschnitte ist

$$v_1 = 0{,}479 \sqrt{\frac{(t_1 - t)\, h}{1 + \left(0{,}5 + 0{,}008 \frac{pl}{F}\right)\left(\frac{F_1}{F}\right)^2}} \text{ Fuß.}$$

Das ausströmende Luftquantum pro Sec. ist $Q_1 = \alpha F_1 v_1$, wo α den Contractionscoefficienten bezeichnet.

Auf die Temperatur der äußeren Luft reducirt, ist diese Luftmenge

$$Q = \left(\frac{1 + 0{,}00367\, t}{1 + 0{,}00367\, t_1}\right) Q_1.$$

Aus Q_1 läßt sich der erforderliche Querschnitt F_1 mittels der Formel $F_1 = \frac{Q_1}{\alpha v_1}$ berechnen.

Ist z. B. die mittlere Temperatur in einer quadratischen Lüftungsesse von $b = 1$ Fuß Weite und 36 Fuß Höhe, $t_1 = 30^0$, während die äußere Luft die Temperatur $t = 10^0$ mißt, so läßt sich die mittlere Geschwindigkeit der ausströmenden Luft:

$$v_1 = v = 0{,}479 \sqrt{\frac{20 \cdot 36}{1{,}5 + 0{,}008 \cdot \frac{4 \cdot 36}{1}}}$$

$$= 0{,}479 \sqrt{\frac{720}{2{,}652}} = 7{,}89 \text{ Fuß setzen,}$$

wonach das entsprechende Luftquantum pro Sec.

$$Q_1 = b^2 \cdot v = 1 \cdot v = 7{,}89 \text{ Cubikfuß,}$$

oder auf die äußere Temperatur reducirt,

$$Q = \frac{1{,}0367}{1{,}1101}\, Q_1 = 7{,}37 \text{ Cubikfuß,}$$

oder pro Stunde, $3600\, Q = 26532$ Cubikfuß folgt. Wenn nun ein Mensch im geschlossenen Raume stündlich 200 Cubikfuß frische Luft zum Athmen nöthig hat, so folgt, daß $\frac{26532}{200} = 133$ Menschen durch diese Lüftungsesse hinlänglich mit Luft versorgt werden.

Kolbengebläse. Zur Construction eines Gebläses muß gegeben sein: das zu liefernde Windquantum Q_1 pro Sec. und die erforderliche Windpressung oder der Manometerstand h der comprimirten Luft. (Siehe den folgenden Abschnitt.) Mißt man den Ueberdruck $p = p_1 - p_0$ des inneren Luftdruckes p_1 über dem äußeren Luftdruck p_0 durch eine Wassersäule von der Höhe h Zoll, so hat man $p = 0{,}0358\, h$ Pfd., sowie umgekehrt, $h = 27{,}93\, p$ Zoll, drückt dagegen h die Höhe einer Quecksilbersäule aus, so hat man

$$p = 0{,}4862\, h \text{ Pfd., und } h = 2{,}057\, p \text{ Zoll.}$$

Bezeichnet bei einem doppelt wirkenden Gebläse F den Inhalt einer Kolbenfläche, s den Kolbenhub, n_1 die Anzahl der Gebläsecylinder und n die Anzahl der Spiele eines Kolbens pro Minute, so ist zu setzen:

$$Q_1 = \mu \frac{n\, n_1 F s}{30},$$

und je nach der Güte des Gebläses, der Coefficient $\mu = 0{,}60$ bis $0{,}75$ einzuführen.

Auch ist $\frac{ns}{30} = v$, daher $Q_1 = \mu n_1 F v$ und die nöthige Kolbenfläche

$$F = \frac{Q_1}{\mu n_1 v}, \text{ oder } \mu = 0{,}70 \text{ angenommen,}$$

$$F = {}^{10}/_{7}\, \frac{Q_1}{n_1 v}, \text{ wonach der Kolbendurchmesser}$$

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = 1{,}128 \sqrt{\frac{Q_1}{\mu n_1 v}} = 1{,}35 \sqrt{\frac{Q_1}{n_1 v}} \text{ Fuß}$$

$$= 16{,}2 \sqrt{\frac{Q_1}{n_1 v}} \text{ Zoll folgt.}$$

Wirken die Kolben nur **einfach**, so erhalten sie natürlich die doppelte Fläche, also

$$F = \frac{2\, Q_1}{\mu n_1 v} = {}^{20}/_{7}\, \frac{Q_1}{n_1 v}, \text{ wonach sich}$$

$$d = 1{,}596 \sqrt{\frac{Q_1}{\mu n_1 v}} = 1{,}909 \sqrt{\frac{Q_1}{n_1 v}} \text{ Fuß}$$

$$= 22{,}91 \sqrt{\frac{Q_1}{n_1 v}} \text{ Zoll ergiebt.}$$

Ist, wie bei **Balgen**, die Kolbenfläche trapezoidal und besteht die Bewegung derselben in einer Axendrehung, so hat man

$$F = (b_1 + b_2)\, \frac{l}{2} \text{ und } s = \beta \left[\left(\frac{2b_1 + b_2}{b_1 + b_2}\right) \frac{l}{3} + e\right]$$

zu setzen, wobei l die Länge oder Höhe, b_1 die größere und b_2 die kleinere Breite der Fläche, sowie e den Abstand der kleineren Breite von der Umdrehungsaxe und β das Bogenmaß $0{,}01745\,\beta^0$ des Winkels β^0 bezeichnet, um welchen sich die Kolbenfläche bei jedem Hube dreht.

Der Hub eines Cylindergebläses ist $s = {}^3/_4 d$ bis ${}^5/_4 d$, gewöhnlich $= d$, der eines Balgens hingegen: $s = \frac{l}{8}$ bis $\frac{l}{5}$. Die mittlere Kolbengeschwindigkeit v ist bei gewöhnlichen Ventilgebläsen, $1^1/_2$ bis 3 Fuß, bei solchen mit großen Ventilöffnungen und weiten Leitungsröhren, $3^1/_2$ bis $4^1/_2$ Fuß, bei Schiebergebläsen aber 6 bis 10 Fuß. Die Ventilgebläse machen pro Minute 12 bis 30 Spiele, die Schiebergebläse hingegen 40 bis 70. Letztere gestatten nur eine mäßige Pressung, sind demnach zur Erzeugung von Wind für Eisenhohöfen nicht geeignet.

Bei langsam gehenden Ventilgebläsen ist die Größe der Saugventilmündungen, $F_1 = \frac{F}{15}$ bis $\frac{F}{12}$; bei solchen mit mittlerer Geschwindigkeit, $F_1 = \frac{F}{10}$ bis $\frac{F}{6}$, und bei sehr schnell gehenden Gebläsen sogar $F_1 = \frac{F}{5}$ bis $\frac{F}{2}$.

Die Querschnitte F_2 der Druckventilmündungen sind in der Regel nur halb so groß als die der Saugmündungen. Man mache die Ventile mehr lang als breit, gestatte ihnen einen Ausschlag von 20 Grad und gebe ihnen einen Anschlag von $^1/_2$ bis $^3/_4$ Zoll. Bei Schiebergebläsen erhalten die Windcanäle zu Einsaugen und Ausblasen den Querschnitt $F_1 = \frac{F}{10}$ bis $\frac{F}{6}$.

Die mittlere Geschwindigkeit des Windes in einer Windleitung ist, je nach der kleineren oder größeren Länge derselben, $=$ 70 bis 35 Fuß, daher der Querschnitt derselben bei der durchzuführenden Windmenge Q, $F_0 = \frac{Q}{70}$ bis $\frac{Q}{35} = 0{,}01\, n_1 F v$ bis $0{,}02\, n_1 F v$, z. B. für $v = 4$ Fuß, $F_0 = {}^1/_{25}\, n_1 F$ bis ${}^2/_{25}\, n_1 F$. Es ist hierbei n_1 die Anzahl der gleichzeitig blasenden Gebläsekolben, daher z. B. für $n_1 = 2$, $F_0 = 0{,}08\,F$ bis $0{,}16\,F$. Kurze Windleitungen erhalten auch wohl mit den Blasemündungen einen gleichen Querschnitt, also $F_0 = n_1 F_2$.

Bei Anwendung von erhitzter Gebläseluft, von der Temperatur τ, muß man den Querschnitt F_0 der Windleitung $(1 + 0{,}00367\,\tau)$ mal so groß machen, als bei der unerwärmten Luft.

Zur Erhitzung der Luftmenge Q Cubikfuß pro Secunde auf 300 Grad ist die Heizfläche $S = 15\,Q$ bis $20\,Q$ Quadratfuß, und das Steinkohlenquantum $K = 0{,}00253\,Q$ oder Holzquantum $K = 0{,}00506\,Q$ Pfd. nöthig.

Der Fassungsraum eines starren Windregulators ist bei der Pressungsvariation $\delta = {}^1/_{20}$, wenn er den Wind eines doppeltwirkenden oder von zwei einfachwirkenden Cylindern auf-

nimmt, $W = 4{,}21 \cdot \frac{b}{h} V$, und wenn er dagegen zur Aufnahme des Windes von zwei doppeltwirkenden Maschinen dient: $W = 0{,}85 \, \frac{b}{h} \, V$, wobei V den Cylinderraum bezeichnet.

Wäre z. B. die Windpressung oder der Ueberdruck h ein Zehntel des äußeren Luftdruckes, so hätte man im ersten Falle, $W = 42{,}1 \, V$, und im zweiten, $W = 8{,}5 \, V$.

Den Fassungsraum eines Wasserregulators macht man im ersteren Falle gewöhnlich $10 \, V$ bis $12 \, V$, den eines schwimmenden Glockenregulators dagegen nur $3 \, V$.

Nach den in §. 46, S. 454, gegebenen Formeln ist der dem Manometerstande h_1, dem Barometerstande b und der Temperatur $\tau = 10$ Grad entsprechende Querschnitt der Düsenöffnung, welche die Windmenge Q_1 (gemessen unter dem äußeren Drucke) liefert,

$$F_1 = \frac{Q_1}{8{,}2} \sqrt{\frac{b}{h_1}} = 0{,}122 \, Q_1 \sqrt{\frac{b}{h_1}} \text{ Quadratzoll.}$$

Strömt der Wind durch n Kreisöffnungen, so hat man den Durchmesser derselben

$$d_1 = 0{,}1376 \sqrt{\frac{Q_1}{n} \sqrt{\frac{b}{h_1}}} \text{ Zoll.}$$

Z. B. für $Q_1 = 48$, $n = 2$ und $\frac{h_1}{b} = \frac{1}{9}$,

$$d_1 = 0{,}1376 \sqrt{24 \sqrt{9}} = 0{,}1376 \sqrt{72} = 1{,}17 \text{ Zoll.}$$

Hierbei mißt h den Druck des stillstehenden oder verhältnißmäßig nur langsam ausströmenden Windes in der Nähe der Ausströmungsöffnung; giebt dagegen h die Pressung des Windes am Anfange einer Windleitung von der Länge l und Weite d an, so hat man

$$F_1 = 0{,}112 \, Q_1 \sqrt{\left[1{,}18 + 0{,}025 \, \frac{l}{d} \left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right] \frac{b}{h_1}} \; \square\text{Zoll,}$$

und daher

$$d_1 = 0{,}126 \sqrt{\frac{Q_1}{n} \sqrt{\left[1{,}18 + 0{,}025 \, \frac{l}{d} \left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right] \frac{b}{h_1}}} \text{ Zoll}$$

zu setzen.

Bei Anwendung von erhitzter Gebläseluft von der Temperatur τ hat man den angegebenen Werth für F_1 noch mit $0{,}98 \sqrt{1 + 0{,}004 \tau}$, also den für d_1 mit $0{,}99 \sqrt[4]{1 + 0{,}004 \tau}$, annähernd $= 99 (1 + 0{,}001 \tau)$ zu multipliciren, vorausgesetzt, daß Q_1 bei der mittleren Temperatur von 10 Grad und unter dem äußeren Luftdrucke gemessen wird.

Die erforderliche Leistung zum Betriebe eines Gebläses ist:

$$L = \left[1 - 0{,}352\left(\frac{h}{b}\right) + 0{,}200\left(\frac{h}{b}\right)^2\right]\frac{Q_1 h_1 \gamma}{\eta}$$
$$= \psi\,\frac{Q_1 h_1 \gamma_1}{\eta} \text{ Fußpfd.,}$$

wo γ_1 die Dichtigkeit der Manometerfüllung und η den Wirkungsgrad der Maschine bezeichnet, welcher, wenn $Q = \frac{n F s}{60}$ das theoretische Windquantum bezeichnet, $= 0{,}70$ bis $0{,}75$, dagegen, wenn $Q_1 = \mu\, Q$, das effective Windquantum angiebt, nur $= 0{,}45$ bis 60 anzunehmen ist.

Der Factor $\psi = 1 - 0{,}352\left(\frac{h_1}{b}\right) + 0{,}200\left(\frac{h_1}{b}\right)^2$ ist für

$\frac{h_1}{b} = 0{,}01$	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
$\psi = 0{,}996$	0,993	0,989	0,986	0,983	0,980	0,976	0,973	0,970	0,967

Nimmt man $\eta = 0{,}5$ an, so erhält man, je nachdem h Zoll die Höhe einer Wassersäule, oder die einer Quecksilbersäule angiebt:

1.) $L = 10{,}29\,\psi\, Q_1 h_1$ Fußpfd. $= 0{,}0213\, Q_1 h_1$ Pferdekräfte, oder

2.) $L = 140\,\psi\, Q_1 h_1$ » $= 0{,}2917\, Q_1 h_1$ »

Bei der mittleren Kolbengeschwindigkeit $v = 3$ Fuß, und dem Kolbenhube $s = 3$ bis 6 Fuß, ist die Umdrehungszahl der Kurbelwelle, welche die Gebläsekolben in Bewegung setzt, $u = 30$ bis 15, und daher der directe Umtrieb eines solchen Gebläses durch ein verticales Wasserrad, welches nur 5 bis 10 Umdrehungen pro Minute macht, nicht möglich. Es ist deshalb hier ein Radvorgelege mit dem Umsetzungsverhältniß $\psi = \frac{n_1}{n_2} = 3$ bis 6 nöthig. Anders ist es beim Umtrieb durch eine Turbine, deren Umdrehungszahl u in der Regel viel größer als 30 ausfällt. Hier hat man im umgekehrten Sinne umzusetzen, wobei das Umsetzungsverhältniß ein ächter Bruch ist. Macht z. B. die Turbinenwelle pro Minute 100 Umdrehungen, und die Gebläsewelle deren nur 20, so ist $\psi = {}^{20}/_{100} = {}^{1}/_{5}$ herzustellen. Bei sehr großen Gefällen ist die Umdrehungszahl der Turbine so groß, daß ein doppeltes Vorgelege nöthig wird. Bei Kolbengebläsen, welche durch die Dampfkraft in Umtrieb gesetzt werden, ist die directe Uebertragung der Dampfkraft auf die Gebläsekolben anwendbar, weil beide Maschinen ohne Nachtheil mit einer und derselben Geschwindigkeit arbeiten können;

zumal wenn das Gebläse sehr große Ein- und Austrittsöffnungen erhält, oder wenn das Gebläse ein Schiebergebläse ist. Um die veränderliche Kraft und Last eines solchen directwirkenden Dampfgebläses möglichst auszugleichen, ist jedoch noch an die Kolbenstange desselben ein Schwungrad mittels des Kurbelmechanismus anzuschließen.

Um den Dampf- und Gebläsecylinder nicht hinter einander legen oder über einander stellen zu müssen, interpolirt man auch wohl einen Balancier; auch läßt man dann wohl das Schwungrad ganz weg, und versieht die Dampfmaschine, wie bei einer Dampfkunst, mit Gewichtssteuerung.

Um die Ventilgebläse vortheilhafter arbeiten lassen zu können, wendet man jedoch auch ein Radvorgelege an, wodurch die mittlere Kolbengeschwindigkeit der Dampfmaschine nach Befinden zur Hälfte oder zum dritten Theil auf den Gebläsekolben übergetragen wird.

Wird eine Wasserkraft zum Umtrieb eines Gebläses verwendet, so hat man das nöthige Aufschlagquantum

$$Q = \frac{\psi Q_1 h_1 \gamma_1}{\eta \eta_1 h \gamma} \text{ zu setzen,}$$

wobei h das Gefälle, γ die Dichtigkeit des Wassers und $\eta \eta_1$ den Wirkungsgrad der ganzen Maschine bezeichnet.

Ist h_1 der Wassermanometerstand, so hat man einfach

$$Q = \frac{\psi Q_1 h_1}{\eta \eta_1 h}, \text{ z. B. } \frac{\psi}{\eta \eta_1} = {}^{10}/_{4} \text{ gesetzt, } Q = 2{,}5\, Q_1 \frac{h_1}{h},$$

oder wenn man h_1 in Zollen und h in Fußen ausdrückt:

$$Q = 0{,}208 \frac{Q_1 h_1}{h}.$$

Bei Anwendung der Dampfkraft zum Betriebe eines Gebläses hat man aus L, nach der ersten Formel auf S. 566, das Dampfquantum Q zu berechnen, wonach sich dann die Dimensionen u. s. w. der Dampfmaschine bestimmen lassen.

Bei dem dreiarmigen Wetterrade oder Ventilator von Fabry ist die effective Windmenge pro Secunde:

$$Q = 0{,}7\,(\pi r_1^2 - 3{,}428 r_2^2) \frac{ue}{30} \text{ zu setzen,}$$

wobei r_1 den äußeren, r_2 den inneren Radhalbmesser, e die Radweite und u die Umdrehungszahl des Rades pro Minute bezeichnen.

Der Manometerstand oder die Differenz des inneren und äußeren Luftdruckes ist hier $h_1 = 1^1/_2$ bis 2 Zoll Wassersäule.

Der Centrifugalventilator oder Schaufelventilator dient entweder als Bläser, namentlich beim Betrieb von Kupolöfen und Schmiedefeuern, oder als Sauger, und zwar als Wetterrad, zur Erzeugung des Luft- oder Wetterzuges in Tage- und Grubengebäuden. Für beide ist annähernd die Umfangsge-

schwindigkeit $v = \sqrt{2g\varepsilon h_1} = 64{,}5\sqrt{h_1}$, wo h_1 Zoll die Wassermanometerhöhe bezeichnet.

Die gewöhnlichen Blaseventilatoren erzeugen Wind von $h_1 = 6$ bis 18 Zoll Wasser- oder $\frac{1}{2}$ bis $1\frac{1}{2}$ Zoll Quecksilbersäule, wobei sie mit der Geschwindigkeit $v = 160$ bis 275 Fuß umlaufen. Der gewöhnliche Durchmesser derselben beträgt $2r = 3$ bis 4 Fuß, und die entsprechende Umdrehungszahl

$$u = 9{,}55\,\frac{v}{r} = 750 \text{ bis } 1750.$$

Die Ausflußgeschwindigkeit c ist der Umdrehungsgeschwindigkeit v gleich zu setzen, und die erzeugte Windmenge $Q = 8$ bis 16 Cubikfuß anzunehmen; daher der erforderliche Querschnitt der Düsenöffnung:

$$F = \frac{Q}{c} = \frac{Q}{v} = 4{,}2 \text{ bis } 14{,}4 \text{ Quadratzoll.}$$

Der innere Radhalbmesser r_1 ist gleich der Radweite $e, = \frac{r}{3}$, d. i. ein Drittel des äußeren Radhalbmessers r. Die mittlere Einströmungsgeschwindigkeit $v_0 = 0{,}03\,v$ gesetzt, folgt auch

$$Q = 2\pi\left(\frac{r}{3}\right)^2 v_0 = 0{,}0209\,r^2 v,$$

und daher der erforderliche Radhalbmesser

$$r = 6{,}9\sqrt{\frac{Q}{v}} \text{ Fuß} = 83\sqrt{\frac{Q}{v}} \text{ Zoll},$$

z. B. für $Q = 12$ Cubikfuß und $v = 240$ Fuß, ist $r = 1{,}55$ Fuß $= 18{,}6$ Zoll, und $r_1 = e = \frac{r}{3} = 6{,}2$ Zoll. Die Anzahl der Schaufeln oder Flügel beträgt 4 bis 6.

Der Arbeitsaufwand zum Betrieb des Ventilators ist

$$L = \frac{v^2}{g}\,\frac{Q_1\gamma_1}{\eta} = \frac{Q_1 h_1 \gamma_1}{2\eta} = {}^{10}\!/_{3}\, Q_1 h_1 \gamma_1$$

$$= 17{,}15\, Q_1 h_1 \text{ Fußpfund} = 0{,}0357\, Q_1 h_1 \text{ Pferdekräfte}$$

zu setzen. Z. B. für $Q = 12$ Cubikfuß und $h_1 = 12$ Zoll,

$$L = 0{,}0357 \,.\, 144 = 5{,}14 \text{ Pferdekräfte.}$$

Gewöhnlich rechnet man $L = 4$ bis 10 Pferdekräfte.

Bei Wetterrädern oder Saugventilatoren ist die Pressungsdifferenz oder der Manometerstand der zuströmenden Luft $h = -1{,}25$ bis 3,50 Zoll Wassersäule, wobei dieselben mit der Geschwindigkeit $v = 72$ bis 102 Fuß umlaufen. Der gewöhnliche Durchmesser dieser Räder ist $2r = 4$ bis 8 Fuß, folglich die entsprechende Umdrehungszahl $u = 172$ bis 485. Die abzuführende Luftmenge beträgt gewöhnlich $Q = 120$ bis 250 Cubikfuß. Der innere Radhalbmesser ist hier $r_1 = \frac{1}{2}r = e$, und die Einströmungsgeschwindigkeit $v_0 = 0{,}2\,v$ weshalb hier noch

$$Q = 2\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 v_0 = 0{,}314\, r^2 v$$

und daher der erforderliche Radhalbmesser

$$r = 1{,}78 \sqrt{\frac{Q}{v}} \text{ Fuß} = 21{,}4 \sqrt{\frac{Q}{v}} \text{ Zoll},$$

z. B. für $Q = 192$ Kbfß. und $v = 96$ Fuß folgt. $r = 21{,}4 \sqrt{2} = 30{,}3$ Zoll. Der Arbeitsaufwand ist auch hier $L = {}^{10}/_{3}\, Q_1 h_1 \gamma = 17{,}15\, Q_1 h_1$ Fußpfd. $= 0{,}0357\, Q_1 h_1$ Pferdekräfte zu setzen, wonach für $Q_1 = 192$ Kbfß. und $h_1 = 1$ Zoll, $L_1 = 0{,}0357 \cdot 192 = 6{,}9$ Pferdekräfte folgt. Gewöhnlich rechnet man 8 bis 16 Pferdekräfte.

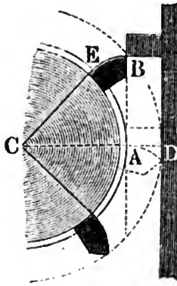
Es ist zweckmäßig, die Ventilatoren wie die Turbinen mit einem Diffuser zu versehen, dessen Schaufeln bei den Bläsern nahe tangential, und dagegen bei den Saugern radial auslaufen.

In neueren Zeiten wendet man auch mehrfach Ventilatoren mit 1000 bis 5000 Umdrehungen an, die der Formel $r = 9{,}55 \dfrac{v}{u}$ zufolge sehr kleine Durchmesser erhalten. Es gehören hierher die krummschaufeligen Silent-Fans von Schiele.

§. 113. Pochwerke. Bei den Erzpochwerken ist ein Pochstempel 10 bis 15 Fuß lang, 7 bis 8 Zoll breit und 5 bis 6 Zoll dick, und die Beschuhung desselben besteht in einem Stück Schmiedeeisen von 8 bis 10 Zoll Länge, mit einem gleich langen Zapfen oder Kiele. Der Holzstempel wiegt 125 bis 175 Pfund, und das Pocheisen 75 bis 125 Pfd., folglich der ganze Stempel 200 bis 300 Pfd. Der Stempelhub ist $h = 6$ bis 15 Zoll, und die Anzahl der Anhübe eines Stempels pro Minute, $n = 40$ bis 60.

Die Oelmühlenstampfer sind 9 bis 12 Fuß lang, 5 bis 6 Zoll breit und 4 bis 5 Zoll dick; sie wiegen sammt ihren gußeisernen Schuhen je 100 bis 150 Pfd., und werden pro Minute 35 bis 50mal, 16 bis 20 Zoll hoch angehoben. Die Stampfer in den Pulvermühlen sind 9 bis 12 Fuß lang, $3^1/_2$ Zoll breit und 3 Zoll dick, wiegen sammt den messingenen Fußbeschlägen je nur 60 bis 70 Pfd., und machen ebenfalls in der Minute 35 bis 50 Anhübe von 16 bis 20 Zoll Höhe. Die Heblinge in der Pochwelle, welche die Stempel emporheben, sind nach der Kreisevolvente zu construiren (s. Geometrie §. 13, S. 180). Der Anhub beginnt in einem Punkte A, Fig. 486, welcher mit der Axe C in gleicher Höhe liegt; bei dem mechanischen Halbmesser $CA = r$ und dem Hube $AB = h$, ist der Centriwinkel

Fig. 486.



$$ACE = \alpha = 180^0 \frac{h}{\pi r} = 57^0{,}3 \frac{h}{r},$$

die Bogenlänge BE, $s = \frac{h^2}{2r}$ und die Heblings- und Däumlingslänge, $d = \sqrt{r^2 + h^2} - r$, annähernd

$$= \frac{h^2}{2r}\left[1 - \left(\frac{h}{2r}\right)^2\right] = s\left(1 - \frac{s}{2r}\right).$$

Ist u die Umdrehungszahl der Welle pro Minute und n die Hübigkeit derselben, d. i. die Anzahl der Heblinge eines Stempels, oder die Anzahl der Anhübe desselben pro Umdrehung, so hat man die Zeit eines Stempelspieles: $t = \frac{60''}{nu}$.

Die Fallzeit eines Stempels ist aber $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, daher folgt die Zeit zum Anheben und Ruhen eines Stempels

$$t_2 = t - t_1 = \frac{60''}{nu} - \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{60''}{nu} - 0{,}253\sqrt{h},$$

und es ist das Verhältniß der Anzahl der gleichzeitig steigenden Stempel zur Anzahl aller Stempel:

$$\nu < 1 - \frac{nu}{60}\sqrt{\frac{2h}{g}}, \text{ d. i. } \nu < 1 - 0{,}0042 nu\sqrt{h}$$

zu machen.

Es ist höchstens $h = {}^5/_3$ Fuß und $nu = 60$, daher

$$\nu < 1 - 0{,}325, \text{ d. i. } \nu < 0{,}675,$$

der Sicherheit wegen verlangt man aber $\nu = {}^2/_3$, und macht deshalb den mechanischen Wellenhalbmesser

$$r = \frac{nh}{2\pi\nu} = {}^3/_4 \frac{nh}{\pi} = {}^1/_4\, nh.$$

Der physische Wellenhalbmesser ist gewöhnlich um 1 Zoll kleiner als r.

Um eine möglichst kleine Seitenreibung der Stempel in der Führung zu erhalten, muß die Däumlingslänge möglichst klein, also bei der gewöhnlichen Construction der Pochwerke, r, sowie auch n möglichst groß gemacht werden. Mechanisch vollkommen wäre es allerdings, diese Länge Null zu machen, d. i. den Stempel in seiner Axe ergreifen zu lassen; dieses würde aber ein Schlitzen des Heblings oder Däumlings erfordern.

Ist n_1 die Anzahl der Stempel eines Pochwerkes, so hat man die Anzahl der Heblinge in der Welle, $= nn_1$, und daher den Theilwinkel derselben: $\beta = \frac{360^0}{nn_1}$.

Die mechanische Leistung eines Pochwerkes ist:

$$L = \frac{nn_1 u}{60\eta}\, Gh,$$

wo G das Gewicht eines Stempels, und $\eta = 0{,}75$ bis $0{,}85$, den Wirkungsgrad des Pochwerkes bezeichnet. Setzt man $\eta = 0{,}75$, so erhält man

$$L = \frac{n n_1 u}{45} G h \text{ Fußpfd.} = 0{,}0000462\, n n_1 u\, G h \text{ Pferde-}$$

kräfte, z. B. für $nu = 50$, $L = 0{,}00231\, n_1\, G h$.

Ein Pochwerk mit $n_1 = 15$ Stempeln von je 250 Pfd. Gewicht erfordert z. B. bei dem Hube $h = 1$ Fuß, die mechanische Arbeit

$$L = 0{,}00231 \,.\, 15 \,.\, 250 = 8{,}66 \text{ Pferdekräfte.}$$

Die Umdrehungszahl der Heblingswelle ist $u = \frac{40}{n}$ bis $\frac{60}{n}$, und daher bei der Hübigkeit $n = 2$ bis 5, $u = 30$ bis 8; also größer als die eines gewöhnlichen verticalen Wasserrades. Deshalb ist beim Umtrieb durch ein solches Wasserrad nöthig, noch ein Zahnradvorgelege einzuschalten, wodurch die Umdrehungszahl des Wasserrades in eine größere umgesetzt wird.

Macht das Wasserrad $u_1 = 6$ Umdrehungen pro Minute, so ist das Umsetzungsverhältniß $\psi = \frac{u}{u_1} = {}^{30}/_{6} = 5$ bis ${}^{4}/_{3}$ in Anwendung zu bringen. Bei Anwendung einer Turbine findet das umgekehrte Verhältniß statt; diese macht vielleicht $u_1 = 60$ bis 180 Umdrehungen, daher ist hier $\psi = {}^{30}/_{60} = {}^{1}/_{2}$ bis ${}^{8}/_{180} = {}^{2}/_{45}$, und folglich vielleicht sogar ein doppeltes Radvorgelege erforderlich.

Bei einer kleinen Hübigkeit läßt sich die Heblingswelle mittels des einfachen Krummzapfenmechanismus einer Dampfmaschine direct in Umtrieb setzen, bei einer größeren Hübigkeit ist aber noch ein Radvorgelege nöthig, welches die Umdrehungszahl der Kurbelwelle vermindert.

Wird ein Pochwerk durch einen Göpel bewegt, so ist jedenfalls ein Vorgelege mit einem steigenden Umsetzungsverhältnisse anzuwenden.

Den Wirkungsgrad eines Wasserrades $\eta = 0{,}75$, angenommen, folgt bei dem Gefälle h_1 die nöthige Aufschlagwassermenge eines Pochwerkes von n_1 Stempeln mit dem Gewichte G und dem Hube h, wenn jeder Stempel pro Minute numal gehoben wird,

$$Q_1 = 0{,}000480\, n n_1 u \frac{G h}{h_1} \text{ Kubikfuß.}$$

Setzt man dagegen die Leistung der Dampfmaschine zum Umtrieb des Pochwerkes

$$L = 144 \,.\, \eta Q p_0 = 72\, Q p_0,$$

so erhält man bei der Dampfspannung p_0 pro Quadratzoll im Kessel, das erforderliche Dampfquantum

$$Q = 0{,}000309\, n n_1 u \frac{G h}{p_0} \text{ Kubikfuß.}$$

§. 114. Hammerwerke. Die Anzahl n der Schläge, welche ein Dampfhammer pro Minute bei der Hubhöhe h (Fuß) machen kann, ist

$$n = \frac{57}{0{,}2h + 0{,}253\sqrt{h}},$$

z. B. für $h =$	1	2	3	4	6 Fuß
$n =$	126	76	55	44	31

Gewöhnlich sind die Dampfhämmer 20 bis 180 Centner schwer, und machen bei einem Hube von 2 bis 4 Fuß, pro Minute 70 bis 50 Schläge, nach Befinden aber auch bei einem Hube von $\frac{1}{2}$ bis 1 Fuß, pro Minute 200 bis 80 Schläge. Der Dampf zum Heben des Hammers hat gewöhnlich 4 bis 5 Atmosphären Spannung. Um die Wirkung des Hammers beim Aufschlagen zu vergrößern, giebt man demselben noch Oberdampf.

Die Kolbenfläche des Dampfhammers vom Gewichte G ist bei dem Dampfdruck p und Gegendruck q Pfund:

$$F = \frac{G}{\eta(p-q)}, \text{ od.} = \frac{4}{3}\frac{G}{(p-q)}$$

zu setzen, wenn man noch den Wirkungsgrad $\eta = 0{,}75$ annimmt. Z. B. für $p - q = 5 - 1 = 4$ Atmosphären $= 4 . 14 =$ 56 Pfd., $F = \frac{1}{42}\,G$ Quadratzoll. Bei Anwendung von Oberdampf wird die Leistung Gh des Hammers beim Aufschlagen, natürlich aber auch der Dampfverbrauch verdoppelt. Während beim freien Fallen die Zeit des Niederfallens

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}253\sqrt{h} \text{ Sec.}$$

wäre, ist sie bei Anwendung von Oberdampf nur

$$t = \sqrt{\frac{h}{g}} = 0{,}179\sqrt{h} \text{ Sec.}$$

Die großen Stirn- und Brusthämmer arbeiten ohne Stoßreitel, machen bei einem Gewichte von 50 bis 150 Centner und einer Fallhöhe von 1 bis 2 Fuß, pro Minute 30 bis 100 Schläge, und dienen vorzüglich zum Zängen der Puddelofenluppen, sowie zum Ausschmieden großer Maschinentheile. Man ersetzt sie in neuerer Zeit auch durch sogenannte Quetschwerke. Die Hebedaumen, deren Anzahl gewöhnlich 4 bis 5 ist, werden in einen gußeisernen Wellkranz eingesetzt und darin festgekeilt. Während das Hammerhelm ungefähr 8 Fuß lang ist, giebt man der Drehungsaxe eine Länge von 4 bis 5 Fuß.

Die Aufwerfhämmer, welche größentheils zum Zängen der Luppen und Ausschmieden grober Eisensorten angewendet werden, sind 4 bis 10 Centner schwer, haben 16 bis 24 Zoll Hub und machen pro Minute 80 bis 130 Schläge Das Ham-

merhelm besteht hier aus Buchenholz, ist 6 bis 8 Fuß lang, 10 bis 12 Zoll hoch und 8 Zoll breit. Die Hammerhülse hat ein 9 bis 12 Zoll weites Auge zur Aufnahme des Helmes und zwei conische Zapfen, womit sie in den sogenannten Büchsen aus Gußeisen zu liegen kommt. Die Spitze des längeren Zapfens steht ungefähr 2, und die des kürzeren 1 Fuß von der Mitte des Auges ab. Der Wellkranz ist $2^1/_4$ bis $2^1/_2$ Fuß im Lichten weit, 6 Zoll breit und 4 Zoll hoch, und hat 4 bis 5 Daumen, welche mit Holzstücken bedeckt werden, um den Stoß beim Angriff weicher zu machen. Der Puffer, wodurch das Aufschlagen des Hammers verstärkt wird, besteht hier in dem sogenannten Prallbalken, an welchen der Hammer beim Aufsteigen anschlägt. Es ist zweckmäßig, die Masse dieses Prellers möglichst groß zu machen.

Die Schwanzhämmer dienen zwar vorzüglich zum Ausschmieden feinerer Eisensorten, lassen sich aber auch statt der Aufwerfhämmer zur Anfertigung gröberer Eisensorten, sowie zum Zängen der Luppen bei der Herdfrischerei anwenden. Diese Hämmer sind gewöhnlich von Schmiedeeisen, wiegen 1 bis 6 Centner und machen bei einem Hube von $^3/_4$ bis 2 Fuß, pro Minute 300 bis 80 Schläge. Die stählerne Hammerbahn ist $^1/_2$ bis 2 Zoll breit und 12 bis 20 Zoll lang. Um besondere Eisensorten aufertigen zu können, setzt man entweder besondere Kerne mit Gesenken in die Bahn der Hämmer ein, oder man bedient sich scheerenförmiger Handhaben zum Halten der Gesenke.

Der ebenfalls verstählte Amboß liegt in einer Vertiefung der gußeisernen Chabotte, und diese ist auf gleiche Weise im Chabottenstück befestigt. Während die Chabotte einen Würfel von 18 bis 24 Zoll Seitenlänge bildet, ist der Chabottenstock ein Holzcylinder von 3 bis 4 Fuß Durchmesser und 6 bis 10 Fuß Länge. Man setzt denselben entweder auf Felsen, oder auf Steinschotter, oder auf einen Pfahlrost. Das buchenhölzerne Hammerhelm ist 10 bis 15 Fuß lang, 12 bis 20 Zoll hoch und 9 bis 15 Zoll dick. Das armirte Hammerhelm trägt nicht bloß den Hammer und die Hammerhülse, sondern auch noch mehrere Eisenringe und eiserne Federn, sowie am Schwanzende noch den Schwanzring, welcher oben als Streichblech für den Welldaumen, und unten als Prallknopf zum Aufschlagen auf den Prallstock dient. Die Daumen, welche den Schwanz des Hammers niederdrücken, und dadurch den Hammer heben, sind aus Schmiedeeisen, und werden in dem 15 bis 20 Zoll breiten und $2^1/_2$ bis $3^1/_2$ Zoll dicken Wellkranz eingesetzt, in welchem zu diesem Zwecke 3 bis 10 Löcher von 4 bis 8 Zoll Länge ausgespart sind.

Die Walkhämmer sind Ringstücke aus ausgelaugtem Eichen- oder Kiefernholz, von 6 bis 8 Fuß Länge, 8 bis 9 Zoll Breite und 6 bis 10 Zoll Dicke. Die Stiele derselben

haben eine Länge von 6 bis 12 Fuß, bei einer Dicke von 7 und Breite von 5 Zoll. Der circa 15 Zoll lange Hebebaumen eines solchen Hammers ist radial gerichtet und hat in seiner mittleren Lage eine Neigung von 30 bis 40 Grad. Derselbe wird mittels der Heblinge einer Welle emporgehoben, und trifft beim Niederfallen des Hammers auf die sogenannte Schlagleiste. Zwei solcher Hämmer arbeiten gewöhnlich gemeinschaftlich in einem und demselben Troge mittels ihrer ausgezackten Füße. Jeder Hammer wiegt 250 bis 350 Pfd. und wird in der Minute 40 bis 60 mal, 16 bis 22 Zoll hoch gehoben; es ist daher der theoretische Arbeitsaufwand zum Betriebe zweier Walkhämmer:

$L = 2 . 250 \; {}^{40}/_{60} . {}^{16}/_{12} = 500 . {}^{8}/_{9} = 444$ Fußpfd., bis

$L = 2 . 350 \; {}^{60}/_{60} . {}^{22}/_{12} = 700 . {}^{55}/_{36} = 1069$ Fußpfd.;

wonach sich der effective Kraftaufwand $1\frac{1}{4}$ bis $2\frac{1}{2}$ Pferdekräfte annehmen läßt. Die Welle ist gewöhnlich 2= bis 3hübig, macht folglich pro Minute 20 Umdrehungen.

Wenn man von der Zeit eines Hammerspieles 0,4 zum Anheben des Hammers und 0,6 zum Fallen und Ruhen rechnet, so ist bei der Hubhöhe h des Hammers die zulässige Anzahl der Hammerschläge pro Minute:

$$n_1 = 36 \sqrt{\frac{g}{2h}} = \frac{493}{\sqrt{h}},$$

wo h in Zollen zu geben ist. Hiernach hat man für

$h = 10$	12	14	16	18	20	24	30 Zoll
$n_1 = 156$	142	132	123	116	110	100	90

Aus der Hübigkeit n und der Zahl n_1 der Spiel= oder Hammerschläge pro Minute folgt die erforderliche Umdrehungszahl der Hammerwelle $u = \frac{n_1}{n}$; ferner ist der Theilwinkel der Welle: $\beta^0 = \frac{360^0}{n}$, und der Daumenwinkel, um welchen sich die Welle während des Anhebens dreht:

$$\alpha^0 = \nu \beta^0 = \frac{144^0}{n}, \text{ oder Bog. } \alpha = \frac{2{,}513}{n}.$$

Aus dem Hammerhube h, dem Lastarme, d. i. der Entfernung a des Schwerpunktes des Hammers von der Drehungsaxe, und der Länge b des Hammerschwanzes, vom Ende desselben bis zur Drehungsaxe gemessen, folgt der nöthige Wellenhalbmesser:

$$r = \frac{a h}{\alpha b} = 0{,}4 \; \frac{n a h}{b}.$$

Bei den gewöhnlichen Verhältnissen ist die Umdrehungszahl der Daumenwelle eines Hammerwerkes, $u = 14$ bis 20, und daher die directe Umdrehung derselben durch ein verticales Wasserrad nicht vortheilhaft. Soll dieses pro Minute u_1 Umdrehungen machen, so ist folglich durch ein Radvorgelege eine Umsetzung mit dem Verhältnisse $\psi = \frac{u}{u_1}$ anzuwenden, in welchem Falle aber statt des Wasserrades, zur Verminderung der nachtheiligen Stöße beim Angriff, ein Schwungrad oder wenigstens ein massiger Wellkranz auf die Hammerwelle aufzusetzen ist. Bei Anwendung der Dampfkraft zum Umtrieb eines Hammerwerkes ist ein solches Vorgelege nicht nöthig; hier kann man die Kurbelwelle zugleich auch als Hebelwelle arbeiten lassen.

Die theoretische Leistung eines Hammerwerkes ist:

$$L = \frac{nu}{60} G\,(h + h_1) = \frac{n_1}{60} G\,(h + h_1)$$

zu setzen, wobei G das Gewicht des Hammers, h die Höhe, auf welche derselbe oder vielmehr der Schwerpunkt desselben, durch die Welldaumen direct gehoben wird, und h_1 diejenige Höhe bezeichnet, auf welche er von denselben entweder wirklich geworfen wird oder geworfen werden würde, wenn ihn der Praller nicht auffinge und zurückwürfe. Uebrigens läßt sich annähernd

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{bv}{a}\right)^2 \text{ setzen,}$$

wenn v die Umdrehungsgeschwindigkeit der Welldaumen und $v_1 = \frac{b}{a}\, v$, die Geschwindigkeit des Hammers beim Beginne des Steigens bezeichnet.

Der nöthige Arbeitsaufwand zum Betriebe des Hammerwerkes läßt sich annähernd

$$L_1 = \tfrac{5}{3}\, L = \frac{nu}{36} G\,(h + h_1) \text{ Fußpfd.}$$

setzen.

Zweiter Abschnitt.

Formeln, Regeln, Erfahrungssätze und Tabellen der mechanischen Technologie.

Erstes Capitel.

Baumaterialien, deren Gewinnung und Bearbeitung.

---

§. 115. Holz. Das Holz (der Exogenen) enthält 96 bis 98 Proc. Faserstoff. Das Uebrige besteht aus Wasser, Gummi, Harz oder anderen in Alkohol löslichen Substanzen. Die Holzfaser hat das specifische Gewicht $\varepsilon = 1{,}45$ bis 1,60. Das Holz der Endogenen, z. B. vom Bambus, ist zum gewöhnlichen Gebrauch nicht geeignet. Uebrigens enthält die Holzfaser im Mittel 48 bis 50 Proc. Kohlenstoff, 5,7 bis 6,3 Proc. Wasserstoff, 42 bis 45 Proc. Sauerstoff und $^2/_3$ bis 2 Proc. beim Verbrennen als Asche zurückbleibende feste Bestandtheile. Der trockenen Destillation in verschlossenen Gefäßen unterworfen, giebt das vorher scharf getrocknete Holz bei langsam steigender Hitze, 26 Proc., dagegen bei schnell steigender Hitze, nur $13^1/_3$ Proc. Kohle.

Bei frisch gefälltem Holze ist der Wassergehalt desselben 30 bis 45 Proc., im lufttrockenen Zustande, nach Jahresfrist, noch 20 bis 25 Proc., und im völlig trockenen Zustande noch immer 10 bis 15 Proc. Von dem Holze eines Baumstammes ist der die Markröhre umschließende Kern dichter, härter und fester als der Splint, welcher zunächst unter dem Bast und der Rinde liegt. Die sogenannten Jahresringe sind im Kern schmäler als im Splint und werden von dem sogenannten Spiegel oder den Markstrahlen, nach welchen sich das Holz leicht spalten läßt, unterbrochen. Unter übrigens gleichen Umständen ist das=

jenige Holz am festesten und dauerhaftesten, welches am langsamsten wächst, und folglich die schmalsten Jahresringe hat, welches überhaupt dichter ist und eine dunklere Färbung und keine Unterbrechungen in der Structur hat.

Die Nadelhölzer zeichnen sich durch ihre gerade und regelmäßige Gestalt vor den Laubhölzern aus, sie lassen sich deshalb leicht bearbeiten und widerstehen in der Richtung der Fasern mehr durch Zug- als durch Druck- und Schubfestigkeit. In Folge der geringen Schubfestigkeit lassen sie sich auch leicht spalten. Zu den Nadelhölzern gehört die Rothtanne oder Fichte, die Weißtanne oder Tanne schlechtweg, die Kiefer oder Föhre und die Lerche. Die Weißtanne erreicht bei einem Durchmesser von $3\frac{1}{2}$ bis $4\frac{1}{2}$ Fuß eine Länge von 125 bis 150 Fuß, wogegen die übrigen Nadelhölzer eine Stärke von 2 bis 4 Fuß erlangen und 75 bis 100 Fuß hoch wachsen. Das Holz der Lerche, welche unter allen Nadelhölzern allein die Nadeln im Winter verliert, ist sehr fest und dauerhaft, widersteht vorzüglich dem Wechsel von Trockenheit und Nässe. Tannen- und Fichtenholz ist gleich gut als Bau- und Werkholz, Kiefern- und Lerchenholz aber mehr als Bauholz.

Unter den Laubhölzern steht in Deutschland die Eiche oben an. Man unterscheidet Sommer- und Winter- oder Steineiche. Bei jenen sitzen die Eicheln zu je 2 oder 3 an langen Stielen, bei diesen sind dagegen je 3 bis 5 Eicheln in Büscheln vereinigt. Das Holz der Wintereiche ist das dunklere, schwerere, härtere; das der Sommereiche aber ist gerader und regelmäßiger gewachsen, daher auch leichter zu bearbeiten als jenes. Beide erreichen bei 2 bis 6 Fuß Durchmesser eine Höhe von 100 bis 150 Fuß, und es liefern auch beide ein gutes Bauholz, welches abwechselnde Nässe und Trockenheit gut verträgt und unter Wasser fast unzerstörbar ist.

Das Holz der Rothbuche, welche letztere bei einer Stärke von 5 Fuß eine Höhe von 130 Fuß erreicht, ist hart und dicht, und leicht spaltbar, aber spröde, sehr zum Werfen und beim Wechsel von Nässe und Trockenheit zum Stocken geneigt. Es wird deshalb als Bauholz seltener verwendet. Das Holz der Weiß- oder Hainbuche (Hornbaume), welche nur 40 bis 80 Fuß hoch wächst, ist dichter, härter und zäher als das der Rothbuche und ist deshalb als Werkholz sehr schätzbar. Das Ahornholz ist sehr hart, fest und zähe, dem Werfen und Reißen weniger ausgesetzt und ist überhaupt ein vortreffliches Werkholz. Ebenso ist das Ulmen- oder Riesenholz ein sehr gutes Bau- und Werkholz, zumal weil es fast gar nicht von Würmern angegriffen wird. Das Eschenholz ist wegen seiner Elasticität und Zähigkeit sehr zu feinen Holzarbeiten geeignet. Das Holz der Pappeln ist weich, porös und hat eine geringe Festigkeit und Dauerhaftigkeit, hat daher als Bau- und Werkholz einen geringen Werth. Das Erlenholz hat eine geringe Härte und Festigkeit, ist aber von gleichförmigem Gefüge und wirft sich

nicht leicht; weshalb es oft bei Modellen für Gießereien verwendet wird. Auch ist es im Wasser sehr dauerhaft, und deshalb beim Wasserbaue sehr geschätzt. Das Lindenholz läßt sich ebenfalls sehr glatt bearbeiten, ist aber dem Wurmfraß sehr ausgesetzt. Das Nußbaumholz ist dicht und deshalb einer hohen Politur fähig; man verwendet es deshalb zu feinen Holzarbeiten, namentlich zu Fournieren, Gewehrschäften u. s. w. Es steht übrigens dem Eichenholz sehr nahe, ist aber nicht so dauerhaft als dieses. Die Birke sowie die Roßkastanie und die Weide geben kein dauerhaftes Holz, werden daher auch wenig als Bau- und Nutzholz verwendet. Aber die Weidenruthen finden zu Geflechten u. s. w. eine ausgedehnte Anwendung. Der Weißdorn giebt ein sehr zähes Holz und eignet sich sehr zu feinen Drechslerarbeiten; das Spierlingsholz ist sehr zähe und fest und eignet sich sehr zu Werkzeugen und Maschinentheilen, nächstdem auch das Vogelbeer- oder Ebereschenholz. Das Holz der gewöhnlichen Obstbäume wird wegen seines feinen Gefüges häufig bei Tischler- und Drechslerarbeiten verwendet. Zu den außereuropäischen Holzarten, welche in Europa verarbeitet werden, gehört vorzüglich das Mahagoniholz. Der Mahagonibaum wächst 80 bis 100 Fuß hoch in Westindien und dem benachbarten Festlande von Nordamerika. Gutes Mahagoniholz ist fest und dauerhaft, schwindet und wirft sich wenig, widersteht dem Wechsel der Trockenheit und Feuchtigkeit, ist auch dem Wurmfraß nicht ausgesetzt.

Aeußerst dichte Holzarten sind das Pock-, Franzosen- oder Guajak-, sowie das schwarze und grüne Ebenholz. Ebenso das Grenadill- oder rothe Ebenholz.

Vorzügliches Schiffsbauholz liefert der Thekabaum aus Ostindien.

Das specifische Gewicht des Holzes von frisch gefällten europäischen Bäumen beträgt

$$\varepsilon = 0{,}85 \text{ bis } 1{,}05;$$

im lufttrockenen Zustande dagegen

$$\varepsilon = 0{,}45 \text{ bis } 0{,}75.$$

Viel schwerer ist das Ebenholz, Pockholz, Grenadillholz; für diese ist

$$\varepsilon = 1{,}25 \text{ bis } 1{,}30.$$

Hiernach wiegt ein Cubikfuß inländisches Holz:

1.) frisch gefällt, $\gamma = 52{,}5$ bis 65 Pfd.,

2.) lufttrocken, $\gamma = 28$ bis $46^1/_2$ Pfd.,

dagegen ein Cubikfuß der dichteren ausländischen Holzarten

3.) $\gamma = 77$ bis 80 Pfd.

Das Brennholz wird nach Klaftern zu je 3 . 6 . 6 = 108 Cubikfuß gemessen; eine solche giebt aber

in Scheiten oder Kloben nur 72 Cubikfuß,
in starken Knüppeln nur 68 Cubikfuß und
in schwachen Knüppeln gar nur 63 Cubikfuß Holzmasse.

Eine Klafter Scheitholz wiegt bei 15 Proc. Wassergehalt,
in Nadelholz 24 Centner und
in Laubholz 29 Centner.

Der Elasticitätsmodul für Zug- und Druckkraft in der Richtung der Holzfasern der gewöhnlichen Hölzer ist

$$E = 1'300000 \text{ bis } 1'900000 \text{ Pfd.},$$

der Festigkeitsmodul des Zerreißens in derselben Richtung

$$K_1 = 10000 \text{ bis } 20000 \text{ Pfd.},$$

der des Zerdrückens in dieser Richtung,

$$K_2 = 5000 \text{ bis } 10000 \text{ Pfd.},$$

ferner der Festigkeitscoefficient des Abreißens rechtwinkelig zu den Fasern,

$$K_3 = 600 \text{ bis } 1000 \text{ Pfd.};$$

und ebenso groß ist der Coefficient der Festigkeit des Abschiebens in der Richtung der Fasern. In der Regel ist das dichtere Holz auch das festere. Die Biegsamkeit des Holzes wächst mit dem Ausdehnungscoefficienten $\sigma = \frac{\lambda}{l} = \frac{T}{E}$; sie ist bei Eschenholz am größten ($^1/_{400}$), bei Tannenholz eine mittlere ($^1/_{500}$) und bei Buchen- und Eichenholz am kleinsten ($^1/_{600}$).

Das Holz schwindet oder zieht sich bei Verlust von Wasser zusammen, und schwillt dagegen in feuchter Luft, bei Aufnahme von Wasser, an. Mit diesen Veränderungen des Wassergehaltes ist oft das Werfen, Verziehen und Zerreißen des Holzes verbunden. Das frisch gefällte Holz schwindet allmälig in der Richtung der Längenfasern im Mittel um 0,1 bis 0,4 Proc.; dagegen in der Richtung der Spiegel, 3 bis 6 Proc., und in der Richtung der Jahresringe, 4 bis 8 Proc., also überhaupt im Querholz $3^1/_2$ bis 7 Proc. Nach jahrelangem Liegen im Wasser nimmt das Gewicht des vorher lufttrockenen Holzes um 60 bis 90 Proc. zu, wobei sich das specifische Gewicht ε auf 1,05 bis 1,10, folglich das Gewicht γ eines Cubikfußes auf 65 bis 68 Pfd. steigert.

§. 116. Austrocknen, Auslaugen und Conserviren des Holzes. Frisch gefälltes Holz muß, weil es am meisten zum Werfen geneigt ist, mehrere Monate oder ein Jahr lang an der Luft, gegen Regen geschützt, getrocknet werden, ehe es zur Verarbeitung kommt. Das Alter, in welchem das Holz der Bäume die größte Dichtigkeit und Festigkeit erlangt hat, und folglich die Bäume als vollkommen reif angesehen werden können, ist bei Eichen im Mittel 100 Jahre, bei Buchen, Eschen u. s. w. 80, und bei Fichten, Tannen und Kiefern, 60 bis 80 Jahre. Uebrigens sollen die Bäume nicht allein im Alter der Reife, sondern auch nur dann geschlagen werden, wenn in denselben der Saft nicht circulirt, d. i. im Winter. Uebrigens ist es des leichteren Austrocknens wegen rathsam, daß die Bäume, welche als Bau- und Werkholz verwendet werden sollen, nach dem

Fällen bald entrindet und nach Befinden in größere Stücke zerschnitten werden. Um das Nutzholz lufttrocken zu machen, bewahrt man es in luftigen Schuppen auf, welche es vor Regen, Sonnenschein und starkem Wind schützen, und legt es auf besondere Unterlagen, welche auch eine Circulation der Luft von unten zulassen. Uebrigens ist es gut, den Trockenschuppen zu pflastern und nach Befinden zu drainiren. Bei aufrechter Stellung des Holzes geht das Austrocknen besonders gut von statten. Auch ist es zweckmäßig, die Lage der Holzstücken von Zeit zu Zeit zu verändern. Die nöthige Zeit des Austrocknens an der Luft ist 2 bis 4 Jahre. Das künstliche Austrocknen des Holzes erfolgt mittels eines erhitzten Luftstromes in einer abgeschlossenen Kammer.

Die Napier'sche Trockenkammer ist 60 Fuß lang, $7\frac{1}{2}$ Fuß hoch und $3\frac{1}{2}$ Fuß breit aus Ziegelsteinen ausgeführt, und wird von der Verbrennungsluft eines von außen zu heizenden Ofens gespeist, welche durch das mit Zwischenräumen aufgehäufte Holz von oben nach unten, und zuletzt durch einen Canal am Boden in den Schornstein strömt. Die Luft hat beim Eintritt die Temperatur von 110 bis 150 Grad, und beim Austritt die Temperatur von 40 bis 50 Grad. Bei einem 2- bis $2\frac{1}{2}$tägigen Feuern wird das Gewicht des Holzes durch den Verlust von Wasser um 15 bis 20 Proc. leichter, wobei auf 1 Pfd. Coaksverbrauch circa 3,2 Pfd. verdampftes Wasser kommt.

Um das Holz vor Fäulniß, vor dem Holzschwamm und vor dem Wurmfraß zu sichern, wird es auch gedörrt (bei höchstens 175⁰ C.) oder an der Oberfläche verkohlt, oder getheert, oder mit einer Oelfarbe angestrichen u. s. w. Auch ist es nöthig, das Nutzholz bei seiner Verwendung vor dem Wechsel von Nässe und Trockenheit zu schützen, und es immer einem mäßigen Luftzug auszusetzen, damit es weder in die nasse noch in die trockene Fäulniß geräth. Das Auslaugen des Holzes, durch welches die saftigen Bestandtheile desselben entfernt werden, hat auch den Zweck, es dauerhaft zu machen. In gewissem Grade erfolgt das Auslaugen schon dadurch, daß man das Holz mehrere Sommer lang in fließendem Wasser liegen läßt oder daß man es im Wasser kocht. Vollkommener erfolgt aber das Auslaugen durch Wasserdämpfe. Das auszulaugende Holz ist hier in einem parallelepipedischen Holzkasten von 3 Zoll dicken Wänden eingeschlossen, während Wasserdampf aus einem in der Nähe befindlichen Dampfkessel zuströmt, und sich das Wasser, welches sich aus demselben niederschlägt, und mit den saftigen Bestandtheilen des Holzes angeschwängert hat, unten durch einen Hahn abgelassen wird. Man rechnet auf 1 Quadratfuß Heizfläche des Kessels, 40 Cubikfuß Fassungsraum des Kastens, oder circa 30 Cubikfuß Holz. Bei einer Heizfläche von 6 Quadratfuß könnte folglich der Kasten 240 Cubikfuß Inhalt haben, also etwa 12 Fuß lang, 5 Fuß hoch und 4 Fuß breit sein. Nach 60 bis 80 Stunden ist das Auslaugen zu beendigen, und das

ausgelaugte Holz noch einige Tage in einer Trockenkammer aufzubewahren, sowie zuletzt noch einige Monate lang an der Luft zu trocknen. Unmittelbar nach dem Dämpfen läßt sich das Holz sehr leicht biegen und formen; auch behält es die hierbei angenommene Gestalt, nachdem es trocken geworden ist. Nach dem Austrocknen ist das gedämpfte Holz um 20 bis 40 Proc. leichter als das frisch gefällte, und 5 bis 10 Proc. leichter als das ungedämpfte lufttrockene Holz. Uebrigens wird das Holz durch das Dämpfen härter und fester, auch vermindert sich dadurch die Neigung zum Anschwellen, Schwinden und Werfen des Holzes.

Das Tränken des Holzes mit chemischen Auflösungen dient entweder dazu, die Säfte des Holzes auszutreiben oder zu zerstören, oder auch, um die Poren des Holzes zu verstopfen und dadurch das Eindringen von Luft und Wasser zu verhindern. Statt des Kyanisirens oder das Tränken des Holzes mit Quecksilberchlorid (1 Thl. Quecksilber + 2 Thle. Chlor), wobei auf je 1 Pfd. Sublimat, 50 bis 150 Pfd. Wasser erfordert werden, wendet man in neueren Zeiten eine Auflösung von Zinkchlorid mit Vortheil an. Man erhält das Zinkchlorid dadurch, daß man 1 Thl. Zink in 8 Thln. Salzsäure auflöst. Das Holz wird hier ungefähr eine Stunde lang in einer schwachen Lösung von 4° Baumé ($\varepsilon = 1{,}028$) gekocht, und erst nach dem Erkalten aus der Flüssigkeit herausgenommen. Auch treibt man in neuerer Zeit diese Zinkauflösung unter einem hohen Drucke in die Poren des Holzes. Ebenso tränkt man auch das Holz mit Kreosot (Steinkohlentheeröl) unter einem sehr hohen Drucke von 10 bis 12 Atmosphären, wobei natürlich ein verschlossenes Gefäß in Verbindung mit einer Luftpumpe anzuwenden ist. Auch Kupfervitriolauflösungen haben sich als Tränkungsmittel gut bewährt.

Das Metallisiren oder Paynisiren hat den Zweck, die Poren im Holze durch Gyps auszufüllen, und wird dadurch bewirkt, daß man das Holz unter hohem Drucke erst mit einer Eisenvitriolauflösung tränkt und dann mit einer Chlorcalciumauflösung behandelt.

Bei dem Verfahren von Boucherie wird die Salzauflösung vorzüglich durch die Haarröhrchenthätigkeit in die Poren frisch gefällter Baumstämme infiltrirt.

Ein Anstrich von dem unter dem Namen Wasserglas bekannten flüssigen Natron- oder Kaliglase schützt Holz gegen die Einwirkung von Luft und kaltem Wasser, sowie in gewissem Grade auch gegen Feuer.

§. 117. Vorbereitung des Holzes zur Verarbeitung.

1.) Das Ganzholz ist entweder Rundholz oder Kantenholz (Eckholz); zu dem letzteren gehört als Bauholz das Balken- und Sparrenholz, wovon folgende Tabelle die Hauptstärken angiebt.

	Länge	Dicke	
		am Stammende	am Gipfelende
Balkenholz .	24 bis 36 Fuß	8 bis 12 Zoll	6 bis 9 Zoll
	36 „ 48 „	12 „ 14 „	8 „ 10 „
	48 „ 72 „	14 „ 16 „	10 „ 12 „
Sparrenholz	24 „ 36 „	6 „ 8 „	4 „ 6 „
	36 „ 48 „	8 „ 9 „	6 „ 8 „

Das schwächere Holz wird nur als Werkholz verwendet.

2.) Das Spaltholz ist fester, elastischer und dauerhafter als das Schnittholz, und auch dem Werfen weniger ausgesetzt als das letztere; kann aber nur bei lang- und geradfaserigen Hölzern angewendet werden.

3.) Das Schnittholz ist entweder breites oder kantiges Schnittholz. Zu den ersteren gehören die Bohlen oder Pfosten, gewöhnlich 2 bis 5 Zoll dick; die Bretter oder Dielen von $1/4$ bis $1 3/4$ Zoll Dicke, und die Fourniere, deren Dicke nur $1/2$ bis 1 Linie beträgt. Das kantige Schnittholz entsteht durch Zersägen der Bohlen und Bretter, und besteht entweder aus Stollen oder aus Latten. Außerdem erzeugt man auch noch krummes Schnittholz für Wagner, Böttcher u. s. w.

Das Schneiden oder Sägen mittels der Handsäge erfolgt am besten in verticaler Richtung durch drei Mann, von denen zwei die arbeitende Säge niederziehen und einer abwechselnd die leere Säge aufzieht. Das Sägeblatt ist 4 bis 6 Fuß lang, 4 bis 6 Zoll breit und hat 64 bis 96 stark geschränkte und nach einer und derselben Seite hin anlaufende Zähne.

Nach Navier ist hierbei die tägliche Arbeit eines geübten Holzschneiders, $L = 187200$ Kilogrmtr. $= 1'193000$ Fußpfd. und das Ergebniß derselben Folgendes:

Namen der Holzarten	Zustand des Holzes	Tägliche Schnittfläche eines Arbeiters bei circa 2 Linien Schnittdicke	Erforderliche mechanische Arbeit pro Quadratfuß Schnittfläche
Nadelholz . .	frisch	78 □Fuß	15295 Fußpfd.
	trocken	51 „	23392 „
Eichenholz . .	frisch	67 „	17806 „
	trocken	45 „	26511 „
Ulme	frisch	61 „	19557 „
	trocken	41 „	29098 „
Nußbaum. . .	frisch	71 „	16803 „
	trocken	51 „	23392 „

Man ersieht hieraus, daß das trockene Holz circa die Hälfte mehr Arbeit zum Zersägen erfordert, als das frisch gefällte Holz.

Die gewöhnlichen **Schneide- oder Sägemühlen** haben eine oder mehrere in einem Gatter ausgespannte Sägen, welche durch den Kurbelmechanismus auf- und niederbewegt werden. Aus der Stärke d des zu sägenden Klotzes folgt die Länge des Kurbelarmes, $a = 0{,}5\,d$ bis $0{,}7\,d$, folglich die Größe des Gatterganges, $s = 2\,a = d$ bis $1{,}4\,d$ und zwar gewöhnlich, $1\frac{1}{2}$ bis 3 Fuß. Die Länge des verzahnten Theiles der Säge ist mindestens $= 2\,d$, und zwar gewöhnlich 4 bis $6\frac{1}{2}$ Fuß; während die Länge der ganzen Säge 5 bis 7 Fuß mißt. Die mittlere Geschwindigkeit des Sägegatters ist $v = 8$ bis 15 Fuß, folglich die Anzahl der Schnitte pro Minute: $n = \frac{60\,v}{2\,s} =$ 80 bis 160. Die Breite des Sägeblattes mißt 6 bis 10 Zoll, die Dicke desselben 0,08 bis 0,1 Zoll; wegen der Schränkung der Zähne ist aber die Breite des Schnittes, 0,12 bis 0,16 Zoll. Die Säge schneidet nur beim Niedergange, deshalb ist die Linie durch die Spitzen der Zähne nicht vertical, sondern sie hat einen Anlauf oder macht mit der Verticalen, oder vielmehr mit der Zuglinie, je nachdem hartes oder weiches Holz geschnitten wird, einen Winkel α von 15 bis 24 Minuten, weshalb auch der Wagen mit dem Klotze nach jedem Schnitte um die Größe $\sigma = s\,tang.\,\alpha = 0{,}0044\,s$ bis $0{,}0070\,s = 0{,}10$ bis 0,20 Zoll vorrücken muß. Damit die bei jedem Schnitte entstehende Menge von Sägespänen in den Zahnlücken Platz finde, muß unter der Voraussetzung, daß das Volumen der Sägespäne im lockeren Zustande fünf mal so groß ist, als das des Holzes, aus welchem dieselben entstanden sind, der Querschnitt der Zahnlücken, $F_0 = 5\,\sigma\,d$ sein.

	für weiches Holz	für hartes Holz
die Theilung der Säge, oder der Abstand e zwischen je zwei Zahnspitzen ist	1,55 bis 1,95 Zoll	1,15 bis 1,55 Zoll
die Tiefe f der Zähne	0,95 „ 1,15 „	0,70 „ 0,95 „
die Länge oder Höhe der Zähne	0,77 „ 0,97 „	0,80 „ 1,08 „
die Länge oder Höhe der Zahnlücken	0,78 „ 0,98 „	0,35 „ 0,47 „
der Winkel an den Zahnspitzen	50°,12′	49°,24′

Die Fläche, welche die Zähne, sammt den Zahnlücken einnehmen, ist $F_1 = s\,f$, und daher das Verhältniß $\frac{F_0}{F_1} = \frac{5\,\sigma\,d}{s\,f}$, z. B. $\sigma = 0{,}15$, $d = 16$, $s = 20$ und $f = 1{,}0$ Zoll angenommen, folgt $\frac{F_0}{F_1} = 0{,}60$; es nehmen also dann die

Zahnlücken $^3/_4$ und die Zähne $^1/_4$ von der ganzen Zahnfläche in Anspruch. Nach Karmarsch soll das Querschnittsverhältniß $\frac{F_0}{F_1}$ für weiches Holz 0,75, und für hartes 0,65 betragen. Damit das Verhältniß $\frac{F_0}{F_1}$ die hinreichende Größe erhalte, bringt man sogenannte **Wolfszähne** mit besonderen Vertiefungen im Sägeblatte an.

Aus der Schnittfläche σd pr. Sägeschnitt und der Anzahl n der Sägeschnitte pr. Minute folgt die Schnittfläche pr. Sec. $F = \frac{n \sigma d}{60}$; wegen des Zeitverlustes beim Rücklaufen des Wagens, Rücken des Holzes u. s. w. gehen aber $\frac{n}{4}$ Sägeschnitte verloren, so daß effectiv $F = {}^3/_4 \frac{n \sigma d}{60} = \frac{n \sigma d}{80}$, z. B. für $n = 100$, $\sigma = 0{,}15$ und $d = 18$ Zoll, $F = 3{,}4$ Quadratzoll zu setzen ist.

Im Allgemeinen läßt sich annehmen, daß durch eine Pferdekraft stündlich, bei Anwendung **einer** Säge, 20 bis 30 Quadratfuß Fläche im weichen, und 15 bis 20 Quadratfuß im harten Holze geschnitten werden, und daß diese Fläche bei Anwendung eines Gatters mit mehreren Sägen im weichen Holze pr. Säge um 4,5, und im harten Holze um 3,4 Quadratfuß zunimmt, so daß z. B. bei Anwendung eines Gatters mit 8 Sägen unter den günstigsten Umständen, namentlich wenn die Säge frisch und gut geschärft ist, auf eine Pferdekraft stündlich $30 + 7 \,.\, 4{,}5 = 61{,}5$ Quadratfuß Schnittfläche im weichen, sowie $20 + 7 \,.\, 3{,}4 = 43{,}8$ Quadratfuß Schnittfläche im harten Holze zu rechnen sind.

Bezeichnet man die stündliche Schnittfläche pr. Pferdekraft mit S, so ist folglich die Nutzleistung einer Sägemühle, welche stündlich $^3/_4 F = {}^3/_4 . 60\, n \sigma d = 45\, n \sigma d$ Quadratfuß Schnittfläche liefert,

$$L = \frac{F}{S} = \frac{60 n \sigma d}{S}$$ Pferdekräfte, z. B. für $n = 100$, $\sigma = {}^1/_{12} . 0{,}15$, $d = {}^1/_{12} \,.\, 18$ Fuß und $S = 20$ Quadratfuß,

$$L = \frac{60 \,.\, 100 \,.\, 0{,}15 \,.\, 18}{12 \,.\, 12 \,.\, 20} = \frac{15 \,.\, 0{,}75}{2} = 5{,}62 \text{ Pfkr.}$$

Da 1 Quadratfuß Schnittfläche stündlich $\frac{1}{S}$ Pferdekräfte, also überhaupt, $\frac{480 \,.\, 60 \,.\, 60}{S} = \frac{1728000}{S}$ Fußpfd. mechanische Arbeit in Anspruch nimmt, so ist die nöthige Kraft der Säge:

$$P = 1728000 \frac{\sigma d}{S s},$$ z. B. für $\sigma = {}^1/_{12} . 0{,}15 = {}^1/_{80}$ Fuß, $\frac{d}{s} = {}^{18}/_{80} = {}^3/_5$ und $S = 20$ Quadratfuß.

$$P = 1728000 \cdot \frac{0{,}15}{12 \cdot 20} \cdot 0{,}6 = 648 \text{ Pfd.}$$

Damit eine möglichst gleichförmige Umdrehungsbewegung der Kurbelwelle erzielt werde, muß das **Gewicht des Sägegatters**, $G = \frac{P}{2}$ gemacht, oder die Differenz $G - \frac{P}{2}$ durch ein Gegengewicht am Schwungrad ausgeglichen werden. Die Größe dieses Gegengewichts ist $G_1 = \frac{a}{r}\left(G - \frac{P}{2}\right)$, wenn r den Abstand seines Schwerpunktes von der Umdrehungsaxe bezeichnet.

Das **Gewicht des Schwungrades** läßt sich nach der Formel

$$G = \frac{94700\,L}{\frac{1}{30} \cdot nc^2} = \cdot\, 4841000\,\frac{L}{nc^2} \text{ Pfund.}$$

(s. §. 103, S. 648) berechnen, worin die Umfangsgeschwindigkeit des Schwungrades c in Fußen bezeichnet.

Die große Anzahl $n = 80$ bis 200 der Schnitte einer Sägemühle pr. Minute erfordert beim Umtrieb durch ein verticales Wasserrad mindestens ein Vorgelege, wenn z. B. das Rad pr. Minute 10 Umdrehungen macht und das Vorgelege im Verhältnisse $^8/_1$ umsetzt, wobei der Halbmesser des Getriebes auf der Kurbelwelle $^1/_8$ von dem des Treibrades auf der Wasserradwelle ist, so macht doch die Kurbelwelle pr. Minute nur $8 \cdot 10 = 80$ Spiele, und folglich auch die Säge nur 80 Schnitte. Um eine größere Schnittzahl und einen vortheilhafteren Betrieb zu erhalten, ist es besser, zwei Vorgelege einzuschalten. Uebrigens lassen sich hier die Riemenvorgelege mit Vortheil anwenden. Beim Umtrieb durch Turbinen ist ein Vorgelege hinreichend, und ebenso bei einer Dampfsägemühle.

Die **Kreis- oder Zirkelsägen**, welche aus einer gezahnten Kreisscheibe von Stahl bestehen, werden vorzugsweise zum Zerschneiden von schwachem Holze angewendet, übrigens arbeiten dieselben vortheilhafter als die Sägen mit geradem Sägeblatt. Der gewöhnliche Durchmesser dieser Sägen ist 20 bis 40 Zoll, die Dicke derselben 0,08 bis 0,12 Zoll. Wegen der Zahnschränkung fällt aber die Dicke des Sägeschnitts 0,14 bis 0,18 Zoll aus. Die Theilung oder der Abstand der Zahnspitzen von einander ist 0,6 bis 1,2 Zoll, und die Tiefe der Zähne 0,4 bis 0,8 Zoll. Die Zähne dieser Säge sind sogenannte Wolfszähne. Die Umfangsgeschwindigkeit der Säge zu 30 Fuß angenommen, folgt die Umdrehungszahl derselben pr. Minute, $u = 180$ bis 360. Die Schnittfläche, welche hier eine Pferdekraft stündlich liefert, ist 40 bis 60 Quadratfuß. Da die Kreissäge stetig arbeitet, so muß auch das Zuschieben des Holzes stetig erfolgen.

Die **Fournierschneidemaschinen** haben in der Regel nur ein und zwar entweder kreisförmiges oder ein gerades Säge-

blatt; am gewöhnlichsten werden die letzteren horizontal schneidend angewendet. Das Blatt einer geraden Fourniersäge ist gewöhnlich $4\frac{1}{2}$ Fuß lang, 4 Zoll breit und $\frac{1}{6}$ Linie dick, giebt aber einen Schnitt von $\frac{1}{3}$ Linie Dicke. Die Theilung der Säge ist 8 bis $8\frac{1}{2}$ Linien, die Länge der Zähne aber nur 4 bis $4\frac{1}{4}$ Linien, und die Tiefe derselben 3 Linien, wobei die Zahnspitzen einen Winkel von 56 Grad bilden. Während die Zähne $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{3}$ der ganzen Zahnfläche einnehmen, ist der Flächenraum der Zahnlücken $\frac{3}{4}$ bis $\frac{2}{3}$ dieser Fläche. Die Fourniere, welche man mit dieser Säge aus Mahagoni, Jakarande, Kirschbaum u. s. w. schneidet, erhalten eine Dicke von $\frac{1}{16}$ bis $\frac{1}{20}$ Zoll; rechnet man noch $\frac{1}{16}$ Zoll auf den Schnitt, so folgt, daß auf je 1 Zoll Holzdicke, 9 bis 12 Fourniere kommen. Bei einer Schnittzahl von 200 bis 250 pr. Min. giebt 1 Pferdekraft stündlich 60 bis 80 Quadratfuß Schnittfläche; das Einstellen, Befestigen u. s. w. des Holzes, Auswechseln der neu geschärften Säge u. s. w. vermindert aber die effective Schnittfläche um die Hälfte. Das Vorrücken des Holzes nach jedem Schnitte ist hier nur 0,3 bis 0,4 Linie; folglich beim Schneiden einer Bohle von 20 Zoll Dicke, die Schnittfläche pr. Schnitt, 0,50 bis 0,67 Quadratzoll und die pr. Stunde, $= \frac{3600}{144} \cdot 0,5$ $= 12,5$ bis 16,7 Quadratfuß; wonach folglich die Leistung zum Umtrieb dieser Säge circa $\frac{1}{2}$ Pferdekraft beträgt.

Eine Holzhobelmaschine hobelt bei pr. Min. 800 bis 1000 Umdrehungen der Arbeitswelle stündlich eine Fläche von 130 bis 140 Quadratfuß und beansprucht eine Leistung von $1\frac{1}{2}$ bis $2\frac{1}{2}$ Pferdekräften. Eine Nuthhobelmaschine beansprucht bei 600 Umdrehungen (pr. Min.) der Arbeitswelle, 1 Pferdekraft, und eine große Holzdrehbank oder Drehmaschine bei 300 bis 400 Umdrehungen (pr. Min.) der Drehspindel, wobei sich der Angriffspunkt mit $\frac{3}{4}$ bis 1 Fuß Geschwindigkeit bewegt, $\frac{2}{3}$ Pferdekraft.

Roheisen.

§. 118. **Eisenerze und Zuschläge.** Zur Roheisenerzeugung in Hohöfen werden folgende Eisenerze verwendet:

1. Magneteisenstein. 3 At. Eisen + 4 At. Sauerstoff = 84 Thle. Eisen + 32 Thle. Sauerstoff; enthält 72,4 Proc. Eisen, ist schwer schmelzbar und giebt ein gutes graues Roheisen, welches sich zur Stabeisen- und Stahlfabrikation eignet. Beimengungen von Blende und Kiesen (Schwefel).

2. Der Eisenglanz und der Rotheisenstein. 2 At. Eisen, 3 At. Sauerstoff = 56 Thle. Eisen + 24 Thle. Sauerstoff; enthält 70 Proc. Eisen, ist strengflüssig und giebt ein

gutes graues Roheisen. Beimengungen von Schwerspath (Schwefel).

3. Brauneisenstein. 2 At. Eisenoxyd + 3 At. Wasser = 112 Thle. Eisen + 72 Thle. Sauerstoff + 3 Thle. Wasserstoff; enthält 60 Proc. Eisen, ist leicht zu reduciren und zu schmelzen. Bei reinem Vorkommen giebt er ein gutes graues Roheisen. Beimengungen von Mangan.

4. Gelb- und Raseneisensteine sind ebenfalls Verbindungen von Eisenoxyd und Wasser, jedoch ist hier der Eisengehalt nur 40 bis 45 Proc. Beide sind leicht reducirbar und schmelzbar. Der letztere giebt ein sehr dünnflüssiges zu feineren Gußwaaren geeignetes Roheisen. Beimengung: eine kleine Menge Phosphor.

5. Spatheisenstein. 1 At. Eisenoxydul + 1 At. Kohlensäure = 28 Thle. Eisen + 24 Thle. Sauerstoff + 6 Thle. Kohlenstoff; enthält hiernach 48,3 Proc. Eisen, ist leicht schmelzbar und giebt, gehörig verschmolzen, ein weißes, besonders zur Stahlerzeugung geeignetes Roheisen. Beimengung: Mangan.

6. Thoneisenstein ist ein Gemenge von Eisenoxyd, Eisenoxydhydrat und Thon und giebt höchstens 48 Proc. Eisen. Wenn er rein von Schwefel- und Phosphorverbindungen ist, giebt er ein zu Gußwaaren geeignetes gutes Roheisen. Das in der Steinkohlenformation vorkommende Blackband ist ein durch Kohlenstoff schwarz gefärbter Thoneisenstein mit circa 45 Proc. Eisengehalt; dasselbe ist leicht schmelzbar, aber schwer reducirbar und giebt bei sorgfältigem Verschmelzen ein gutes, zur Fabrikation von sehnigem Stabeisen geeignetes Roheisen. Nicht selten von Schwefel und Phosphor verunreinigt.

Im Allgemeinen macht der Schwefel sowie Calcium das Eisen rothbrüchig, und Phosphor sowie Silicium dasselbe kaltbrüchig.

Um den Schwefel aus kiesigen Eisenerzen zu entfernen, setzt man dieselben einem mehrjährigen Verwitterungsproceß aus. Das Rösten der Eisenerze dient zum Mürbemachen der Erzstücken und zum Austreiben flüchtiger Stoffe, z. B. Schwefel, Arsenik, Kohlensäure und Wasser. Beim Rösten in Haufen schüttet man die Eisenerze mit Zwischenlagen von klarem Brennmaterial 5 bis 7 Fuß hoch auf ein 2 bis 3 Fuß hohes Bette von Holzscheiten oder Steinkohlen. Blackband brennt in Folge seines Kohlengehaltes von 15 bis 30 Proc. beim Rösten von selbst fort. In Stadeln erfolgt das Rösten gleichförmiger als in freien Haufen. Das Rösten in Oefen erfolgt:

1. Mit abwechselnder Schichtung von Erz und Brennmaterial. In diesem Falle hat der Ofen bei 14 bis 18 Fuß Höhe, oben $6^1/_2$, im Bauch $7^1/_2$, und unten am Rost nur 3 Fuß Weite. Hierbei hat sich bei schwefelhaltigen Erzen die Durchleitung von gespannten Wasserdämpfen gut bewährt.

2. Mit directer Flammenfeuerung.
3. Mit Hohofengasen.

Bei der Zerkleinerung der Erze durch Stempel- oder Hammerpochwerke, sowie durch Walzwerke oder sogenannte Quetschwerke soll das Pulverisiren so viel wie möglich vermieden werden.

Um die Eisenerze beim Verschmelzen in Hohöfen in Fluß zu bringen, werden dieselben mit besonderen Flußmitteln oder sogenannten Zuschlägen versetzt. Der gewöhnlichste Zuschlag besteht aus Kalk. Nachdem die Kohlensäure desselben durch die Ofenhitze ausgetrieben worden ist, verbindet sich die übrig bleibende Kalkerde mit der Kieselsäure und Thonerde der Eisenerze. Im Allgemeinen läßt sich annehmen, daß 100 Pfd. erzeugtes Roheisen bei Holzkohlenhohöfen, 20 bis 40 Pfd., bei Coakshohöfen aber 80 bis 100 Pfd. Kalkzuschlag nöthig machen. Die bei der Roheisenerzeugung fallenden Schlacken sind meist Singulosilicate und Bisilicate, seltener Trisilicate, mit dem Verhältniß des Sauerstoffs zur Base, = 1 : 1 und 2 : 1. Im Allgemeinen läßt sich annehmen, daß auf 100 Pfd. weißes Roheisen, 120 bis 180 Pfd., und dagegen auf 100 Pfd. graues Roheisen, 220 bis 280 Pfd. Schlacken fallen.

Nächst dem gewöhnlichen Kalkstein verwendet man auch Flußspath, Quarz, Thon u. s. w. als Zuschläge.

Ueberhaupt soll bei schwer reducirbaren Erzen die Schlacke strengflüssig, dagegen bei leicht reducirbaren Erzen leichtflüssig ausfallen.

§. 119. Brennmaterial und Wind. Das Brennmaterial bei der Roheisenerzeugung in Hohöfen ist entweder Holzkohle oder Coaks, seltener Torfkohle, rohe Steinkohle, Anthracit, Torf u. s. w.

Die stehenden Meiler, worin gewöhnlich Fichten-, Kiefern- und Buchenholz verkohlt wird, fassen 24 bis 36 Klafter Holz, à 108 Cubikfuß, und brennen 12 bis 14 Tage lang. Das Ausbringen eines Meilers ist pr. Klafter Scheitholz, 50 bis 55 Cubikfuß Kohle; dagegen pr. Cubikfuß Holzmasse im Mittel 0,48 Cubikfuß Kohlenmasse und pr. Pfund Holz 0,22 bis 0,26 Pfund Kohle. Uebrigens wiegt 1 Cubikfuß Fichten- oder Kiefernholzkohle 9 bis 10,5 Pfd. und 1 Cubikfuß Buchenholzkohle 12,5 bis 13,5 Pfd.

Bei der Vercoakung in Haufen und Meilern giebt 1 Cubikfuß Steinkohle 1,3 Cubikfuß, dagegen 1 Centner Steinkohle 56 bis 58 Pfd. Coaks. Die Vercoakung in Oefen giebt dagegen 60 bis 80 Pfd. Coaks pr. Centner Steinkohle. Uebrigens wiegt 1 Tonne Coaks 160 bis 230 Pfd. Der Appoltsche Coaksofen hat 12 einzelne Kammern in einem gemeinschaftlichen Rauhgemäuer, jede von $12\frac{3}{4}$ Fuß Höhe, 4 Fuß Länge und $1\frac{1}{2}$ Fuß Breite, wobei sie 12 Tonnen Steinkohle faßt, welche in 24 Stunden vercoakt werden.

Bei den Dampfkesseln, welche durch die abströmenden Gase der Coaksöfen erhitzt werden, ist pr. Pferdekraft eine Heizfläche von 23 bis 30 Quadratfuß zu rechnen, da hierbei nur ein Viertel der Wärme nutzbar gemacht wird, welche eine gleiche Menge Steinkohle bei directer Feuerung liefert.

Bei der Roheisenerzeugung mit kalter Gebläseluft erfordern 100 Pfd. Roheisen, je nach dem Schmelzgrade der Erze, 100 bis 200 Pfd. Holzkohlen oder 200 bis 300 Pfd. Coaks; bei Anwendung von erhitztem Winde fällt diese Zahl um ein Fünftel kleiner aus.

Die Größe einer Kohlengicht ist, je nach der Höhe des Hohofens von 25 bis 50 Fuß Höhe und der Kohlensackweite von 6 bis 14 Fuß, 12 bis 48 Cubikfuß, bei einer Dicke von 4 bis 7 Fuß.

Die Windmenge, welche einem Hohofen zuzuführen ist, soll hinreichen, um die Kohlengichten in Kohlenoxydgas zu verwandeln. Hiernach erfordert jedes Pfund Kohlenstoff nahe 5,8 Pfd. = 70 Cubikfuß Luft von 0^0 Wärme und 28 Pariser Zoll Barometerstand zur Verbrennung. Man kann auch annehmen, daß ein Hohofen pr. Quadratfuß Kohlensackfläche 20 bis 30 Cubikfuß Wind pr. Minute zum Betriebe nöthig habe.

Die nöthige Windpressung ist beim Schmelzen mit weichen Holzkohlen 1 bis $1^1/_2$ Zoll, mit harten Holzkohlen $1^1/_2$ bis $2^1/_2$ Zoll, mit leichtem Coaks 3 bis 5 Zoll, mit hartem Coaks 5 bis 10 Zoll Quecksilber = $2^1/_2$ bis 5 Pfd. pr. Quadratzoll. Zur Winderzeugung dient in der Regel ein Cylindergebläse, dessen Berechnung S. 692 u. s. w. angegeben wird.

Durch die Anwendung erhitzter Gebläseluft kann nicht nur eine Kohlenersparniß von 15 bis 30 Proc., sondern auch eine ansehnlich größere Production erlangt werden. Die Qualität des mit erhitztem Winde erzeugten Roheisens ist im Durchschnitt von dem mit kaltem Winde erzeugten Roheisen nicht verschieden. Es ist in der Regel dunkelgrau und mehr zur Gußwaaren- als zur Stabeisenerzeugung geeignet.

Die Erhitzung steigt gewöhnlich nur auf 150 bis 300 Grad. Um in der Minute einen Cubikfuß Wind auf 300 Grad zu erhitzen, ist eine Erwärmungsfläche von 0,314 Quadratfuß nöthig; soll hiernach ein Windquantum Q pr. Sec. von τ_1 auf τ_2 Grad Wärme gebracht werden, so ist die Erwärmungsfläche $S = 0{,}0628 (\tau_2 - \tau_1) Q$ Quadratfuß erforderlich.

Läßt man den Wind mit der Geschwindigkeit $v = 35$ Fuß durch die Erwärmungsröhren strömen, so ist der nöthige innere Querschnitt derselben:

$$F = \frac{Q}{v} = \frac{Q}{35} = 0{,}02857\, Q \text{ Qudrtfß.} = 4{,}114\, Q \text{ Qudrtz.}$$

Ist dieser Querschnitt ein Ring mit den Halbmessern r_1 und r_2, so hat man $F = \pi(r_1^2 - r_2^2)$ und den Umfang

der Erwärmungsfläche, $p = 2\pi(r_1 + r_2)$, wonach dann die Länge der Erwärmungsröhren zusammen:

$$l = \frac{S}{p} = 0{,}01 \frac{(\tau_2 - \tau_1)\,Q}{r_1 + r_2} \text{ Zoll folgt.}$$

Bei Heizröhren mit elliptischem Querschnitte ist, wenn a und b die Halbaxen desselben bezeichnen:

$$F = \pi a b \text{ und } p = \pi(a + b)\left[1 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{a - b}{a + b}\right)^2\right].$$

Wenn von der Verbrennungswärme des Heizapparates 50 Proc. nutzbar gemacht werden, so erfordert die Windmenge Q Cubikfuß, die Steinkohlenmenge

$$K = 0{,}00000843\,(\tau_2 - \tau_1)\,Q = 0{,}00253\,Q \text{ Pfd.}$$

oder die Holzmenge

$$K = 0{,}00001686\,(\tau_2 - \tau_1)\,Q = 0{,}00506\,Q \text{ Pfd.}$$

(vergl. §. 112).

Bei Anwendung der Gichtflamme zur Erhitzung des Windes wird natürlich dieser Brennstoffaufwand erspart.

Die Anzahl der **Düsen** ist gewöhnlich 2 bis 3, bei schottischen Hohöfen sogar 6. Der Durchmesser der Düsenöffnung mißt bei Holzkohlenhohöfen $1\frac{1}{4}$ bis $2\frac{1}{2}$ Zoll, und bei Coakshohöfen 2 bis 4 Zoll; läßt sich aber nach den Formeln in §. 46 und §. 112 genau berechnen. Die Düsenmündung liegt gewöhnlich 1 bis 6 Zoll gegen die Formmündung zurück. Die **Form**, welche den Wind direct in den Schmelzraum führt, liegt nahe horizontal, uud wird, um das Zurückströmen des Windes aus dem Schmelzraume zu verhindern, durch einen verschiebbaren Ring oft ganz geschlossen. Um das Abschmelzen der Formen zu verhindern, werden dieselben entweder durch den Wind oder durch kaltes Wasser, welches die hohlen Wände derselben durchströmt, kühl gehalten. Für einen Holzkohlenhohofen sind nach **Scholl** 20, dagegen für einen Coakshohofen, 50 Cubikfuß Wasser stündlich zum Kühlhalten der Wasserform nöthig.

§. 120. Eisenhohöfen. **Construction der Hohöfen.** Das Fundament des Hohofens steht rund herum 1 Fuß über der Grundfläche desselben vor und enthält zwei Trockencanäle von circa 1 Fuß Breite und Tiefe, welche sich in der Ofenaxe unter dem Rechtwinkel durchkreuzen. Große Coakshohöfen erhalten außerdem noch einen tiefer zu legenden circa 2 Fuß breiten und ebenso hohen Feuerungscanal. Ueber dem Fundamentraum steigen die vier Ofenpfeiler empor, welche oben in der Höhe der Rast durch die Form- und das Arbeitsgewölbe mit einander verbunden sind. Die Seite des durch diese Pfeiler gebildeten Mauerkörpers ist $2\frac{1}{2}$- bis 3mal so groß als der Kohlensackdurchmesser, die Weite der Gewölbe ist außen 10 bis 16 innen 6 bis 8 Fuß, und die Höhe der Gewölbscheitel über der Hüttensohle 8 bis 12 Fuß. In den Pfeilern steigen von den Canälen im Fundamente aus andere Trockencanäle und zwar entweder nur bis zum Rauhgemäuer oder bis zur Gicht empor.

übrigens werden die Pfeiler noch durch 3 bis 7 Ankervierecke aus $1\frac{1}{4}$ bis $1\frac{1}{2}$ Zoll dicken Eisenstäben fest zusammengehalten. Der über den Pfeilern stehende *Rauhschacht enthält* noch ringförmige und radiallaufende *Trockencanäle in verschiedenen* Höhen übereinander. *Vierkantige Rauhschächte* werden, *wie die* Fundamente, durch *eiserne Anker*, cylindrische Rauhschächte durch Reifen oder *Blechcylinder zusammengehalten*.

Das **Gestelle** wird entweder aus natürlichen Steinen oder aus künstlicher Steinmasse gebildet. Die ersteren sind *entweder* Sandsteine oder Kieselconglomerate (Puddingsteine) *oder auch talkerdereiche* Gesteine, z. B. Chlorit, Serpentin u. s. *w.; die* letztere wird aus Quarz und Thon zusammengesetzt und zwar dem Volumen nach aus 0,8 bis 0,9 Quarz- und 0,2 bis 0,1 Thonmehl. Auch verwendet man wohl 0,5 feingestampften Thon mit 0,5 alten Thonziegelbrocken als Gestellmasse. Die Rost sowie der Kernschacht und die Rauhschächte werden aus feuerfesten Thonziegeln aufgeführt und die 4 bis 6 Zoll weiten Zwischenräume zwischen diesen Schächten mit Ziegelbrocken, Hohofenschlacken, Gesteinbrocken, Asche u. s. w. ausgefüllt. Während die Dicke des Gestelles 2 bis $3\frac{1}{2}$ Fuß mißt, ist die Dicke der Kernschachtmauer unten 1 bis $1\frac{1}{2}$ Fuß und oben $\frac{3}{4}$ bis 1 Fuß. Die Schachthöhe h ist im Allgemeinen bei leicht reducirbaren und leicht schmelzbaren Erzen kleiner als bei schwer reducirbaren. Holzkohlenhohöfen haben gewöhnlich eine Höhe von 25 bis 35 Fuß, Coakshohöfen sind dagegen 40 bis 50 Fuß hoch. In der Regel ist der Kohlensackdurchmesser $d = \frac{1}{4} h$ bis $\frac{1}{3} h$. Im Allgemeinen läßt die Eisenproduction eines Hohofens in 24 Stunden, pr. Quadratfuß Querschnitt des Kohlensackes, $= \frac{4}{k}$ Centner setzen, wenn k das Verhältniß des Kohlenquantums zum Eisenquantum bezeichnet. Hiernach ist der zur Erzeugung der täglichen Eisenproduction E nöthige Querschnitt des Kohlensackes:

$$F = \frac{kE}{4} \text{ Quadratfuß,}$$

und der entsprechende Kohlensackdurchmesser:

$$d = \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot \frac{kE}{4}} = \sqrt{\frac{kE}{\pi}} = 0{,}564 \sqrt{kE} \text{ Fuß,}$$

folglich für $k = 1{,}5$, $d = 0{,}691 \sqrt{E}$ Fuß, und für $k = 3{,}0$, $d = 0{,}977 \sqrt{E}$ Fuß.

Z. B. für eine tägliche Eisenproduction von 400 Centnern ist

$d = 13{,}82$ bis $19{,}54$ Fuß.

Die Weite der Gicht ist $d_1 = 0{,}4\, d$ bis $0{,}6\, d$.

Die Gestellweite ist bei strengflüssigen Erzen und bei Erzeugung von grauem Roheisen kleiner zu machen als bei leichtflüssigen Erzen und Erzeugung von weißem Roheisen. Sie ist gewöhnlich oben $0{,}25\, d$ bis $0{,}35\, d$, und unten $0{,}21\, d$ bis $0{,}25\, d$; und zwar beim

Schmelzen mittels Holzkohle, oben 26 bis 32 Zoll, unten 16 bis 26 Zoll, dagegen beim Schmelzen mittels Coaks, oben 36 bis 48 Zoll und unten 24 bis 34 Zoll. Die Gestellhöhe mißt gewöhnlich 0,7 d bis 0,6 d und zwar 4 bis $5\frac{1}{2}$ Fuß beim Holzkohlen-, und $5\frac{1}{2}$ bis $7\frac{1}{2}$ Fuß beim Coaksschmelzen. Die Neigung der Rostfläche ist 50 bis 65 Grad, letztere vorzüglich bei strengflüssigen Erzen und Coakshohöfen. Der parallelepipedische Heerd erhält die Länge $l = 1{,}27 \sqrt[3]{E}$ Fuß, die Breite $b = 0{,}36\,l$ und die Höhe $h = 0{,}30\,l$. Die Form liegt gewöhnlich im Niveau der Grundfläche des Tümpelsteins; bei Holzkohlenhohöfen oft $1\frac{1}{2}$ bis $2\frac{1}{2}$ Zoll höher, und bei Coakshohöfen 2 bis 4 Zoll darunter. Je nach dem Flüssigkeitsgrad der Schlacke befindet sich die Oberfläche des Wallsteins $1\frac{1}{2}$ bis 3 Zoll unter der Formmündung; um das Herausblasen des Windes zu verhindern, legt man bei leichtflüssigen Schlacken die Oberfläche des Wallsteins über die Formmündung; z. B. in Belgien bis zu 10 Zoll.

Der Brennmaterialverbrauch ist bei Erzeugung von grauem Roheisen größer als bei Erzeugung von halbirtem und noch größer als bei der Erzeugung von weißem Roheisen.

Leichtflüssige Erze von 30 bis 45 Proc. Eisengehalt erfordern auf 100 Pfd. Roheisen, 70 bis 140 Pfd. Holzkohle oder 140 bis 200 Pfd. Coaks, strengflüssige dagegen bei 35 bis 50 Proc. Eisengehalt, 140 bis 280 Pfd. Holzkohle oder 200 bis 250 Pfd. Coaks. Man kann dem Volumen nach $\frac{1}{3}$ der Holzkohle durch ein gleiches Maaß lufttrockenes Holz ersetzen, ohne das Ausbringen des Hohofens zu vermindern. Ebenso kann man dem Gewichte nach 0,6 bis 0,7 Coaks mit 0,4 bis 0,3 Holzkohle zusammen aufgeben. Uebrigens ist 1 Gewichtstheil Holzkohle in der Wirkung 1,2 bis 1,55 Gewichtstheilen Coaks gleichzusetzen und anzunehmen, daß 1 Volumentheil Coaks gleich 2 bis 2,5 Volumentheilen Holzkohle ist.

Man kann auch dem Volumen nach 1 Theil Holzkohle durch 1,75 bis 2,5 Theile Torf ersetzen, wenn der Torf einen mäßigen Aschengehalt besitzt und der Torfzusatz höchstens 40 Proc. der ganzen Brennstoffgicht beträgt.

Die Gichtgase enthalten 20 bis 30 Proc. Kohlenoxydgas und liefern deshalb bei ihrer Verbrennung mit atmosphärischer Luft noch eine namhafte Wärmemenge, nämlich pr. Pfund 2400 Wärmeeinheiten. (Vergl. S. 556.)

Damit der Ofengang durch das Auffangen der Gichtgase nicht gefährdet werde, ist es nothwendig, diese Gase erst über der Gicht aufzufangen und auf die größere Heizkraft derselben, wie sie z. B. bei Puddel- und Schweißöfen nöthig ist, Verzicht zu leisten. Der Gasfang kann in einem Blechcylinder bestehen, welcher unten eine verschließbare Mündung zum Aufgeben hat und oben mit der Gasleitung in Verbindung steht. Die letztere besteht aus eisernen Röhren von $1\frac{1}{2}$ bis 2 Fuß Weite. Zur

Reinigung der Gase sind besondere Waschapparate nothwendig, und zur Verhinderung von Explosionen, sich unter höherem Drucke nach außen öffnende Ventile. Zur Verbrennung der Gase dient entweder atmosphärische oder Gebläseluft. Die Heizkraft der Gichtgase eines Hohofens reicht aus, um den nöthigen Dampf zum Umtrieb des Gebläses zu liefern und den Gebläsewind auf 250 bis 300° R. zu erwärmen. Uebrigens kann man auch die Gichtgase zum Rösten der Erze, zu Trockenkammern u. s. w. verwenden.

§. 121. Umschmelzen und Eigenschaften des Roheisens. Das Umschmelzen des Roheisens erfolgt bei kleinen Quantitäten in Tiegeln, gewöhnlich aber in Kupolöfen; beim Gusse großer Stücke auch in Flammöfen. Die Schachthöhe der Kupolöfen mißt bei Coaksfeuerung 5 bis 10 Fuß, bei Holzkohlenfeuerung aber 12 bis 18 Fuß, und die mittlere Schachtweite ist bei kleinen eintüsigen Oefen $1\frac{1}{2}$ bis 2 Fuß, bei Anwendung von mehreren Formen, sowie bei leichtflüssigem grauen Roheisen und guten Coaks, 3 bis 5 Fuß. In neueren Zeiten macht man die Kupolofenschächte an der Gicht $\frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{4}$ weiter als am Boden. Die Formen liegen bei Holzkohlenöfen 1 bis $1\frac{1}{4}$, bei Coaks und starker Windpressung $1\frac{1}{2}$ bis 2 Fuß über dem Boden. Bei Anwendung von mehreren Formen erfolgt ein gleichmäßigeres Schmelzen. Der Schacht wird von außen von einem Eisenmantel umgeben und im Innern theils aus feuerfesten Thonsteinen theils aus feuerfester Masse ausgeführt. Sehr bequem sind auf Rädern ruhende, und zum Auseinandernehmen eingerichtete transportable Kupolöfen.

Zum Umschmelzen von 100 Pfd. Roheisen, hat man, je nachdem dasselbe leicht- oder strengflüssig ist, der Ofen eine größere oder kleinere Höhe hat und je nachdem man mit kaltem oder mit erhitztem Wind schmilzt, $4\frac{1}{2}$ bis 7 Cubikfuß = 30 bis 60 Pfund Holzkohle oder 15 bis 30 Pfd. Coaks nöthig. Kleinere Gichten zu je 100 Pfd. Roheisen erfordern weniger Brennmaterial als große von 300 bis 400 Pfd. Als Flußmittel verwendet man pr. 100 Pfd. Eisen, 3 bis 5 Pfd. Kalk.

Der Eisenabgang beträgt 4 bis 7 Proc. Um denselben großentheils wieder zu gewinnen (zerstößt) läßt man die Kupolofenschlacken wie die Hohofenschlacken durch Pochwerke.

Die Windpressung ist gewöhnlich nur 6 bis 9 Zoll Wassersäule kann aber unter gewissen Umständen auf das Doppelte steigen. Die Windmenge pr. Centner stündlich umzuschmelzendes Roheisen ist 2000 bis 5000 Cubikfuß. Ein Kupolofen faßt gewöhnlich 10 bis 50 Centner Eisen, bei ungewöhnlicher Höhe und Weite und mehrfachen Formen über einander, jedoch auch 100 bis 800 Centner. Die Dauer eines Schachtfutters ist 25 bis 30 Schmelzungen. Die stündliche Production 15 bis 36 Centner.

Durch Zusetzen von Schmiedeeisen wird die Festigkeit des umgeschmolzenen Roheisens gesteigert.

Die **Flammöfen** zum Umschmelzen des Roheisens fassen gewöhnlich 40 bis 120 Centner Roheisen. Die Heerdlänge derselben mißt 11 bis 15 Fuß, die Breite in der Mitte, 4 bis $5\frac{1}{2}$ Fuß, am Fuchs $2\frac{1}{4}$ bis $3\frac{1}{4}$ Fuß, die Höhe über der Feuerbrücke $1\frac{1}{3}$ bis $2\frac{2}{3}$ Fuß und am Fuchs $1\frac{1}{6}$ bis $1\frac{5}{6}$ Fuß. Die Esse ist, bei 40 Fuß Höhe, innen gewöhnlich 16 bis 21 Zoll lang und breit. Um 1 Centner Roheisen umzuschmelzen, sind 40 bis 80 Pfd. Steinkohlen oder 6 bis 7 Cubikfuß Holz oder 9 bis 12 Cubikfuß gedarrter Torf nöthig. Der Eisenabgang ist hier 6 bis 12 Proc.

Die totale Rostfläche ist ein Viertel der Heerdfläche und zwar 15 bis 25 Quadratfuß; die freie Rostfläche mißt dagegen 0,6 der totalen, also 9 bis 15 Quadratfuß. Die durch den Rost zuströmende Windmenge ist pr. Pfund Steinkohle, 300 Cubikfuß und pr. Centner Eisen, 6000 Cubikfuß.

Graues Roheisen enthält chemisch 1 Proc. Kohle und mechanisch 1 bis 4 Proc. Graphit, **weißes Roheisen** dagegen bloß 1 bis 3 Proc. Kohlenstoff chemisch gebunden; jenes wird bei großer Hitze und bedeutendem Kohlenaufwand, dieses dagegen bei schwacher Hitze und Mangel an Brennstoff erzeugt. Das graue Roheisen Nr. I. enthält die größte Menge Graphit, ist leicht schmelzbar und giebt feine und scharfe, aber weniger harte und feste Gußwaaren, das graue Roheisen Nr. II. liefert Gußwaaren von größerer Härte und Festigkeit und Nr. III. sowie Nr. IV. eignet sich wegen seiner großen Härte und Festigkeit besonders zu großen Ausführungen aus Gußeisen. Das körnige weiße Roheisen läßt sich durch Umschmelzen und langsames Abkühlen in graues Roheisen umwandelu, ebenso wie graues Roheisen durch Umschmelzen und plötzliches Abkühlen in körniges weißes Roheisen übergeht. Das sehr schwer zu schmelzende krystallinische weiße Roheisen läßt sich auf diese Weise nicht in graues Roheisen umwandeln und ist wegen seiner Sprödigkeit im Bau- und Maschinenwesen nicht zu verwenden. Dies ist in gewissem Grade noch bei dem körnigen weißen Roheisen der Fall, man giebt aber oft beim Gusse durch Abkühlung in eisernen Formen dem grauen Roheisen eine $\frac{1}{8}$ bis $\frac{3}{8}$ Zoll dicke Haut aus weißem Roheisen.

Die Festigkeit des Roheisens läßt sich durch wiederholtes Umschmelzen bedeutend steigern. Graues Roheisen nimmt durch wiederholtes Erhitzen und Abkühlen nach und nach um 9 bis 12 Proc. an Volumen zu.

Das specifische Gewicht des grauen Roheisens ist $\varepsilon = 6{,}64$ bis 7,57, das des weißen, $\varepsilon = 7{,}06$ bis 7,89 und das des halbirten, $\varepsilon = 6{,}83$ bis 7,43 (**Karmarsch**).

Der Elasticitätsmodul des grauen Roheisens ist $E = 12'000000$ bis 22'000000 Pfd, der Festigkeitsmodul des Zerreißens $K_1 =$ 12000 bis 18000 Pfd.; der des Zerdrückens $K_2 = 60000$

bis 100000 Pfd., der des Zerbrechens $K_3 = 30000$ bis 40000 Pfund, und der des Abwürgens, $K_4 = 27000$ Pfund.

Das feste Roheisen ist im Augenblicke des Schmelzens leichter als das flüssige; deshalb schwimmt es auch auf dem letzteren und deshalb füllt auch das flüssige Roheisen beim Erstarren die Formen sehr scharf aus. Dagegen zieht es sich später beim Erkalten wieder um $\alpha = \frac{1}{96}$ oder circa 1 Proc. zusammen. Aus diesem Grunde sind alle Dimensionen der Gußmodelle um 1 Proc. größer zu machen als die verlangten Dimensionen der Gußwaare. Werden die Gußstücke noch abgedreht oder abgehobelt u. s. w., so muß man der verlangten Dimension a noch $\beta = 0{,}001\, a + 0{,}15$ Zoll zusetzen, also dem Gußmodelle die entsprechende Dimension $a_1 = 1{,}001\, a + 0{,}15$ Zoll geben. Für auszubohrende und auszuschleifende Gußstücke hat man dagegen

$a_1 = 1{,}01\, a - (0{,}001\, a + 0{,}15) = 1{,}009\, a - 0{,}15$ Zoll

zu machen.

Bezeichnet G das absolute und ε das specifische Gewicht des Gußeisens, sowie G_1 und ε_1 das absolute und specifische Gewicht des Modells, so hat man für rohe Gußstücke:

$$\frac{G}{G_1} = (1 - 3\,\alpha)\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = 0{,}967\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1},$$

und dagegen für abzuarbeitende Gußstücke

$$\frac{G}{G_1} = [1 - 3\,(\alpha \pm \beta)] \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = [0{,}967 \mp (0{,}003\, a + 0{,}45)]\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}.$$

§. 122. Formerei und Giesserei. Die Formerei liefert entweder Sandguß, Lehmguß oder Schalenguß.

Der Sand zum Sandguß ist entweder magerer oder fetter. Der magere Formsand ist thonhaltiger Quarzsand und besteht aus 92 Proc. Kieselerde, $5\frac{1}{2}$ Proc. Thonerde und $2\frac{1}{2}$ Proc. Eisenoxyd, der fette Formsand enthält weniger Kieselerde und mehr Thonerde, vielleicht 86 Proc. Kieselerde und $10\frac{1}{2}$ Proc. Thonerde und $3\frac{1}{2}$ Proc. Eisenoxyd. Der magere Sand wird im feuchten Zustande verwendet und heißt deshalb gewöhnlich nasser oder grüner Sand; es wird daher auch das Eisen in der Sandform schnell abgekühlt und dadurch an der Oberfläche gehärtet. Damit sich das beim Gusse entwickelnde Wasserstoffgas, sowie der entstehende Wasserdampf leicht entferne, sind Luftabzüge (Windpfeifen) anzubringen. Die Gußmodelle für den Sandguß müssen, wenn sie, wie gewöhnlich, aus Holz bestehen, ausgetrocknet und sorgfältig zusammengefügt sein; seltener bestehen sie aus Eisen, Messing, Blei, Gyps u. s. w. Flache und nicht an allen Seiten besonders geformte Gegenstände werden durch Heerdguß, dagegen Gegenstände, welche rundum eine besondere Form haben, durch Kastenguß hergestellt. Der Formsand ist bei dem Heerdguß, dem Volumen nach, mit $\frac{1}{3}$, bei der Kastenformerei, wo eine stärkere Bindekraft nöthig ist,

dagegen höchstens mit $1/_{15}$ Kohlenpulver zu versetzen. Die Formkästen bei dem Kastenguß sind offene parallelepipedische Kästen aus Holz oder Eisen und werden je zwei- oder dreifach auf einander gesetzt, bestehen also im letzteren Falle aus je einem Unter-, Mittel- und Oberkasten. Um das Zusammenkleben der Kästen zu verhindern, sind die Berührungsflächen mit trockenem Sand oder Ziegelmehl zu bestreuen. Die Formen werden vor dem Einsetzen mit Kohlenstaub bepudert. Nach dem Einstampfen des Sandes werden auch noch schwache Spieße eingestochen, welche bis in die Formhöhlung reichen, und nach dem Herausziehen die sogenannten Windpfeifen zurücklassen. Das Gießloch muß beim Eingießen des Gußeisens mittels der Gießpfanne die höchste Stelle des Gusses einnehmen. Um einen größeren Druck der flüssigen Eisenmasse und dabei ein dichteres Gußstück zu erhalten, ist das Gießloch möglichst hoch zu legen und daher der Gegenstand aufrecht zu gießen. Die Kastengießerei dient sowohl zum Gusse massiver als auch zum Gusse hohler Gegenstände. Sehr oft wird das Modell in zwei Hälften zerschnitten, jede Hälfte in einem besonderen Kasten eingeformt und dann der eine Kasten umgestürzt auf den andern gesetzt. Hohle Gegenstände, z. B. Röhren, werden mittels eines Kernes gegossen (Kernguß), welcher von einer mit Stroh und Lehm umgebenen Eisenstange oder Eisenröhre gebildet wird. Bauchige Gefäße werden mittels doppelt zerschnittener Modelle in viertheiligen Kästen geformt.

Von besonderer Wichtigkeit ist das Modelliren und Formen der Zahnräderwerke. Die Modelle zu den Radkränzen werden aus Ringen oder sogenannten Felgen mit dem nöthigen Fugenwechsel zusammengesetzt und durch Tischlerleim fest mit einander verbunden. Diese Felgen sind aus Brettern von 1 bis $1^1/_2$ Zoll Dicke zu schneiden. Nach gehörigem Trocknen wird der sogenannte Zahnkranz auf der Drehbank abgedreht, am äußeren Umfang mit der nöthigen Zahntheilung versehen und zuletzt werden die Zahnmodelle aufgenagelt oder mittels Schwalbenschwänzen eingesetzt. Die Radnabe wird aus zwei abgedrehten Holzstücken zusammengesetzt, und der Zwischenraum durch die sectorförmigen Armenden ausgefüllt. Zur Verbindung des Armsternes werden die letzteren noch mit Nuthen versehen und Holzzungen in die letzteren eingesetzt. Die Quernerven werden zu beiden Seiten der Hauptarme auf- und in die Einschnitte eingeleimt, welche für dieselben im Radkranz und in der Nabe angebracht sind. Endlich setzt man noch an die Endflächen der letzteren zwei conische Holzstücke an, welche zur Aufnahme der Enden des Kerns dienen, und zieht schließlich einen eisernen Bolzen längs der Axe durch das ganze Mittelstück. Die Modelle von Rädern mit hölzernen Zähnen erhalten statt der Zähne kurze Ansätze, welche nur dazu dienen, durch Eindrücke in Sand die Orte zu bezeichnen, wo die Kerne für die Zahnlöcher hinzuliegen kommen. Diese Kerne werden aus besonders zubereiteter Masse in aus zwei oder drei Holzstücken gebildeten Räumen eingeformt.

Die Kränze von den Modellen conischer Räder werden ebenfalls aus Brettfelgen zusammengesetzt, nur stehen hier die einzelnen Kränze anfangs stufenförmig über einander vor. Nachdem die Stirnflächen eben abgedreht sind und das Gehrungsmaaß angelegt ist, wird auch die äußere Umfläche conisch abgedreht, wobei natürlich auch die Stufen wegkommen. Später werden die conischen Stirnflächen nach dem Rechtwinkel abgedreht und wird die innere conische Umfläche zugerichtet. Die Zahnmodelle sind mittels Schwalbenschwänze in den Holzkranz einzusetzen. Die nöthige Anschließung des Modells der äußerlich conisch zu formenden Nabe, sowie vor der kleineren Stirn des Rades anzubringenden Armsternes erfolgt im Wesentlichen wie bei den Stirnrädern. Ebenso ist das Modelliren und Einformen eines conischen Rades mit Holzzähnen, ähnlich wie bei einem Stirnrade mit dergleichen Zähnen; es werden auch hier Ansätze in die conische Umfläche eingesetzt, und die für die Zahnlöcher besonders zugerichteten Kerne mit ihren Köpfen in die von diesen Ansätzen gemachten Eindrücke eingelegt.

Um dem Formsand und dem Kohlenpulver die gehörige Feinheit zu geben, bedient man sich besonderer Sand- und Kohlenmühlen. Eine solche Mühle besteht aus einem rotirenden gußeisernen Teller von circa 6 Fuß Durchmesser und aus zwei gußeisernen Cylindern von $2\frac{1}{2}$ Fuß Durchmesser und 1 Fuß Länge, welche um eine festliegende horizontale Welle drehbar sind. Dieselbe besteht auch wohl nur in einer um eine horizontale Axe laufenden Trommel und drei bis fünf eisernen Kugeln, welche mit den zu zerreibenden Kohlenstücken in der Trommel einige Stunden lang eingeschlossen werden.

Der Masseguß oder der Guß im fetten Sande muß in eisernen Kästen erfolgen, weil hier die fertigen Formen vor dem Gebrauche erst durch Feuer oder in einer Trockenstube gut getrocknet werden müssen, damit sich bei dem Eingießen keine explodirenden Gase entwickeln.

Der Lehmguß bedarf weder eines Formkastens noch einer Form. Der hierzu verwendete Lehm ist ein Gemenge aus vielem Thon und wenig Sand, und wird überdies noch nach gehöriger Reinigung und Anfeuchtung mit Strohhecksel, Kuhhaaren, Pferdemist u. s. w. vermengt. Das Verfahren der Lehmformerei besteht in der Herstellung des Kerns, in dem Auftragen des Hemdes (Modells) und dem Auftragen des Mantels; ferner im Zerschneiden und Abnehmen des letzteren, in der Zerstörung des Hemdes und dem Wiederansetzen des Mantels. In der Regel werden auf diese Weise Körper mit kreisförmigen Querschnitten gegossen und die Formen mittels zweier an einer verticalen Axe befestigten Schablonen abgedreht. Uebrigens ist es nöthig, jede aufgetragene Lehmschicht, sowie am Ende den Kern sammt Mantel, durch ein hineingemachtes Feuer oder in einer Trockenkammer, bei 150° bis 200° C. besonders zu trocknen. Auch ist es nöthig, sowohl den Kern als auch das Hemd nach

der Vollendung mit in Wasser eingerührter Asche zu bepinseln, damit sich der Mantel vom Hemde und letzteres vom Kern leicht ablösen lasse. Nach dem Darren werden zuletzt noch Kern und Mantel mittels Leimwasser mit Kohlenstaub bestrichen. Die nöthigen Eingüsse und Windpfeifen werden aus Lehm besonders angefertigt und in den Mantel eingesetzt.

Die Lehmformerei macht die Anwendung einer Lehmmengemaschine nöthig, welche in einer mit Messern versehenen und in einem Bottich umlaufenden stehenden Welle besteht.

Die gußeisernen Formen oder Schalen, in welchen der sogenannte **Schalenguß** erfolgt, sind vor dem Gusse zu erwärmen und mit Reißblei oder Steinkohlentheer zu bestreichen. Einen Hauptgegenstand des Schalengusses bilden die sogenannten **Hartwalzen** für Eisenwalzwerke. Da es hier darauf ankommt, daß nur der Walzenkörper durch das schnelle Abkühlen beim Gusse eine harte Rinde erhalte, so sind die Zapfen der Walze in fettem Sande besonders einzuformen. Man stellt hier den innen gut ausgebohrten Formcylinder, dessen Wände den dritten Theil der inneren Weite zur Dicke haben müssen, unten auf den Formkasten für den einen Zapfen, setzt dann den Formkasten für den anderen Zapfen oben auf und leitet das flüssige Eisen in zwei Punkten durch eine Lehmröhre tangential in den unteren Formkasten, so daß es genöthigt ist, in der ganzen Form schraubenförmig emporzusteigen, und die Schlacken und andere Unreinigkeiten oben abzustoßen. Gewöhnlich verwendet man hierzu halbirtes Roheisen.

Nach dem Gusse bedürfen die Gußstücke noch einer Zurichtung, namentlich sind die Gußnähte und Grundflächen der abgeschlagenen Gußzapfen durch harte gußeiserne Feilen oder durch Abschleifen abzuarbeiten. Nächstdem werden die Gußwaaren zuweilen auch geschwärzt oder mit Oel bestrichen; oft natürlich auch besonders bearbeitet. Um den Gußwaaren einen gewissen Grad von Weichheit zu geben, werden sie auch **aducirt** oder **angelassen**, d. i. erhitzt und allmälig abgekühlt. Wenn man das Gußstück bei der Erhitzung noch in Eisenoxyd oder Eisenoxydul einhüllt, so geht noch ein Theil Kohlenstoff aus dem Eisen auf diese Hülle über, und es entsteht dadurch das **hämmerbare Gußeisen**.

Die **Darrkammern** zum Trocknen der Formen sind 12 bis 20 Fuß lang, 10 bis 12 Fuß breit und 6 Fuß hoch, und werden durch innere oder durch äußere Feuerung erhitzt. Auch stellt man wohl den Boden der Trockenkammern aus Eisenplatten her und läßt die Wärme von unten durch Zwischenräume eintreten. Die **Schleifsteine** zum Abschleifen der Gußwaaren bestehen aus Sandsteinen von 4 Fuß Durchmesser und $1/2$ bis $2/3$ Fuß Breite, werden aber bis auf 2 Fuß Durchmesser abgenutzt. Die Bewegung dieser Steine erfolgt in der Regel durch Riemen, wobei die Umfangsgeschwindigkeit 12 bis 15 Fuß beträgt.

Zum Heben und Fortbewegen der Formen und Formkästen,

sowie zum Transport der gefüllten Gießpfannen und Wegschaffen großer Gußstücke werden besondere Gießereikrahne angewendet, welche eine Tragfähigkeit von 20 bis 200 Centner besitzen. Die Krahnsäule sowie der Schnabel und die Verbindungsstreben sind gewöhnlich von Holz, das Uebrige aber ist aus Eisen, namentlich aus Schmiedeeisen. Der untere Zapfen ruht in einem Fußlager und der obere in einem Seitenlager, welches am Dachgebälke zu befestigen ist. Der Schnabel hat eine Länge von 12 bis 18 Fuß, und gestattet eine Verschiebung des Rollwagens oder der sogenannten Katze, von 3 bis 6 Fuß. Damit man die Lasten auf größere Entfernungen fortschaffen könne, ist es nöthig, mehre Krahne anzuwenden, welche einander zufördern können. Um die Last mittels einer mäßigen Kraftanstrengung heben zu können, bringt man nicht allein an der Säule ein doppeltes Zahnradvorgelege, sondern auch noch an der Katze einen Klobenzug an, womit die Last ergriffen wird. Den Wagen bewegt man ebenfalls durch eine Kurbel und zwar mittels conischer Zahnradvorgelege und einer gezahnten Stange sammt Getriebe.

§. 123. Weissmachen des Roheisens. Das weiße Roheisen ist wegen seines geringeren Kohlenstoffgehaltes zur Erzeugung von Stabeisen besonders geeignet, weshalb man sehr gewöhnlich das graue Roheisen vor dem Vorfrischen desselben erst in weißes verwandelt. Das Weißmachen des Roheisens läßt sich zwar schon durch plötzliches Abkühlen im Wasser, sowie durch Glühen unter Luftzutritt (Braten) bewirken, wird aber vollständiger durch wirkliches Umschmelzen erlangt. Dieses Umschmelzen erfolgt bei dem sogenannten Hartzerrinnen in einem gewöhnlichen Frischheerde, und liefert in 3 bis $3^1/_2$ Stunden mit 40 Cubikfuß Holzkohlen, bei 5 bis 6 Proc. Abgang, circa 5 Centner Eisen. Das Weißmachen des Roheisens in Flammöfen erfolgt entweder mit Steinkohlen oder mit Torf. Der Heerd wird von einer 8 bis 10 Zoll dicken Sandschicht gebildet, und hat bei einer Länge von $3^1/_2$ bis 5 Fuß und einer Breite von 2 bis 3 Fuß, in der Mitte nahe 1 Fuß Tiefe. Man trägt entweder das Eisen in Sätzen von 8 Centner flüssig aus dem Ofen auf, oder schmilzt auf demselben 16 Centner starres Roheisen auf einmal ein. Im ersteren Falle hat man pr. Centner Roheisen 50 Stück Torf, im zweiten 1 Cubikfuß Steinkohlen nöthig; die Dauer des Processes ist im ersten Falle 2, im zweiten 3 bis 4 Stunden. Die Zuschläge bestehen gewöhnlich aus Frischschlacken, nach Befinden auch aus Bohnenerz und Braunstein.

Der englische Feineisenheerd wird durch eine 1 bis $1^1/_4$ Fuß dicke Thonschicht gebildet, und erhält bei 4 Fuß Länge und $3^1/_4$ Fuß Breite eine Tiefe von $^2/_3$ bis 1 Fuß. Der Wind wird durch 2 bis 8, unter dem Winkel von 20 bis 40 Grad geneigte Formen auf den Heerd geleitet. Das erforderliche Windquantum beträgt bei 2 bis $2^1/_2$ Pfd. Ueber-

druck, je nach der Anzahl der Formen, 600 bis 1200 Cubikfuß pr. Min. Nachdem das Brennmaterial, welches gewöhnlich aus Coaks, seltener aus Holzkohle besteht, in Gluth gekommen ist, setzt man 20 bis 25 Centner Eisen ein, und sticht dasselbe nach circa 3 Stunden ab. Der Abgang beträgt 10 bis 15 Proc., und der Brennmaterialaufwand ist pr. Centner 45 bis 65 Pfd.

Die Verwendung von brennbaren Gasen statt der festen Kohle ist auch hier von Vortheil. Diese Gase bestehen hauptsächlich aus Kohlenoxydgas, und werden gewöhnlich aus schlechten Brennmaterialien, z. B. aus Abfällen von Holz, Steinkohlenklein, sowie aus Torf, Tannenzapfen u. s. w. erzeugt. Die Oefen zur Erzeugung dieser Gase sind entweder Zug- oder Gebläsegeneratoren. Bei den ersteren dient die atmosphärische Luft, bei den letzteren aber der, und zwar in der Regel erhitzte, Gebläsewind zur Erzeugung der Gase. Meistens erfolgt die Verbrennung des 3 bis 4 Fuß hoch aufgeschütteten Brennmaterials auf einem Rost; bei vielen Gebläsegeneratoren auch ohne denselben, indem der Wind unmittelbar in das Brennmaterial bläst. Die Luft oder der Wind, welcher zur Verbrennung der erzeugten Gase dient, wird in der Nähe der Feuerbrücke durch eine Menge von kleinen oder eine lange schmale Oeffnung mit dem Gasstrome zusammen geführt. Bei dem Gasfeinofen von Eck wird das Gas mittels Gebläseluft aus Steinkohlenklein in einem Schachtofen von $6^1/_2$ Fuß Höhe und 6 bis 7 Quadratfuß Querschnitt erzeugt, während der Heerd in der Mitte 54 Zoll lang und $20^1/_2$ Zoll breit ist. Man arbeitet auf diesem Heerde in je acht Stunden, 40 Centner graues Roheisen durch, wobei 7 Proc. Abgang stattfindet, und 1,3 Cubikfuß Steinkohle, sowie 1 Pfd. Kalkstein nöthig ist.

§. 124. Erzeugung des Frischeisens. Das Heerdfrischen. Unter den verschiedenen Frischmethoden ist das deutsche Heerdfrischen am verbreitetsten. Der Feuerraum wird hier durch vier gußeiserne Platten oder sogenannte Zacken gebildet; er hat bei einer Tiefe von 8 bis 10 Zoll, eine Breite von 24 bis 28 Zoll und eine Länge von 24 bis 32 Zoll. Die kupferne Form, durch welche der Wind in den Feuerraum geführt wird, hat eine halbkreisförmige Mündung von $1^1/_2$ bis 2 Zoll Weite und von 1 bis $1^1/_2$ Zoll Höhe. Dieselbe ist 10 bis 15 Grad geneigt und ragt mit ihrem Rüssel $2^1/_2$ bis 3 Zoll im Feuerraume vor. Die Windpressung ist im Mittel $^1/_2$ Pfd. und die Windmenge pr. Min. 150 bis 300 Cubikfuß. Erhitzter Gebläsewind ist von Vortheil. Zur Erzeugung von 1 Centner Stabeisen sind 16 bis 23 Cubikfuß Holzkohlen nöthig. Der Einsatz zu einem Frischen ist $2^1/_4$ bis 3 Centner, und die wöchentliche Production, 50 bis 70 Centner, wobei 20 bis 28 Proc. Eisenabgang stattfindet.

Durch das sogenannte Anlaufen erhält man eine feinere Qualität Schmiedeeisen. Das Ausschmieden erfolgt gewöhnlich

durch Aufwerfhämmer oder auch durch schwere Schwanzhämmer (s. S. 701 u. 702). Das Gebläse eines Frischfeuers nimmt etwa 2, und der Hammer 5 Pferdekräfte in Anspruch.

Stabeisenerzeugung in Flamm- oder Puddelöfen. Zum Betrieb dieser Oefen verwendet man rohe Steinkohlen, Braunkohlen, Holz und Torf. Wegen des großen Wassergehaltes sind letztere Brennstoffe vor dem Gebrauche in besonderen Darröfen stark zu trocknen. Dieses Trocknen erfolgt entweder direct durch einen heißen Luftstrom oder indirect durch eine Leitungsröhre, welche die heiße Luft durchströmt. Die Heizung kann mittels der Puddelöfen selbst oder mittels heißer Gebläseluft erfolgen.

Bei den einfachen Puddelöfen beträgt der Einsatz 4 bis $4\frac{1}{2}$ Centner, bei den doppelten aber $7\frac{1}{2}$ bis 9 Centner, und das Gewicht der Luppen je $\frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{4}$ Centner. Rohes Brennmaterial wird entweder auf Planrosten mit einfachen schmiedeeisernen Stäben oder auf einem sogenannten Treppenrost mittels Zugluft, brennbare Gase werden dagegen in der Nähe der Feuerbrücke mittels Gebläseluft verbrannt. Der einfache Puddelheerd wird über einer gußeisernen Heerdplatte und zwischen hohlen gußeisernen Wandungen aus Garschlacke geschlagen, und hat bei einer Länge von 5 bis 7 Fuß, eine mittlere Breite von 3 bis 4 Fuß und eine Höhe von 2 bis $2\frac{1}{4}$ Fuß. Die Rostfläche ist 0,4 bis 0,5 der Heerdfläche und zwar $7\frac{1}{2}$ bis 10 Quadratfuß. Der Querschnitt des freien Raumes über der Feuerbrücke ist 0,36 der Rostfläche, und der des Fuchses 0,1 derselben. Der Eisenabgang beträgt 6 bis 12 Proc. Der Brennmaterialaufwand ist pr. Centner Luppeneisen 60 bis 100 Pfd. Steinkohlen, oder beim Gaspuddeln 120 bis 140 Pfd. Braunkohlen oder 8 bis 10 Cubikfuß Fichtenholz, oder 12 bis 17 Cubikfuß lufttrockener Torf. Die Dauer eines Garmachens ist bei Verwendung von grauem Roheisen, 2 bis $2\frac{1}{2}$ Stunden, bei Verarbeitung von weißem Roheisen, $1\frac{1}{2}$ bis 2 Stunden. Ein einfacher Puddelofen liefert im ersten Falle wöchentlich 200, im zweiten aber 280 bis 300 Centner Puddeleisen. Die von den Puddelöfen abziehende Flamme wird größtentheils zur Dampferzeugung für den Betrieb des Walzwerks und anderer Arbeitsmaschinen benutzt. Ein einfacher Puddelofen heizt einen Dampfkessel von 32 bis 36 Fuß Länge und $3\frac{1}{2}$ Fuß Durchmesser, wobei er eine Heizfläche von 200 bis 250 Quadratfuß und ein Heizvermögen von 12 bis 15 Pferdekraft hat. Während bei der gewöhnlichen Kesselheizung 1 Pfd. Steinkohle 5 bis 7 Pfd. Dampf giebt, wird hier nur 3,5 bis 4 Pfd. Dampf erlangt.

Die Verwendung des flüssigen Roheisens zum Puddeln findet nun eine allgemeinere Anwendung. Es gehört hierher das Puddeln des aus einem Kupolofen fließenden Eisens, wie es in Hörde ausgeübt wird, sowie auch der Bessemer'sche Proceß, wo das geschmolzene Roheisen in einen Kessel geleitet und durch einen starken Luftstrom des überflüssigen Kohlenstoffes sowie des Siliciums beraubt wird.

Bei Verwendung von gutem Roheisen werden hier binnen 10 Minuten 15 bis 20 Centner Roheisen gar gemacht, wobei aber eine Windmenge von 800 bis 1200 Cubikfuß pr. Min. mit einem Ueberdruck von $\frac{1}{2}$ bis $1\frac{1}{2}$ Atmosphären nöthig ist und ein Eisenabgang von 18 bis 22 Proc. mit stattfindet.

§. 125. **Verarbeitung des Stabeisens.** Die Schweißöfen, welche zum Erhitzen des Eisens für die weitere Bearbeitung desselben dienen, haben nahe dieselben Dimensionen wie die Puddelöfen. Man wendet auch hier Gasfeuerung mit Vortheil an. Der Eisenabgang ist 10 bis 15 Proc. und der Verbrauch an Brennmaterial ist pr. Centner 70 bis 80 Pfd. Steinkohlen, oder 6 bis 8 Cubikfuß Holz, oder 10 bis 18 Cubikfuß Torf. Die Heizkraft der Schweißofenflamme ist noch größer als die der Puddelofenflamme. 1 Pfd. Kohle liefert 4 bis 5 Pfd. Dampf. Es steigert sich deshalb auch die Leistungsfähigkeit eines durch die Schweißofenflamme erhitzten Dampfkessels auf 20 Pferdekräfte. Der Einsatz wiegt circa 10 Centner, die Dauer des Schweißprocesses ist zwei Stunden und die Production in 24 Stunden beträgt 150 Centner.

Das Zängen der aus dem Puddelofen kommenden Luppen erfolgt gewöhnlich durch Luppenquetscher, Stirn- und Dampfhämmer. Die den Hämmern vorzuziehenden Quetscher sind entweder einfach- oder doppeltwirkend und werden entweder direct oder indirect, und zwar mittels eines Krummzapfens durch eine Dampfmaschine in die nöthige Auf- und Niederbewegung gesetzt. Der mittlere Hub der Quetschbahn ist 10 bis 12 Zoll und die Anzahl der Spiele der Maschine pr. Min. 50 bis 80. Die Luppe wird durch 15 bis 25 Schläge bis auf ein Eisenstück von 18 Zoll Länge und 5 Zoll Dicke zusammengedrückt. Der Kraftbedarf eines Luppenquetschers ist 10 Pferdekräfte. Der Stirnhammer erhält ein starkes Fundament von Holz und wiegt im Ganzen circa 800 Centner, während der Quetscher nur 400 Centner Gewicht hat. Der eigentliche Hammer sammt Heber wiegt 80 bis 120 Centner. Beinahe eben so schwer ist der Amboßstock und der Wellkranz. Der Hub eines solchen Hammers ist 16 Zoll und die Anzahl seiner Spiele pr. Minute 70 bis 90. In der Regel erhält die Luppe binnen 18 bis 25 Sec. 15 bis 25 Schläge. Der Kraftbedarf eines Luppenhammers ist 12 bis 15 Pferdekräfte. Die tägliche Leistung beträgt wie beim Quetscher, 250 bis 300 Centner. Die Dampfhämmer werden nicht bloß zum Zängen der Luppen, sondern auch zum Ausschmieden großer Eisenstücke verwendet. Die Wirkung des Dampfes ist hier eine directe, indem er den Stempel oder Hammer entweder bei feststehenden Dampfcylindern mittels des Dampfkolbens, oder bei feststehendem Dampfkolben mittels des Dampfcylinders, der hier mit dem Hammer ein Ganzes bildet, emporhebt. Es ist sehr zweckmäßig, den ganzen Hammer in einer 10 Zoll dicken, durch den feststehenden Dampfcylinder

hindurchgehenden Kolbenstange bestehen zu lassen. Die Handsteuerung dieser Hämmer ist die gewöhnliche und erfolgt häufig mittels des Wilson'schen Drehschiebers. Die Chabotte oder das Fundament des Amboßes besteht aus Holzwerk, während die Ständer des Hammergerüstes auf solidem Mauerwerk ruhen. Die Kraft des niederfallenden Stempels vergrößert man gewöhnlich noch durch Zulassen von Oberdampf. Das Gewicht eines Dampfhammers zum Zängen ist 25 bis 30 Centner, der Hub desselben 2 bis 3 Fuß, und die Anzahl der Schläge, je nach der Größe des Hubes, pr. Min. 60 bis 180. Bei einer Leistung von 10 Pferdekräften reicht ein solcher Hammer für 10 bis 12 Puddelöfen aus. In der Regel erhält eine Luppe nur 40 bis 50 Schläge.

Das Zängen mittels rotirender Cylinder durch die sogenannten Luppenmühlen von Burden, sowie das von Brown hat noch keine allgemeine Anwendung gefunden.

Das Puddel- oder Luppenwalzwerk besteht aus einem Walzengerüste mit einem Paar Walzen von spitzbogenförmigen Vorwalzkalibern und aus einem Walzengerüste mit einem Paar Walzen von flachem oder rectangulärem Kaliber. Die durch das erste Walzenpaar erhaltenen Rohschienen werden durch das zweite fertig gemacht, indem sie hier der weiteren Verwendung entsprechend quadratische oder rectanguläre Querschnitte erhalten. Hierzu gehört noch eine Scheere zum Zerschneiden der Rohschienen. Der Durchmesser einer Walze ist 16 bis 18 Zoll, und der ihrer Hülse, 10 Zoll. Die ganze Länge derselben $6\frac{1}{2}$ Fuß und die freie Länge derselben zwischen den Trägern $3\frac{1}{2}$ Fuß. Die untere Walze wird durch ein Einsatzstück und zwei Kuppelhülsen mit der Umtriebswelle verbunden. Die Kuppelhülse und der Einsatz sind gerippt und haben in den gleichfalls gerippten Höhlungen der Kuppelhülsen nur $\frac{1}{8}$ Zoll Spielraum. Die Länge einer Kuppelhülse mißt 12 bis 15 Zoll, und die Wandstärke derselben $2\frac{3}{4}$ bis $3\frac{1}{4}$ Zoll. Die Hauptform des spitzbogenförmigen Vorwalzkalibers ist ein Rhombus, dessen verticale Diagonale b 0,85 bis 0,86 der horizontalen Diagonale a mißt und dessen Seiten durch Kreisbogen vom Halbmesser, welcher anfangs $5\frac{1}{2}$ bis 7 Zoll mißt, gebildet werden. Damit die durch das Walzen ausgepreßten Schlacken entweichen können, erhalten die Eckpunkte an der horizontalen Diagonale noch kleine Ausbiegungen und die Walzenringe noch einen Spielraum von $\frac{1}{8}$ Zoll. Die Eckpunkte an der verticalen Diagonale sind dagegen abzurunden. Der Querschnitt des folgenden Kalibers ist 0,6 bis 0,8 des Querschnitts vom vorhergehenden, folglich die Streckung bei jedem Durchwalzen 1,66 bis 1,25. Oft hat die horizontale Diagonale des folgenden Kalibers die Größe der verticalen Diagonale des vorhergehenden. Die Anzahl der Umdrehungen einer Walze pr. Min. ist 40 bis 70, und das nöthige Schwungrad hat bei 16 Fuß Durchmesser, ein Gewicht von 150 bis 200 Centner. Die Scheere macht nur 30 bis 50 Spiele

pr. Min. und erfordert eine Umtriebsmaschine von 4 bis 5 Pferdekräften, während die Betriebskraft des Walzwerks selbst 20 bis 30 Pferdekräfte beträgt. Mit Einschluß eines Quetschers oder Dampfhammers kann man die Betriebskraft des ganzen Luppentrains 50 bis 60 Pferdekräfte annehmen, wobei die wöchentliche Production 4000 Centner beträgt.

Das Grobeisenwalzwerk besteht in der Regel aus zwei Gerüsten, wovon das erstere Streck- oder Vorwalzen mit concav quadratischem Kaliber und das zweite Fertig- oder Schlichtwalzen mit quadratischem, rectangulärem und kreisförmigem Kaliber, entsprechend den verschiedenen Eisensorten, enthält. Auch hat man noch sogenannte Polirwalzen mit glatter Oberfläche. Der Durchmesser der Walzen ist 16 bis 20 Zoll und die Länge derselben zwischen den Gerüsten, 4 bis 6 Fuß. Das Abnahmeverhältniß oder das Verhältniß zwischen zwei auf einander folgenden Kalibern ist hier nur 0,85 bis 0,9. Die Umdrehungszahl der Walzen ist $u = 60$ bis 90, das Gewicht des 18 Fuß hohen Schwungrades 250 bis 300 Centner, die Betriebskraft für das vollständige Walzwerk beträgt 60 bis 80 Pferdekräfte und die wöchentliche Production 1600 bis 2000 Centner. Das Kaliber für das Quadrateisen ist ein Rhombus, ähnlich wie beim Luppentrain, das für das Rundeisen ist ein an den Endpunkten des horizontalen Durchmessers ausgeschweifter Kreis. Damit sich das durch Walzen durchlaufende Eisen nach unten ziehe, macht man die obere Walze um $1/_{60}$ bis $1/_{50}$ dicker als die untere Walze. Die auszuwalzenden Paquete sind aus 18 bis 20 Rohschienenstücken von $1/_2$ bis $5/_8$ Zoll Dicke und 3 bis $3^1/_2$ Zoll Breite zusammen zu setzen, und erhalten nach Befinden noch 6 bis 7 Zoll breite und 1 Zoll dicke Deckschienen aus Grobeisen.

Das Feineisenwalzwerk besteht 1) aus zwei Gerüsten a und b mit je drei längeren Walzen, a für das Quadrateisen und b für das Flach- und Bandeisen, und 2) aus zwei Gerüsten c und d mit je zwei kürzeren Walzen, c für das Rundeisen und d für das Quadrateisen. Die Länge der Walzen unter (1) ist $2^1/_4$ bis 3 Fuß, die unter (2) nur 6 bis 8 Zoll, während der Durchmesser derselben in beiden Fällen $7^1/_2$ bis 10 Zoll mißt. Die Walzen laufen pr. Minute 200 bis 250 mal um und das Schwungrad hat bei 10 Fuß Durchmesser circa 60 Centner Gewicht. Bei einer Betriebskraft von 20 Pferdekräften liefert dieses Walzwerk wöchentlich 400 Centner Eisen.

Schnellwalzwerk für die Drahtfabrikation. Dasselbe besteht 1) aus einem Gerüste mit drei langsam gehenden Vorwalzen und 2) aus vier Gerüsten mit zwei schnellgehenden Walzen mit Oval- und Rundkaliber. Das erste Ovalkaliber hat Dimensionen von 24 und 10 Linien und das letzte Rundkaliber die Dimension von 3 bis $3^1/_2$ Linien. Die Walzen machen pr. Minute 300 bis 330 Umdrehungen und das ganze

Walzwerk liefert bei einem Kraftaufwand von 50 bis 60 Pferdekräften, täglich 170 bis 190 Centner Drahteisen.

Das Blechwalzwerk besteht aus einem Gerüste mit zwei Fertigwalzen. Die Länge der Walzen ist je nach der Breite der zu fabricirenden Bleche, 3 bis 7 Fuß, der Durchmesser derselben 1 bis 2 Fuß. Die Anzahl der Umdrehungen der Walzen ist bei starkem Bleche 20 bis 24, bei mittlerem 25 bis 30, bei schwachem gegen 40. Die Umtriebskraft ist je nach der Breite und Dicke der Bleche, 40 bis 80 Pferdekräfte, und die wöchentliche Production entsprechend, 200 bis 400 Ctr. Blech. Die Walzwerke für Kesselbleche haben sogar eine Stärke von 100 bis 120 Pferdekräften.

Das Walzwerk für Eisenbahnschienen hat 4 bis $4^1/_2$ Fuß lange und $1^1/_2$ Fuß dicke Walzen, welche in der Minute 50 bis 75 Umdrehungen machen und bei einer Betriebskraft von 40 bis 50 Pferdekräften, wöchentlich 1000 bis 1250 Centner Schienen liefern. Um gute Eisenschienen zu erhalten, setzt man die 340 bis 350 Pfund schweren Paquete aus Schienenstücken von verschiedenen Eisensorten zusammen. Hierzu gehören noch ein Paar Kreissägen von 3 bis $4^1/_2$ Fuß Durchmesser, welches bei 1000 bis 1200 Umdrehungen pr. Min. 6 bis 8 Pferdekräfte in Anspruch nehmen.

§. 126. Stahlfabrikation. Der Stahl enthält 0,5 bis 2,0 Proc. Kohle und steht in Härte und anderen Eigenschaften zwischen Guß- und Schmiedeeisen. Sehr kleine Quantitäten von Silicium und Mangan verbessern den Stahl. Durch Härten, d. i. durch rasches Abkühlen des kirschroth glühenden Stahles im Wasser, erhält derselbe eine sehr große Härte; durch Anlassen oder allmäliges Abkühlen des erhitzten Stahles kann die Härte auf die ursprüngliche zurückgeführt werden. Um das Oxydiren des Stahls beim Härten zu verhindern, muß man denselben vor dem Glühen mit einer Haut von Kochsalzauflösung, von weicher Seife u. s. w. einhüllen oder das Härten durch Einsetzen anwenden, wobei das Stahlstück mit Kohlenpulver in einer mit Lehm verstrichenen eisernen Büchse geglüht und abgekühlt wird.

Die Härte und Sprödigkeit des vorher gehärteten Stahles nimmt ab, je weiter die Erhitzung fortschreitet, und läßt sich mit Hülfe der sogenannten Anlauffarben leicht beurtheilen. Anfangs nimmt der Stahl nach und nach die Farben gelb, roth, violett, blau, grün an, wird wieder weiß, nimmt bei stärkerer Erhitzung diese Farben auf kurze Zeit noch ein Mal an, und glüht endlich ganz weiß. Es ist jedoch nur das Glühen bis zur ersten Farbenreihe, welches beim Anlassen benutzt wird. Man hat hiernach

die Farbe:	stroh-gelb	gold-gelb	braun	purpur-roth	hellblau	Indigo	meer-grün
den Hitzgrad	220°	240°	255°	263°	285°	295°	315°
die Eigenschaft des Eisens:	hart und spröde	schneidet das Gußeisen	geeignet zu Werkzeugen, womit Eisen geschnitten wird			geeignet zum Zerschneiden des Holzes	weich wie das Schmiedeeisen

Man verfertigt Stahl entweder aus Roheisen durch Entfernung, oder aus Frischeisen durch Zusetzung von Kohlenstoff. Der sogenannte *Roh- oder Schmelzstahl* wird ähnlich wie das Frischeisen in einer Heerdgrube von circa 2 Fuß Länge und Breite erzeugt, in welche die 10 bis 18 Grad geneigte Form circa 1 Fuß hoch über dem Boden $1/3$ Fuß weit hineinragt. Man erhält hierbei aus 1 Centner Roheisen, 66 bis 75 Pfd. Stahl und verbraucht, je nach der Qualität des Roheisens, 20 bis 40 Cubikfuß Kohlen. Der Einsatz beträgt circa 2 Centner und das wöchentliche Erzeugniß ist 25 bis 40 Centner. Der *Puddelstahl* wird in einem Flammofen erzeugt, ähnlich wie das Puddeleisen, wobei man auch die Gasfeuerung mit Nutzen anwenden kann. Der Heerd ist 5 bis $5 1/2$ Fuß lang, $4 1/2$ Fuß breit und nimmt $3 1/2$ bis $4 1/2$ Centner Einsatz auf. Die Rostfläche beträgt hier nur $5 1/2$ bis $6 1/2$ Quadratfuß, wovon die freie Fläche über der Feuerbrücke $1/2$ und der Querschnitt des Fuchses 0,1 bis 0,17 einnimmt. Die Heerdsohle besteht aus einer 5 Zoll dicken Schlackenschicht, liegt 10 Zoll unter der Feuerbrücke und 18 bis 21 Zoll unter dem Gewölbscheitel. Der Abgang ist sowohl beim Puddeln als auch beim Ausschneiden der Stahlstäbe, 5 bis 10 Proc., und der Kohlenverbrauch pr. Centner Stahl ist 131 Pfd. Steinkohlen. Die tägliche Production beträgt 15 bis 30 Centner. Zum Ausschmieden der 1 bis $1 1/2$ Zoll dicken Stahlstäbe sind besondere *Schweißfeuer* nöthig.

Der *Bessemerstahl* wird aus flüssigem Gußeisen erzeugt, ähnlich wie das Bessemereisen.

Der *Glühstahl* wird durch Glühen der Roheisenstäbe in Eisenoxyden oder Galmei erzeugt.

Der *Cementstahl* wird durch Cementiren, d. i. durch anhaltendes starkes Glühen des reinsten Schmiedeeisens in Kohlen erzeugt. Das Cementiren erfolgt in einem Flammofen, auf dessen Heerd gewöhnlich zwei aus feuerfestem Thone bestehende Cementirkästen stehen, worin die Eisenstäbe mit dem aus Holzkohle und Holzasche bestehenden Cementirpulver eingeschlossen werden. Ein Kasten ist 10 Fuß lang, 3 Fuß breit und 3 Fuß tief, faßt etwa 150 Centner Eisen und wird 5 bis 10 Tage

der Weißglühhitze ausgesetzt. Die einzusetzenden Eisenstäbe sind 2 bis 5 Zoll breit und $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{2}$ Zoll dick. Auf 1 Centner Einsatz rechnet man $\frac{1}{3}$ Cubikfuß Holzkohlen, am besten aus Buchenholz, und der Verbrauch an Brennmaterial ist pr. Centner Stahl, 65 bis 75 Pfd. Steinkohle.

Der Roh-, Puddel- und Cementstahl wird durch sogenanntes Raffiniren oder Gerben, d. i. durch wiederholtes Ausschmieden und Schweißen, in raffinirten oder Gerbestahl verwandelt. Der Abgang an Stahl ist hierbei 7 bis 12 Proc. und der Kohlenverbrauch pr. Centner, 3 bis $3\frac{1}{2}$ Cubikfuß. Die Raffinirhämmer sind kleine Schwanzhämmer von 80 Pfd. Gewicht, welche in der Minute 180 bis 400 Schläge zu 9 bis 10 Zoll Hub machen. Dieselben werden entweder durch kleine Wasserräder oder durch oscillirende Dampfmaschinen in Bewegung gesetzt.

Der Gußstahl wird vorzüglich aus Cementstahl, jedoch auch aus Roh- und Puddelstahl und zwar dadurch erzeugt, daß man zerstückelten Stahl, nach Befinden mit Kohle und Mangan, in einem feuerfesten Tiegel einschmilzt. Ein solcher Tiegel hat bei 16 Zoll Höhe die mittlere Weite von 8 Zoll und gestattet einen Einsatz von 20 bis 40 Pfd., welcher in 3 bis 5 Stunden geschmolzen ist. Ein Ofen, welcher vier Tiegel faßt, hat bei 3 Fuß Höhe, $2\frac{1}{4}$ Fuß Länge und Breite, ein solcher für zwei Tiegel ist aber 2 Fuß lang und $1\frac{1}{3}$ Fuß breit. Zur Erzeugung des nöthigen Luftzuges dient eine Esse, welche z. B. bei 10 Zoll lichter Weite für zwei oder vier Oefen mit acht Tiegeln, 40 Fuß hoch sein muß. Der Verbrauch an Brennmaterial ist pr. Centner Stahl, 250 bis 350 Pfd. Coaks. In neuerer Zeit hat man auch Gasfeuerung, und insbesondere den Siemens'schen Schmelzofen mit Vortheil angewendet. Der fertige Stahl wird, nachdem er sehr dünnflüssig geworden ist, in gußeiserne Formen gegossen, welche aus zwei Theilen bestehen und durch Keile zusammengehalten werden. Die daraus hervorgehenden Stahlstäbe haben bei 24 Zoll Länge nahe 3 Zoll Breite und 2 Zoll Dicke und werden durch Hammer- und Walzwerke weiter verarbeitet, wozu auch noch besondere Glüh- und Wärmeöfen nöthig sind. In einem solchen Ofen von 9 Fuß Länge und 5 Fuß Breite werden beim Verbrauch von 35 bis 40 Scheffel Steinkohle, täglich 60 Centner Stahl angewärmt. Zum Vorrecken verwendet man je nach der Größe der Stücke, Schwanz-, Aufwerf- oder Dampfhämmer. Nach dem Vorrecken wird der Stahl durch Schleifen und Aushauen von den Rissen befreit und zu Werkzeugstahl, Federstahl u. s. w. mittels Walzwerke oder Schwanzhämmer weiter verarbeitet. Die Eisenbahnwagenaxen werden in Gesenken erst achteckig, dann rund geschmiedet und geschlichtet. Mit einem Dampfhammer von 80 Centner Gewicht liefern vier Arbeiter täglich 5 Stück.

Das Schmiedeeisen gelangt bei 90 Grad Wedgwood in das Weißglühen, die sogenannte Schweißhitze, kommt aber

sehr schwer, bei circa 150° W. zum Schmelzen. Das specifische Gewicht desselben ist 7,35 bis 7,91, wird aber durch Hämmern, Walzen und Drahtziehen bis auf 8,1 gesteigert. Der Festigkeitsmodul des Schmiedeeisens ist 40'000 bis 60'000 Pfd., in Draht sogar 70'000 bis 110'000 Pfd. und die Ausdehnung desselben im Augenblicke des Zerreißens, 0,03 bis 0,25 der ursprünglichen Länge. Dieser Modul nimmt bei der Erhitzung bis 160° C. zu, bei höherer Temperatur aber ab, und ist bei der Rothglühhitze nur ein Drittel bis die Hälfte kleiner. Gutes Schmiedeeisen ist hell von Farbe, wenig glänzend und zeigt auf dem Bruche ein hakiges oder zackig-körniges Gefüge, welches aber beim Strecken in ein sehniges übergeht. Das rothbrüchige Eisen berstet im rothglühenden Zustande unter den Hammerschlägen, das kaltbrüchige ist in der Kälte sehr spröde.

Der Stahl schmilzt leichter als das Schmiedeeisen, schweißt dagegen schwerer als dasselbe. Im natürlichen Zustande ist er härter als Schmiedeeisen und weicher als Gußeisen. Das specifische Gewicht des Stahles ist 7,4 bis 8,1, im Mittel 7,7, nimmt aber beim Härten etwas ab. Der Festigkeitsmodul desselben ist 70'000 bis 150'000 Pfd. und die größte Ausdehnung desselben 0,03 bis 0,2 der ursprünglichen Länge. Der Arbeitsmodul der Elasticitätsgrenze beträgt bei Gußeisen 1,5 bis 4, bei Schmiedeeisen 6 bis 12, und bei Stahl 30 bis 50 Zollpfund. Durch Härten verliert der Stahl an seiner Festigkeit.

Der Bruch des Stahles zeigt ein körniges Gefüge, welches um so feiner wird, je weiter die Verarbeitung vorschreitet und sich auch beim Härten nicht verliert.

§. 127. Verschiedene Metalle und ihre Verbindungen. Reines Kupfer ist auf den Bruchflächen rosenroth, metallisch glänzend und von dichtkörnigem oder feinzackigem Gefüge; es zeigt im Feuer lebhafte Regenbogenfarben und schmilzt bei der Weißglühhitze des Eisens. Das specifische Gewicht des gegossenen Kupfers ist 7,72 bis 8,92, das des geschmiedeten, zu Blech oder Draht verarbeiteten Kupfers, 8,94 bis 8,96. Der Elasticitätsmodul des Kupfers beträgt 14'000 000 bis 17'000 000 Pfd. und der Festigkeitsmodul des Zerreißens von gegossenem Kupfer, 20'000 Pfd., von gehämmertem 30'000 Pfd. und von Kupferdraht 60'000 Pfd. Die Festigkeit fällt bei 310° Wärme um $\frac{1}{3}$ kleiner aus. Das bearbeitete Kupfer steht also in der Festigkeit dem Schmiedeeisen nahe, hat aber weit weniger Härte als dieses, ist sehr dehnbar, läßt sich vortrefflich hämmern und widersteht der Orydation sehr gut durch die Grünspanhaut, welche sich auf seiner Oberfläche bildet. Es ist aber circa 7mal so theuer als Schmiedeeisen.

Das gegossene Zink ist auf dem Bruche grauweiß von Farbe, verliert durch Walzen und Ziehen seine große Härte und grobblätterige Structur und wird dabei in hohem Grade dehnbar. Bei einer Temperatur von 125 bis 140° C. ist es

besonders leicht zu bearbeiten, bei 380 bis 410 Grad gelangt es zum Schmelzen, und starke Rothglühhitze verwandelt es in Dampf. Beim Weißglühen verbrennt es in der Luft mit grünlich weißer Farbe. Das specifische Gewicht des gegossenen Zinks ist 6,9 bis 7,1, das des verarbeiteten aber 7,2 bis 7,3; der Festigkeitsmodul des gegossenen Zinks beträgt nur 2500 Pfd., der des zu Blech oder Draht verarbeiteten Zinks aber 15000 bis 18000 Pfd. Das Zink oxydirt schnell an der Luft, überzieht sich mit einer Oxydhaut und zerfällt nach und nach an der Luft. Beim Verzinken oder Galvanisiren des Eisens erhält das letztere einen Zinküberzug, und zwar dadurch, daß man das vorher in eine Salmiakauflösung eingetauchte und wieder getrocknete Eisen in ein über den Schmelzpunkt hinaus erhitztes Zinkbad bringt u. s. w.

Das Zinn, welches sich durch seine silberweiße Farbe auszeichnet, widersteht der Oxydation in Luft und Wasser mehr als die meisten Metalle, Gold ausgenommen. Dieses Metall schmilzt bei 225 Grad, und bedeckt sich dabei mit einer Oxydhaut. Es hat das specifische Gewicht $\varepsilon = 7{,}3$, welches durch Hämmern und Walzen auf 7,5 steigen kann. Der Festigkeitsmodul desselben ist nur 3000 bis 6000 Pfd. Das Verzinnen oder Ueberziehen eines Gegenstandes mit einer Zinnhaut kommt vorzüglich bei Eisen, Kupfer, Zink und Messing zur Anwendung. Dasselbe erfolgt entweder durch Eintauchen des vorher gehörig geputzten und gereinigten Gegenstandes in ein mit Talg bedecktes Zinnbad, oder durch Einreiben des erwärmten Gegenstandes mit geschmolzenem Zinn.

Das Blei zeichnet sich durch seine lichtgraue Farbe und sein großes specifisches Gewicht aus, welches 11,35 bis 11,38 beträgt. Seine stark glänzende Bruchfläche überzieht sich an der Luft und im Wasser sehr bald mit einer schützenden Oxydhaut. Der Festigkeitsmodul des gegossenen Bleies ist nur 1500 Pfd., steigert sich aber beim Walzen und Drahtziehen auf 3000 Pfd. In der gewöhnlichen Temperatur ist es sehr weich und dehnbar, wird aber, wie das Zinn, beim Erhitzen spröde; das Schmelzen desselben erfolgt bei 320 Grad. Beim Schmelzen des Bleies unter Luftzutritt bildet sich auch das unter dem Namen Bleiasche bekannte Suboxyd des Bleies, welches durch Glühen in gelbes und rothes Oxyd verwandelt wird. Das Massikot oder gelbe Bleioxyd enthält 92,8, die Mennige oder das rothe Bleioxyd, 89,6 Proc. Blei. Die sogenannte Glätte ist halbgeschmolzenes gelbes Bleioxyd.

Von den Metalllegirungen sind einige dichter, andere weniger dicht als das Mittel ihrer Mischungstheile; zu den ersteren gehören z. B. die Verbindungen aus Kupfer und Zink, Kupfer und Zinn, Kupfer und Wismuth, Kupfer und Antimon u. s. w., zu den letzteren sind beispielsweise zu rechnen die Verbindungen aus Silber und Kupfer, Eisen und Blei, Zinn und Blei, Zinn und Antimon, Zink und Antimon u. s. w.

Zu der Legirung aus Kupfer und Zink gehört das Messing und der Tomback, sowie der Semilor (Musivgold) und das Chrysorin. Bei dem ersteren ist der Zinkgehalt 24 bis 36 Proc., bei dem zweiten aber nur 8 bis 18 Proc. Beim Semilor beträgt der Zinkgehalt über 36, oft bis 55 Proc. Gußmessing wird gewöhnlich aus 2 Thln. Kupfer und 1 Thl. Zink, Messingblech und Messingdraht dagegen aus 8 Thln. Kupfer und 3 Thln. Zink zusammengesetzt. Das schmiedbare Messing, welches bloß 20 Proc. Zink enthält, ist am geschmeidigsten und läßt sich im glühenden Zustande hämmern und walzen, jedoch ist auch das gewöhnliche Messing noch unter dem Hammer und den Walzen gut streckbar. Die Dehnbarkeit des Messings wird durch das wiederholte Glühen und Bearbeiten desselben gesteigert, wobei seine Textur aus dem Feinkörnigen nach und nach in das Faserige übergeht. Das specifische Gewicht des Messings ist 7,8 bis 8,7. Der Festigkeitsmodul beträgt bei gegossenem Messing, $K = 18000$ Pfd., bei Messingdraht aber bis 48000 Pfd. Der Schmelzpunkt des Messings ist die Rothglühhitze.

Die Legirungen aus Kupfer und Zinn geben Bronze, Glockenmetall, Kanonengut u. s. w. Dieselben sind härter, spröder und schmelzbarer, sowie auch einer höheren Politur fähig als Kupfer. Das specifische Gewicht von Bronze ist 8,6 bis 8,9. Das Glockenmetall enthält 0,8 Kupfer und 0,2 Zinn, das französische Kanonenmetall dagegen, 0,9 Kupfer und 0,1 Zinn; das englische 0,94 Kupfer, 0,06 Zinn. Spiegelmetall hat 0,67 Kupfer und 0,33 Zinn. Der Festigkeitsmodul des Kanonenmetalls ist 35000 Pfd., also doppelt so groß als der des Gußeisens und gleich dem des Kupfers. Sehr gewöhnlich enthält die Bronze Zinn, Zink und Blei; die neuere Statuenbronze enthält z. B. 83 Thle. Kupfer, 4 Thle. Zinn und 13 Thle. Zink, oder 84 Thle. Kupfer, 2 Thle. Zinn, 11 Thle. Zink und 3 Thle. Blei u. s. w. Die Bronze für Zapfenlager enthält z. B. 9 Thle. Kupfer, 4 Thle. Zinn und 6 Thle. Zink oder 86 Thle. Kupfer und 14 Thle. Zinn, oder 79 Thle. Kupfer, 8 Thle. Zinn, 5 Thle. Zink und 8 Thle. Blei u. s. w.; ferner Bronze aus 16 Thln. Kupfer, 6 Thln. Zink und 1 Thl. Zinn eignet sich für Pumpencylinder, Kolben u. s. w.

Das Argentan enthält 50 bis 55 Thle. Kupfer, 20 bis 25 Thle. Zink und 20 bis 25 Thle. Nickel; das specifische Gewicht desselben ist 8,4 bis 8,7 und die absolute Festigkeit $K = 90000$ bis 100000 Pfd. Angaben über die Schmelzbarkeit von Metalllegirungen sind in der Tabelle S. 549 enthalten.

Ein Kupferblechwalzwerk mit 7 Fuß langen und 18 Zoll dicken Walzen, erfordert zu seinem Umtriebe 15 Pferdekräfte nach (Karmarsch). Das neuere Kupferblechwalzwerk auf dem Kupferhammer Grünthal mit einem Walzenpaar von 5 Fuß Länge und 18 Zoll Dicke, welches durch eine Jonval'sche Turbine in Umtrieb gesetzt wird, nimmt 25 Pferdekräfte in An-

spruch. Das Rundstabwalzwerk auf demselben Werke, welches ein Paar Walzen von $32\frac{1}{2}$ Zoll Länge und 9 Zoll Dicke mit 17 Cannelüren von $\frac{5}{8}$ bis 2 Zoll Weite hat, beansprucht nur 8 Pferdekräfte (nach Angaben des Herrn Oberkunstmeisters Schwamkrug).

§. 128. Die Herstellung von Drähten und Röhren.

Das Ziehen der dehnbaren Metalle zu Draht erfolgt dadurch, daß man einen Metallstab durch nach und nach an Weite abnehmende Löcher in einer Stahl- oder verstählten Eisenplatte, dem sogenannten Zieheisen, durchzieht. Die Kraft zum Drahtziehen wächst vorzüglich mit der Härte des Metalls und mit dem Verhältnisse zwischen der Differenz des Querschnittes F vom Körper vor dem Ziehen und dem Querschnitte F_1 des Loches oder des gezogenen Drahtes zu dem ersteren Querschnitte F. Die Geschwindigkeit des Zuges ist, wenn sie nur 1 bis 2 Fuß beträgt, ohne Einfluß auf die Zugkraft. Durch wiederholtes Ziehen wird die Ziehbarkeit vermindert, dagegen durch Ausglühen besonders erhöht. Nach dem Ausglühen ist die Festigkeit des Drahtes 0,40 bis 0,75 von der vor dem Ausglühen, ferner die Länge und die Dichtigkeit eine kleinere, dagegen die Dicke eine größere. Die Ziehbarkeit oder das Verhältniß der Ziehkraft zur Zugfestigkeit (bei gleichem Querschnitt) ist bei ausgeglühtem Stahl und Eisen, $= 0{,}25$, bei hart gezogenem Stahl und Eisen, sowie bei Kupfer und Messing, $= 0{,}4$; bei Silber und Zink, $= 0{,}5$; bei Blei, $= 0{,}55$ und bei Zinn, $= 0{,}85$. Hierbei ist die Drahtdicke nach dem Zuge im Mittel 0,9 von der vor dem Zuge, und folglich das Verhältniß

$$\frac{F - F_1}{F} = 1 - 0{,}81 = 0{,}19.$$

Die Kraft zum Drahtziehen ist, wenn ζ einen der angegebenen Erfahrungscoefficienten vorstellt, F den Querschnitt und K den Modul der absoluten Festigkeit des Körpers (s. S. 369) vor dem Ziehen bezeichnen, $P = \zeta F K$, z. B. für harten Eisendraht von 0,1 Zoll Dicke fällt $P = 0{,}4 \,.\, \frac{(0{,}1)^2 \pi}{4} \cdot 90000 = 283$ Pfd. aus. Die Dicke des gezogenen Drahtes ist im Allgemeinen größer als die Weite des Ziehloches, wiewohl sie durch die Nachstreckung wieder etwas vermindert wird. Das Ziehen des dicken Drahtes erfolgt entweder durch Stoßzangen von $\frac{1}{2}$ bis 3 Fuß Zug, oder durch die Schleppzangen mit 10 bis 30 Fuß Zug; feinerer Draht unter 3 bis 4 Linien Dicke ist dagegen mittels Trommeln oder Scheiben, der sogenannten Leiern, auszuziehen.

Der Arbeitsaufwand zum Drahtziehen beträgt, wenn man in Berücksichtigung der Nebenhindernisse zur Sicherheit

$$P = 2 \zeta F K = 56600\, d^2 \text{ Pfd. setzt,}$$

$$L = \frac{Pv}{480} = 118\, d^2 v \text{ Pferdekräfte.}$$

Hiernach ist folgende Tabelle berechnet worden.

Drahtstärke	Ziehgeschwindigkeit	Scheibendurchmesser	Umdrehungszahl *u*	Ziehkraft	Arbeitsquantum
0,30 Zoll	0,65 Fuß	21 Zoll	7	5094	7 Pfkr.
0,25 »	0,85 »	18 »	11	3537	6,25 »
0,20 »	1.00 »	16 »	14	2264	4,72 »
0,15 »	1,50 »	14 »	25	1273,5	3,98 »
0,10 »	2,00 »	12 »	38	566,5	2,36 »
0,05 »	3,50 »	10 »	80	141,5	1,03 »
0,025 »	5,00 »	8 »	143	35,4	0,37 »

Man kann nach Karmarsch annehmen, daß die Umtriebskraft bei Messingdraht, $^7/_8$ und bei Kupferdraht, $^2/_3$ von der angegebenen Umtriebskraft bei Eisendraht ist.

Die Metallstäbe, welche man zur Drahtfabrikation verwendet, werden entweder geschmiedet oder gewalzt, oder aus Blech geschnitten oder auch gegossen, oder endlich erst gegossen und dann geschmiedet.

Die stärkeren Drahtsorten sind nach dem Ziehen durch 2 bis 4 Löcher in dem Glühofen auszuglühen, wobei man soviel wie möglich den Luftzutritt abzuhalten hat. Um Eisendraht von 3 bis 4 Linien Dicke zu erzeugen, sind 12 bis 16 Ziehen und 4 Glühungen nöthig, und um ihn bis $^1/_8$ Linie fein zu ziehen, muß er noch durch 30 bis 40 Löcher gehen, wobei er jedoch nur zweimal ausgeglüht wird. Der ausgeglühte Draht ist vor dem Ziehen durch Scheuern oder durch Beizen (1 Thl. Vitriolöl, 100 Thle. Wasser) von dem Glühspan zu befreien.

Sehr zweckmäßig ist die Anwendung eines Drahtwalzwerkes. Dasselbe besteht wie ein Feineisenwalzwerk aus drei Walzen von 8 bis 9 Zoll Dicke und 18 bis 24 Zoll Länge, welche 12 bis 14 Spuren enthalten und pr. Min. 230 bis 330 Umdrehungen machen. Die Querschnitte dieser Spuren sind quadratisch, elliptisch und kreisförmig, und nehmen von 1 Zoll Dicke nach und nach bis auf $3^1/_2$ Linien Durchmesser ab, wobei die Länge der Stäbe beim Durchwalzen von 2 auf 30 Fuß gebracht wird. (Vergl. S. 733.)

Die Metallröhren werden gezogen oder gewalzt oder gepreßt. Um das Einknicken solcher Röhren beim Ziehen und Walzen zu verhindern, bedient man sich eines eisernen oder stählernen Cylinders, des sogenannten Dornes. Ist der letztere lang, so wird er mit der Röhre zugleich durch das Zieheisen gezogen, ist er aber kurz, so wird er in der Mitte des Ziehloches festgehalten. Die zum Ausziehen bestimmten Röhren werden entweder gegossen oder zusammengelöthet oder zusammengeschweißt.

Das Pressen der Röhren läßt sich nur bei weichen Metallen, z. B. Zinn und Blei, in Anwendung bringen. Der Preßapparat besteht aus einem Cylinder, der sogenannten Preßform, von $1\frac{1}{2}$ bis 3 Fuß Länge und $\frac{1}{2}$ bis 1 Fuß Durchmesser, und einem Preßkolben, welcher mittels einer hydraulischen Presse oder eines Schraubenmechanismus gegen die den Cylinderraum ausfüllende Metallmasse gedrückt wird, wobei dieselbe nach und nach durch den im Boden oder Deckel der Preßform sitzenden Preßring in Form eines Cylinders austritt. Ein Dorn, welcher auf der Innenfläche des Kolbens festsitzt, und durch den Preßring hindurchgeht, ohne ihn ganz auszufüllen, bewirkt, daß dieser Cylinder innen hohl ausfällt. Das Heißpressen des Bleies, wobei es bis zum Schmelzpunkte durch ein Kohlenfeuer von außen erhitzt wird, erfordert weniger Kraft als das Kaltpressen, kann auch durch Nachgießen von Blei beliebig in die Länge gezogen werden, und gestattet die Anwendung eines mit dem Preßringe durch einen Steg fest verbundenen kurzen Dornes.

§. 129. Maschinen zur Bearbeitung der Metalle. Beim Schneiden und Lochen der Metalle ist die Schubfestigkeit zu überwinden, deren Coefficient für Schmiedeeisen $K_2 = 48000$ Pfd. beträgt. Hiernach ist z. B. die Kraft zum Lochen des Eisenbleches von δ Zoll Dicke bei d Zoll Durchmesser des Loches:

$$P = \pi \delta d K_2 = 150800\, \delta d \text{ Pfd.},$$

und der entsprechende Arbeitsaufwand:

$$A = 2090\, \delta^2 d \text{ Fußpfd.}$$

Ebenso ist die Kraft zum Abscheeren eines Blechstückes von der Dicke δ und der Länge l,

$$P = \delta l K_2 = 48000\, \delta l \text{ Pfd.}$$

Den Schneiden giebt man gewöhnlich eine Schärfe von 75 bis 78 Grad.

Kreisscheeren erhalten den Durchmesser $d = 80\,\delta$ und schneiden mit 0,125 bis 0,175 Fuß Geschwindigkeit, wobei sie um die Dicke $1{,}20\,\delta$ bis $1{,}25\,\delta$ über einander greifen.

Der Arbeitsaufwand zum Abscheeren ist pr. Schnitt

$$A = 665\, \delta^2 l \text{ Fußpfd. zu setzen.}$$

Eine Drehbank besteht aus dem Gestelle, den beiden Docken oder Stützen und aus der Spindel, welche durch ein Schnur-, Riemen- oder Zahnräderwerk in Umdrehung gesetzt wird. Ferner aus dem Drehstahl und dem Support. Der abzudrehende Körper wird entweder nur an einem Ende durch das Futter, die sogenannte Patrone, oder durch eine Planscheibe mit der Spindel fest verbunden, während er an dem anderen Ende ganz frei bleibt, oder er wird zwischen Spitzen oder Körnern eingespannt, und mittels des sogenannten Führers durch die Spindel in Umdrehung gesetzt. Die erforder-

liche Umfangsgeschwindigkeit des rotirenden Arbeitsstückes ist bei hartem Eisenguß höchstens 1 Zoll, bei Stahl $1\frac{1}{2}$ bis 2 Zoll, bei weichem Gußeisen 2 bis 4 Zoll, bei Schmiedeeisen 4 bis 5 Zoll, bei Messing und Bronze 6 bis 8 Zoll, bei Holz 8 bis 10 Zoll (s. Wiebe's Maschinenbaumaterialien). Aus der Umdrehungsgeschwindigkeit v (Zoll) und dem Durchmesser d des Arbeitsstückes folgt die Umdrehungszahl der Spindel pr. Min.

$$u = \frac{60\,v}{\pi\,d} = 19,1\,\frac{v}{d},$$ z. B. für Schmiedeeisen:

$$u = \frac{76,4}{d} \text{ bis } \frac{95,5}{d},$$ dagegen für weiches Gußeisen:

$$u = \frac{38,2}{d} \text{ bis } \frac{76,4}{d}.$$

Das Fortrücken des Drehstahles beträgt pr. Umdrehung, $\sigma = 0,01$ bis $0,05$ Zoll, folglich pr. Minute:

$$s = \sigma u = 0,01\,u = 0,191\,\frac{v}{d} \text{ bis } 0,05\,u = 0,96\,\frac{v}{d} \text{ Zoll.}$$

Die Kraft zum Abdrehen läßt sich $P = 48000\,\sigma\,\delta$ Pfd. setzen, wenn δ die Dicke des Drehspanes bezeichnet, welche je nach der Größe der Drehbank, 0,25 bis 0,75 Zoll beträgt. Setzt man $\sigma = 0,05$, so erhält man hiernach $P = 600$ bis 1800 Pfd., folglich bei einer Umfangsgeschwindigkeit v von 5 Zoll, das erforderliche Arbeitsquantum pr. Sec.:

$$L = \frac{Pv}{12} = 50 \text{ bis } 150\,Pv = 250 \text{ bis } 750 \text{ Fußpfd.}$$

$= 0,50$ bis 1,50 Pferdekräfte, wofür aber wegen der Nebenhindernisse, $= 0,67$ bis 2,00 Pferdekräfte anzunehmen ist. Die zur Erzeugung verschiedener Umdrehungsgeschwindigkeiten nöthige Anordnung der Stufenräder läßt sich nach §. 94, S. 624 vollziehen.

Der Stichel oder Drehstahl ist durch das sogenannte Stichelgehäuse mit dem Support verbunden, und letzterer ist sowohl parallel als auch rechtwinkelig zur Drehaxe zu verschieben. Das Verschieben in der ersten Richtung erfolgt entweder mittels eines Zahnstangen- oder mittels eines Schraubenmechanismus, und zwar in der Regel durch die Drehspindel; das Verschieben rechtwinkelig gegen die Drehaxe wird dagegen gewöhnlich mittels einer Kurbel durch Menschenhand bewerkstelligt, kann aber, wie bei Whitworthen Drehbänken, ebenfalls durch die Drehspindel verrichtet werden. Gewöhnlich erhält der Support auch noch eine verticale Drehaxe, wodurch es möglich wird, den Drehstahl schräg gegen die Drehspindel zu stellen.

Um auf einer Drehbank große Stücke abdrehen zu können, ist es nöthig, statt der Riemenradvorgelege einen Zahnradmechanismus anzuwenden. Deshalb haben auch die vollkommenen Drehbänke außer den Stufenscheiben noch ein Zahnräderwerk, welches nach Bedürfniß ein- oder ausgerückt werden kann.

Die Bohrmaschinen dienen entweder nur zum Aus- oder Weiterbohren, oder sie werden angewendet, um ein

massives Arbeitsstück zu durchlochen. Das Ausbohren kurzer Cylinder kann mittels einer Drehbank erfolgen, nachdem man das auszubohrende Stück auf der Planscheibe befestigt hat; das längerer Cylinder, z. B. Dampfcylinder und überhaupt Cylinder für Kolbenmaschinen, erfolgt durch besondere Bohrmaschinen, wobei die Bohrstähle entweder unmittelbar oder mittels eines besonderen Bohrkopfes an einer axial durch den auszubohrenden Cylinder gehenden Stange befestigt sind, welche in der Regel zugleich rotirt und fortrückt. Um die Durchbiegung der Bohrstange zu vermeiden, bedient man sich zum Ausbohren großer Cylinder vertical stehender Bohrmaschinen, wobei der Bohrkopf mit seinen 3 bis 7 Schneiden während der Axendrehung der Bohrstange durch einen Schrauben- oder Zahnstangenmechanismus längs derselben fortbewegt wird. Wenn man eine Drehbank zum Ausbohren verwendet, so läßt man die fortschreitende Bewegung von dem auszubohrenden Cylinder selbst machen.

Bei den Bohrmaschinen, welche aus dem Vollen bohren, arbeitet der Bohrstahl mit einer Spitze vor und mit seinen schneidigen Kanten nach. Mit Ausnahme der Bohrwerke für Geschütze liefern die gewöhnlichen Bohrmaschinen nur Bohrungen von 6 bis 8 Zoll Tiefe und 1 bis 1$^1/_2$ Zoll Weite. Die Bohrspindel, in deren unterem Ende der Bohrer festsitzt, wird mittels conischer Räder in Umdrehung gesetzt, und hierbei durch den Fuß oder durch die Hand des Arbeiters, nach Befinden auch durch ein Gewicht oder durch den Druck einer Wassersäule mittels Zahnrad und Schraubenvorgelege langsam abwärts bewegt. Das Arbeitsstück ist während des Bohrens auf dem Bohrtische befestigt, welcher sich nicht allein am Bohrgerüste höher oder tiefer stellen läßt, sondern auch noch eine seitliche Verschiebung gestattet. Beim Bohren großer Stücke ist die Anwendung sogenannter Krahnbohrmaschinen, wo sich die Bohrspindel längs eines Armes oder sogenannten Auslegers verschieben läßt, nöthig.

Die Bewegungs- und Kraftverhältnisse sind beim Bohren ziemlich dieselben wie beim Abdrehen, nur sind hier die absoluten Geschwindigkeitswerthe noch kleiner, und zwar pr. Umdrehung, bei hartem Gußeisen $^1/_4$ bis $^1/_2$, bei Stahl 1 bis 1$^1/_4$, bei weichem Gußeisen 1$^1/_4$ bis 2, bei Schmiedeeisen 2 bis 3$^1/_4$, bei Messing und Bronze 4 bis 6 und bei Holz 6 bis 8 Zoll, während die Größe des Fortschreitens pr. Umdrehung nur 0,006 bis 0,03 Zoll beträgt.

Am größten ist das Kraftbedürfniß von Kanonenbohrmaschinen, wo sich das Geschütz gewöhnlich um eine horizontale Axe dreht, während die Bohrstange in ihrer Axenrichtung allmälig fortrückt. Bei 10 bis 12 Umdrehungen der Kanone pr. Min. steigert sich der Arbeitsaufwand auf 3 bis 5 Pferdekräfte.

Größere Schrauben werden mit Hülfe von sogenannten Schraubstählen auf der Drehbank angefertigt. Diese Stähle sind nach dem Querschnitte der Schraubengewinde gezahnt, und auf dem Support befestigt, welcher durch die Umdrehungsbewegung einer

mit der Drehspindel verbundenen Schraube, fortbewegt wird. Bei Anfertigung einer Schraubenmutter greift der Schraubstahl in das Innere derselben. Bei Anfertigung der Schrauben durch Handarbeit kommen das Schneideisen, die Schraubenkluppe und der Schraubenbohrer zur Anwendung. Kleinere Schraubenspindeln werden mittels des Schneideisens, worin verschiedene Muttergewinde angebracht sind, hergestellt, größere dagegen durch die Kluppe, welche 2 bis 3 durch Schrauben zu verstellende Schneidebacken enthält. Die Gewindebohrer, womit die Schraubenmuttern geschnitten werden, sind stählerne Schraubenbolzen, an welchen von drei bis vier Seiten die Gewinde in der Art weggefeilt sind, daß ihre Breite vom Kopfe nach dem Ende zu allmälig abnimmt. Die Mutter, welche mittels eines solchen Bohrers geschnitten wird, ist vorher mit einem cylindrischen Loche versehen worden, dessen Durchmesser der Kerndicke der Spindel gleich ist.

Bei den Schraubenschneidemaschinen werden die Schraubenspindeln in Umdrehung gesetzt, während die Schraubenkluppe oder nach Befinden der Schneidestahl, gleichmäßig fortrückt; wogegen die Schraubenmuttern auf den Support zu liegen kommen und mittels eines Schneidestahles ausgebohrt werden.

Die Hobel- und Nuthstoßmaschinen bearbeiten eine Fläche in geraden Linien, indem sich das auf einem Schlitten befestigte Arbeitsstück gegen den Stichel oder Meißel bewegt, und der letztere nach und nach zur Seite fortrückt. Bei den Planhobelmaschinen gehen beide Bewegungen in einer Horizontalebene vor sich, bei den Rundhobelmaschinen erfolgt das Abhobeln durch horizontale Fortbewegung des Stichels und das Abrücken durch Drehung des Arbeitsstückes, und bei den Nuthstoßmaschinen arbeitet der Stichel in verticalen Linien, während das Arbeitsstück langsam zur Seite rückt. Ferner bei den Planhobelmaschinen erfolgt die hin- und zurückgehende Bewegung des Schlittens entweder mittels einer Kette ohne Ende, oder mittels einer gezahnten Stange, oder mittels einer Schraube, oder endlich mittels eines Kurbelmechanismus, welcher letztere auch bei der Bewegung des Meißels an den Rundhobel- und Nuthstoßmaschinen zur Anwendung kommt. Der Meißel ist durch ein Charnier mit dem Support verbunden, und wird mit diesem durch eine Schraube seitwärts bewegt.

Planhobelmaschinen arbeiten beim Abhobeln von Eisen mit 3 bis 4 Zoll Geschwindigkeit, und es beträgt die seitliche Verrückung nach jedem Spiele der Maschine, $\sigma = 0{,}015$ bis $0{,}100$ Zoll, wobei die Spandicke $\delta = 0{,}15$ bis $0{,}35$ Zoll mißt. Die Kraft zum Abhobeln läßt sich auch hier $P = 48000\,\sigma\delta$ Pfd. setzen. Für $\sigma = 0{,}1$ und $\delta = 0{,}25$ Zoll, ist $P = 1200$ Pfd. und daher der Arbeitsaufwand $L = Pv = 1200 \cdot {}^4/_{12} = 400$ Fußpfd., wofür aber wegen der Nebenhindernisse mindestens 1 Pferdekraft anzunehmen ist.

Kleine Planhobel, Rundhobel und Nuthstoßmaschinen arbeiten

nahe doppelt so schnell, als die großen Planhobelmaschinen, wobei dagegen die Seitenverrückungen und Spanbreiten nur halb so groß ausfallen als bei den letzteren.

Zweites Capitel.

Mühlen.

---

§. 130. Getreidemühlen. Ein Scheffel Korn oder Roggen wiegt 76 bis 82 Pfund und enthält nebst Wasser, Hülsen, Eiweiß, Zucker u. s. w., im Mittel 54 Proc. Stärkemehl und 10 Pfd. Kleber; ein Scheffel Weizen wiegt 80 bis 85 Pfd., ein Scheffel Gerste, 64 bis 70 Pfd. und ein Scheffel Hafer, 45 bis 55 Pfd. Ein Centner Getreide giebt 75 bis 85 Pfd. Mehl in verschiedenen Sorten, ferner 10 bis 20 Pfd. Kleien und höchstens 5 Pfd. Abgang.

Die Mühlsteine bestehen entweder aus Sandstein (sächs. Schweiz), oder aus Basaltlava (Andernach), oder aus Porphyr mit Feldspathkrystallen (Krawinkel in Thüringen), oder aus einem feinkörnigen, porösen Quarz (die Burrsteine von La Ferté sous Jouarre). Die letzteren werden aus Gesteinstücken zusammengekittet, und mit eisernen Reifen umgeben. Der Durchmesser d eines gewöhnlichen Mühlsteins ist 4 bis $5\frac{1}{2}$ Fuß, und die Höhe h desselben, $\frac{3}{4}$ bis $1\frac{3}{4}$ Fuß. Die Bodensteine sind niedriger als die Läufersteine. Der Durchmesser d_1 des Auges im letzteren mißt 8 bis 10 Zoll. Das specifische Gewicht eines Mühlsteines aus dem Ganzen ist $\varepsilon = 2{,}2$ bis $2{,}4$, daher beträgt das absolute Gewicht eines solchen Mühlsteines im Mittel:

$$G = 0{,}0645\,(d^2 - d_1^2)\,h \text{ Pfd.},$$

wenn d und h in Zollen gegeben sind.

Bei den zusammengesetzten Mühlsteinen mit Cementdecke ist im Durchschnitt $\varepsilon = 1{,}95$, und daher

$$G = 0{,}0547\,(d^2 - d_1^2)\,h \text{ Pfd.}$$

Das Zerreißen der Getreidekörner erfolgt durch die sogenannten Hauschläge, welche gewöhnlich durchaus $\frac{1}{4}$ Zoll tief sind, besser aber von innen nach außen an Tiefe abnehmen. Die Hauschläge des Läufers sollen wegen des nöthigen Fortrückens von innen nach außen, die des Bodensteins der Länge nach unter einem Winkel von circa 39 Grad durchkreuzen, wonach die Längenaxe derselben sogenannte logarithmische Spiralen bilden. Es ist vortheilhaft, diesen Kreuzungswinkel nach außen zu etwas abnehmen, und außer den Hauptschlägen noch Neben- oder Zwischenschläge einhauen zu lassen.

Das Mühleisen, welches den Läufer mittels der sogenannten Haue ergreift, ist 2,5 bis 3 Zoll und der Fuß- oder Spurzapfen desselben, 1,5 bis 2 Zoll dick. Die Steinbüchse im Bodenstein, welche das Mühleisen umgiebt, ist entweder mit Holz, (Pockholz) oder mit Metall 5 bis 6 Zoll hoch ausgefüttert. Das auf dem Mühleisen sitzende Getriebe hat einen Halbmesser von 10 bis 18 Zoll, und ist entweder ein Zahnrad mit 26 bis 39 Zähnen, oder ein Riemenrad mit einem 5 bis 6 Zoll breiten Riemen. Die Steinstellung, womit der Läufer im gehörigen Abstand über dem Bodenstein gestellt wird, erfolgt durch Niederlassen oder Aufheben des Fußlagers mittels eines Schraubenmechanismus. Ebenso läßt sich das Fußlager des Mühleisens durch vier Schrauben centriren.

Die Zuführung des Getreides zu den Steinen erfolgt entweder durch den Rüttelschuh oder durch den Centrifugalaufschütter. Der erstere bildet den Boden des Rumpfes, ist an der Rumpfleiter aufgehangen und wird durch den Schlagring mittels des Rührnagels in rüttelnde Bewegung gesetzt. Bei der Centrifugalaufschüttung wird das Getreide durch eine nach Art der Perspective auszuziehende Röhre aus dem Rumpfe in die mit dem Mühleisen rotirende Streuschale geleitet, aus welcher es die Centrifugalkraft heraustreibt. Das gemahlene Gut tritt am ganzen Umfange des Mühlsteines aus, sammelt sich über der sogenannten Steinschlinge in dem 2 bis 3 Zoll weiten Raume zwischen dem Läufer und dem sogenannten Umlaufe und gelangt von da durch das Mehlloch in die Abfallröhre.

Um der Erhitzung des Getreides beim Vermahlen entgegen zu wirken, wird noch eine Ventilation des Mahlganges angewendet, welche entweder durch Zuglöcher im Mühlsteine oder durch einen Ventilator hervorgebracht wird. Der letztere bläst entweder Luft durch das Läuferauge, welche dann die Mahlfläche von innen nach außen durchstreicht, oder er saugt die Luft aus dem Raume zwischen dem Läufer und dem Steinlauf, wobei natürlich ebenfalls ein Luftstrom vom Auge nach dem Umfange des Läufers zu entsteht. Die durch ein besonderes Rohr abströmende Luft setzt ihre Feuchtigkeit in einer besonderen Dunstkammer ab. Die weitere Abkühlung des gemahlenen Gutes wird ferner durch Umschaufeln und Umwenden mittels eines rotirenden Rechens, des sogenannten Hopperboys, sowie auch durch Fortschaffen in hölzernen Schraubenwellen u. s. w. bewirkt, wobei in der Regel wieder ein Rumpf mit dem Rüttelschuh in Anwendung kommt.

Zum Sortiren oder sogenannten Beuteln des Mahlgutes dient entweder der Rüttelbeutel, oder der Cylinderbeutel, oder eine Siebmaschine. Der Rüttelbeutel ist ein wollener Schlauch von 6 Fuß Länge und $^3/_4$ Fuß Weite, und ist mit einer Neigung von 25 bis 30 Grad durch den Beutelkasten geführt, welcher zur Aufnahme des durchgebeutelten Mehles dient,

während der Vorkasten von der unteren Müntung des Beutels den Schrot und die Kleie aufnimmt. Das Rütteln des Beutels erfolgt mittels des sogenannten Gabelzeuges durch ein aus 3 bis 4 Triebstöcken bestehendes und auf dem Mühleisen sitzendes Getriebe.

Der Cylinderbeutel ist ein rotirendes, mit seidener Beutelgaze überzogenes sechsseitiges Prisma von 18 bis 24 Fuß Länge und 32 bis 38 Zoll Weite, welches mit 4 bis 5 Grad Neigung durch den Beutelkasten hindurchgeführt wird. Die Welle des Cylinderbeutels macht pr. Minute 25 bis 30 Umdrehungen, und die pr. Mahlgang erforderliche Beutelfläche ist, nach Wiebe, 150 bis 200 Quadratfuß. Das Auftragen des Mahlgutes erfolgt durch Rüttelschuhe, und das Fortschaffen der durch das Beuteln erlangten Mehlsorten durch horizontale Mehlschrauben. Die Siebmaschinen bestehen aus Drahtgeweben, und kommen vorzüglich bei der Graupenfabrikation in Anwendung. Die gewöhnlichen Siebe sind in Rahmen gefaßt, welche in rüttelnde Bewegung gesetzt werden; die sogenannten Bürstensiebe dagegen sind festliegende Cylinder, in welchen eine mit radialstehenden Bürsten versehene Welle herumläuft.

Das zum Vermahlen angelieferte Getreide bedarf, um gutes reines Mehl zu liefern, noch einer Reinigung, welche entweder eine trockene oder eine nasse ist. Im ersteren Falle wird das Getreide entweder gesiebt, oder gefegt, oder gebürstet, oder gerieben, und im zweiten Falle gewaschen und getrocknet. Auch werden die Getreidekörner vor dem wirklichen Vermahlen wohl erst durch ein Quetschwerk zerdrückt und noch zerkleint; namentlich kommt das Quetschen durch Walzen beim Schroten des Braumalzes in Anwendung. Die beiden gußeisernen Walzen einer solchen Quetschmaschine sind 8 Zoll dick und 18 Zoll hoch, werden durch belastete Hebel gegen einander gedrückt, und machen pr. Minute je 22 und je 28 Umdrehungen. Das Heben des Getreides erfolgt durch sogenannte Sackwinden und durch Becherwerke oder sogenannte Elevatoren. Die letzteren bestehen aus einem Riemen ohne Ende mit aufsitzenden Bechern aus Weißblech, welche die Form eines Viertelcylinders haben, und je 40 bis 60 Cubikzoll Getreide fassen. Zum Abheben und Zulegen des Läufers wird ein sogenannter Steinkrahn angewendet, und zum horizontalen Fortschaffen des Mahlgutes dient ein besonders construirter Schiebbock, der sogenannte Sackwagen, sowie die Schraubenwelle, welche letztere von einer achtkantigen, etwa 6 Zoll dicken Holzwelle gebildet wird, auf welcher ein aus Schaufeln zusammengesetztes Schraubengewinde herumläuft. Die Schaufeln sind etwa 3 Zoll ins Quadrat, während die Ganghöhe des von ihnen gebildeten Gewindes 12 Zoll mißt. Diese Maschine schafft bei 25 bis 30 Umdrehungen pr. Min., in dem horizontalen Troge ungefähr dasselbe Quantum fort, wie das Becherwerk.

Nach Wiebe läßt sich annehmen, daß eine Pferdekraft, ohne Ventilation des Mahlganges, stündlich vermahlt:

1) Weizen.		
a) Ein Mal fein geschroten	0,53 Centner	0,60 Scheffel
b) Mit Einschluß des ersten Gries, fein gemahlen .	0,45 »	0,53 »
c) Mit Einschluß des ersten und zweiten Gries, fein gemahlen	0,40 »	0,48 »
2) Korn oder Roggen.		
a) Ein Mal fein geschroten	0,52 Centner	0,65 Scheffel
b) Zwei Mal fein geschroten	0,31 »	0,40 »
c) Drei Mal fein geschroten	0,25 »	0,31 »
d) Vier Mal gemahlen	0,23 »	0,29 »
3) Branntweinschrot . . .	1,39 »	1,93 »
4) Braumalz	2,09 »	3,48 »

Bei einem Mahlgang mit guter Ventilation fallen diese Leistungswerthe noch $\frac{1}{4}$ größer aus. Rechnet man den Arbeitsverlust durch die Nebenhindernisse pr. Mahlgang $\frac{1}{4}$ Pferdekraft und bezeichnet man den Leistungswerth in der letzten Columne durch μ, so ist bei der Leistung L eines Mahlganges das stündlich producirte Mehlquantum: $M = \mu(L - \frac{1}{4})$ Scheffel, z. B. für Weizen im Mittel: $M = 0{,}53\,(L - \frac{1}{4})$, und für Korn: $M = 0{,}40\,(L - \frac{1}{4})$ Scheffel. Der Arbeitsaufwand L eines Mahlganges ist, je nach der Größe der Steine, 3 bis 7 Pferdekräfte, folglich im Mittel $L = 5$, und $M =$ 2,38 Scheffel Weizen = 1,8 Scheffel Korn. Noch läßt sich auch $M = \alpha v d = \beta u d^2$ setzen, wenn d den Durchmesser, v die Umfangsgeschwindigkeit und u die Umdrehungszahl des Mühlsteines bezeichnen, während

$\alpha = \frac{M}{v d}$ und $\beta = \frac{\pi}{60}\alpha = 0{,}0523\,\alpha$ Erfahrungszahlen ausdrücken.

Nach Wiebe ist für Mahlgänge mit gewöhnlichen Sandsteinen:

$$\alpha = \frac{1}{37{,}5} = 0{,}0267 \text{ und } \beta = \frac{1}{717} = 0{,}00140,$$

dagegen für solche mit französischen Mühlsteinen:

$$\alpha = \frac{1}{22{,}5} = 0{,}0444 \text{ und } \beta = \frac{1}{430} = 0{,}00233,$$

wobei v und d in Fußen zu geben sind.

Die vortheilhafte Umfangsgeschwindigkeit eines Mühlsteins beträgt $v = 25$ bis 30 Fuß, folglich die Umdrehungszahl desselben, bei dem Durchmesser d,

$$u = \frac{60\,v}{\pi d} = 19{,}1\,\frac{v}{d}, \text{ d. i. } u = \frac{5730}{d} \text{ bis } \frac{6878}{d},$$

wenn d in Zollen gegeben ist.

Bei dem Durchmesser d von 4 Fuß ist daher die Umdrehungszahl eines Mühlsteines, $u = 119$ bis 143.

Auch hat man

$$L = \frac{1}{4} + \frac{M}{\mu} = \frac{1}{4} + \frac{\alpha v d}{\mu} = \frac{1}{4} + \frac{\beta u d^2}{\mu},$$

z. B. im ersten Fall für Weizen:

$$L = 0{,}25 + 0{,}0502\, v d = 0{,}25 + 0{,}00263\, u\, d^2,$$

dagegen für Korn:

$$L = 0{,}25 + 0{,}0667\, v d = 0{,}25 + 0{,}00348\, u\, d^2$$ Pferdekräfte.

Wird eine Mahlmühle durch ein verticales Wasserrad umgetrieben, so ist in der Regel ein doppeltes oder dreifaches Vorgelege nothwendig. Hierbei treibt die Wasserradwelle zunächst eine andere horizontale Welle, und diese setzt entweder direct oder indirect durch eine verticale Zwischenwelle das Mühleisen, mittels des auf ihm sitzenden Getriebes in Umdrehung. Bei Anwendung einer verticalen Zwischenwelle erhält man den Vortheil, daß man durch das auf derselben sitzende Triebrad mehrere im Kreise herumstehende Mahlgänge zugleich in Umtrieb setzen kann. Soll das Wasserrad pr. Min. 8 und der Mühlstein 120 Umdrehungen machen, so kann man z. B. ein doppeltes Vorgelege mit den Umsetzungsverhältnissen $\frac{5}{1}$ und $\frac{3}{1}$, oder ein dreifaches Vorgelege mit den Umsetzungsverhältnissen $\frac{3}{1}$, $\frac{2}{1}$ und $\frac{5}{2}$ in Anwendung bringen. Bei Turbinenbetrieb fällt die liegende Zwischenwelle ganz weg, und man kann entweder das Mühleisen unmittelbar durch ein Vorgelege an die Turbinenwelle anschließen, oder eine Zwischenwelle anwenden, welche mehrere im Kreise herumstehende Mahlgänge zugleich in Umtrieb setzt.

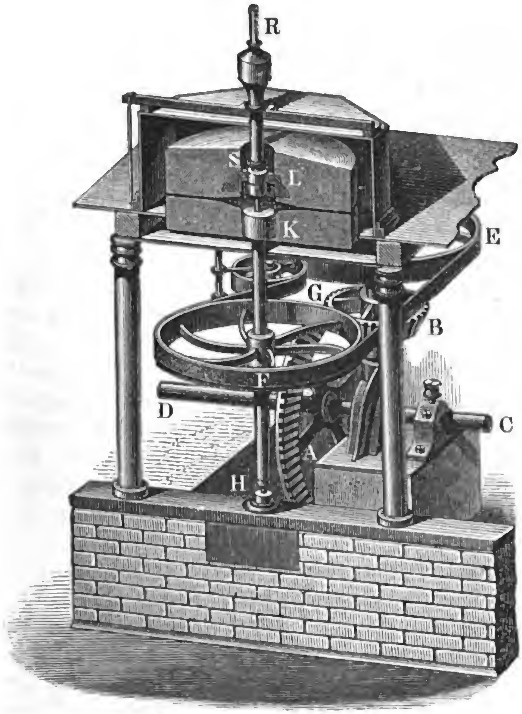
Beim Betrieb einer Mühle durch Dampfkraft trägt man die Umdrehung der Schwungradwelle durch ein Vorgelege mit dem Umsetzungsverhältnisse $\frac{3}{1}$ bis $\frac{4}{1}$ auf eine andere liegende Welle über, welche dann mittels conischer Räder die Mahlgänge in Bewegung setzt.

Nach Wiebe kann man den Kraftbedarf einer vollständigen Mühle wie folgt abschätzen. Die sämmtlichen Hülfsmaschinen nehmen $\frac{1}{6}$ bis $\frac{1}{5}$ der Kraft in Anspruch, welche die Mahlgänge erfordern und zwar ist zu rechnen: für einen Aufzug $\frac{1}{2}$ bis $1\frac{1}{2}$, für einen Exhaustor von 3 Fuß Durchmesser, welcher pr. Minute 300 Umdrehungen macht, $1\frac{1}{2}$ bis 2 Pferdekräfte, für ein Becherwerk bei h Fuß Förderhöhe, $\frac{h}{150}$ bis $\frac{h}{100}$ Pferdekräfte, für ein Schraubenwerk bei der Wegelänge s Fuß, $\frac{s}{500}$ bis $\frac{s}{400}$ Pferdekräfte, für einen Cylinderbeutel bei der Länge l Fuß desselben, $\frac{l}{50}$ bis $\frac{l}{100}$ Pferdekräfte, für die Schrotkühler (Hopperboy) bei dem Durch-

messer d seiner Kreisbahn, $\frac{d}{120}$ bis $\frac{d}{100}$ Pferdekräfte, für ein Getreidesieb von der Länge l_1, $\frac{l_1}{50}$ Pferdekräfte. Endlich erfordert eine Bürstmaschine, sowie auch ein Spitzgang für Getreide, $2\frac{1}{2}$ bis $3\frac{1}{2}$ Pferdekräfte Arbeitsaufwand.

Der in Fig. 487 abgebildete Mahlgang mit Riementransmission kann ebenso gut von einer Dampfmaschine als von

Fig. 487.



einem Wasserrade umgetrieben werden. Die liegende Welle CD setzt mittels des conischen Zahnradvorgeleges AB eine stehende Welle in Umdrehung und diese wieder mittels des Riemenvorgeleges EFG das Mühleisen HK sammt Läufer L. Bei G befindet sich eine sogenannte Spannrolle, und bei S die sogenannte Streuschale, aus welcher die durch das Rohr R zugeführten Getreidekörner durch die Centrifugalkraft herausgeschleudert werden.

§. 131. Oelmühlen. Diese Mühlen liefern vorzüglich Lein-, Raps- und Rübsenöl. Ein Scheffel Leinsamen wiegt 80 Pfd. und liefert 7 bis 8 Quart Oel; ein Scheffel Winterraps liefert bei 75 Pfd. Gewicht, 14 bis 15 Quart Oel,

und ein Scheffel Winterrübsen giebt bei 70 Pfd. Gewicht, 12 bis 13 Pfd. Oel. Sommerraps und Sommerrübsen sind 25 Proc. geringhaltiger. Zum Reinigen der Oelsamen dient ein sogenannter Reinigungscylinder, welcher von einem den Mantel eines achtseitigen Prismas bildenden Eisendrahtgeflechte gebildet wird. Dieser Cylinder ist 2 bis $2\frac{1}{2}$ Fuß weit, hat bei 6 Fuß Länge, 4 bis 6 Zoll Fall, und macht pr. Min. 40 bis 60 Umdrehungen, wobei er stündlich 18 Scheffel Raps reinigt, und $\frac{1}{4}$ Pferdekraft in Anspruch nimmt. Das Drahtgeflecht hat von oben herein 26, und am unteren Ende aber nur 7 bis 8 Drähte pr. Zoll Länge oder Breite.

Das Zerkleinen oder Zerquetschen der Oelfrucht erfolgt entweder durch Walzen, oder durch Mühlsteine, oder durch Stampfer. Die Quetschwalzen sind gewöhnlich aus Gußeisen, haben bei $1\frac{1}{2}$ bis $2\frac{1}{4}$ Fuß Länge, 1 Fuß Durchmesser und machen 30 bis 60 Umdrehungen pr. Min. Man treibt mit Vortheil die eine Walze um $\frac{1}{3}$ langsamer um, als die andere, auch wendet man wohl eine größere und eine kleinere Walze an, und läßt letztere bloß durch die Reibung umlaufen. Nach Scholl erfordert ein Quetschwalzwerk $\frac{3}{4}$ bis 2 Pferdekräfte, und verarbeitet stündlich 2 bis 6 Centner Raps, oder $1\frac{1}{2}$ bis 4 Centner Lein, wobei die Walzen durch Kniehebel mit 20 bis 30 Centner Kraft gegen einander zu drücken sind. Die Oelgänge, welche den zerquetschten Samen weiter zerreiben, bestehen aus zwei Mühlsteinen, welche mittels einer stehenden Welle auf einem dritten Mühlsteine, dem sogenannten Bodenstein oder Herd, im Kreise herumgeführt werden, wobei sie sich um einen horizontalen Querarm umdrehen. Diese Steine müssen aus einem harten und feinkörnigen Material, z. B. dichtem Kalkstein, Trachyt, Granit u. s. w. bestehen. Die Läufer haben 6 bis 8 Fuß Durchmesser, 14 bis 20 Zoll Dicke, und wiegen je 30 bis 70 Centner. Die stehende Welle ist 8 bis 10 Fuß lang, besteht entweder aus Holz oder Gußeisen und hat in der Mitte ein Auge zum Durchstecken der $2\frac{1}{2}$ bis $3\frac{1}{2}$ Zoll dicken schmiedeeisernen Spindel. Die mittlere Umdrehungsgeschwindigkeit eines Läufers ist 2 Fuß, und der mittlere Abstand desselben von der Axe der stehenden Welle, 2 Fuß, folglich die erforderliche Umdrehungszahl der letzteren pr. Minute, $u = \frac{30\,v}{\pi r} = \frac{30}{\pi}$, d. i. circa 10. Der freie Raum auf dem Bodenstein, welcher außen von einem 8 Zoll hohen Mantel umgeben ist, hat mindestens 3 Zoll Breite. Ein Oelgang mahlt stündlich pr. Pferdekraft 0,8 Scheffel Raps oder Rübsen oder 0,5 Scheffel Lein. Noch läßt sich annehmen, daß bei dem Gewichte G des Läufersteins und der mittleren Geschwindigkeit v desselben, der Arbeitsaufwand eines Oelganges zum Betrieb, $L = 0{,}1\, Gv$ Fußpfd. $= 0{,}00021\, Gv$ Pferdekräfte betrage. Z. B. für $G = 2 \,.\, 5000 = 10000$ und $v = 2$ Fuß, ist $L = 4{,}2$ Pferdekräfte, und das stündliche Mahlquantum $Q = 0{,}8\, L = 3{,}36$ Scheffel Raps.

In älteren Oelmühlen erfolgt die Zerkleinerung der Oelfrucht durch **Stampfwerke** (s. §. 113, S. 698), und zwar in sogenannten **Gruben**. Dieselben sind in dem sogenannten **Grubenstocke**, einem 2 Fuß hohen und ebenso breiten Eichenholze ausgenommen, und haben am Boden ein eisernes Futter. Die Tiefe einer Stampfgrube ist 14 bis 18 Zoll und die Weite, je nachdem nur 1 Stempel oder 2 Stempel in derselben Grube arbeiten, entweder durchgängig 6 bis 9 Zoll, oder nur in der einen Richtung 6 bis 9 Zoll, in der andern dagegen 12 bis 16 Zoll. Nach **Scholl** ist die Tiefe einer Grube $^3/_4$ des Stampferhubes, und die größte Weite in $^2/_3$ der Höhe über dem Boden, gleich der vierfachen Stampferdicke $+$ 1 Zoll; ferner ist der Mittelpunkt dieser Weite zugleich Centrum des Kreisbogens für die Schablone des oberen, während die Endpunkte derselben als Mittelpunkte für die Schablonen des unteren Trogtheiles dienen. Außerdem erhält der Trog noch einen cylindrischen Hals von $1^1/_4$ Zoll Höhe. Man kann annehmen, daß jeder Stampfer pr. Stunde 0,075 Scheffel Leinsamen, dagegen 0,15 Scheffel Raps- oder Rübsamen verarbeitet, wobei in den letzteren Fällen eine zweimalige Bearbeitung nöthig ist. Rechnet man auf einen Pochstempel $^1/_2$ Pferdekraft, so ist hiernach zu erwarten, daß 1 Pferdekraft stündlich 0,3, und folglich ein Stampfwerk mit 12 Stempeln oder 6 Pferdekräften, 2 Scheffel Raps verarbeitet.

Der auf die eine oder die andere Weise zerkleinte Oelsamen ist durch Erwärmung auf dem **Samenwärmer** vor dem Auspressen von dem Pflanzeneiweiß und Schleim zu befreien. Die Erhitzung der Platte, worauf der Samen 2 bis 4 Zoll hoch zu liegen kommt, erfolgt entweder durch directe Feuerung, oder durch heißes Wasser, oder durch Dampf, wobei die Platte eine Temperatur von 110 und der Samen eine solche von 80^0 annimmt. Jedes Pfund Samenmehl, welches stündlich zweimal erwärmt wird, erfordert 6 bis 7 Quadratzoll Erwärmungsfläche. Nach **Scholl** werden in 12 Stunden, bei Verbrauch von 65 Pfd. Steinkohlen, für eine Doppelpresse 1,56 Scheffel Samen erwärmt. Dampfsamenwärmer, welche entweder durch besonders erzeugten oder durch den abziehenden Dampf einer Dampfmaschine erwärmt werden, erfordern pr. Pfund Raps 0,131 Pfd. Dampf vor der ersten, und 0,087 Pfd. Dampf vor der zweiten Pressung. Zum Betrieb der beiden Rührer eines Wärmers ist, bei 24 Umdrehungen pr. Minute, ein Arbeitsaufwand von $^1/_{10}$ bis $^1/_8$ Pferdekraft nöthig.

Das **Auspressen** des Oels besteht gewöhnlich in einem **Vorpressen** und einem **Nachpressen**. Während die Kuchen zum Vorpressen $1^1/_2$ bis 2 Zoll dick sind, fallen die zum Nachpressen nur $^1/_2$ bis $^3/_4$ Zoll dick aus, wobei die Fläche derselben 80 bis 120 Quadratzoll mißt. Die leinenen Säcke, in welche die Samenmasse vor dem Pressen gefüllt wird, kommen nicht unmittelbar zwischen die Preßplatten zu liegen, sondern werden noch in Preßtüchern von Roßhaaren oder Blechtafeln von $^1/_8$ Zoll Stärke eingehüllt. Beim Auspressen kommt es besonders

darauf an, daß der Druck allmälig zunimmt, wobei die gepreßte Masse allmälig an Volumen abnimmt, und das Oel zum Abfluß Zeit genug hat. Uebrigens sind die Pressen entweder Keil- oder Kniehebel-, oder hydraulische Pressen. Zu einer Keilpresse gehören ein Preßkeil und ein Lösekeil, sowie zwei hölzerne Stampfer von ungefähr 16 Fuß Länge, $(^2/_3)^2 = {}^4/_9$ Quadratfuß Querschnitt und 2 bis $3^1/_2$ Centner Gewicht. Der Stampfer des Preßkeiles hat 20 bis 22 Zoll Hub, und macht beim Vorschlagen 18, dagegen beim Nachschlagen 30 bis 45 Schläge, wobei mit Einschluß der Zeit zum Losschlagen, Einsetzen u. s. w. ein Zeitaufwand von 4 bis 8 Minuten erforderlich ist. Der Kraftaufwand beim Betrieb einer einfachen Presse ist (s. S. 700), wenn man annimmt, daß im Mittel der Stempel bei einem Gewicht von 3 Centner und einem Hube von $^5/_3$ Fuß, pr. Minute 30 Schläge macht,

$$L = \frac{30 \,.\, 300 \,.\, ^5/_3}{45} = 333 \text{ Fußpfd.} = 0{,}7 \text{ Pferdekräfte.}$$

Die Kniehebelpressen sind nach Scholl besonders beim Nachschlag mit Vortheil anzuwenden. Es kann hier pr. Quadratzoll leicht ein Druck von 1000 Pfd. ausgeübt werden.

Die hydraulischen Pressen sollen sich nach Scholl mehr zum Vor- als zum Nachschlag eignen. Sie üben pr. Quadratzoll einen Druck von 2500 bis 5000 Pfd. aus. Der Preßkolben hat, bei 8 bis 12 Zoll Schub, 6 bis 10 Zoll Durchmesser, und wenn er hohl ist, 2 bis $2^1/_2$ Zoll Wandstärke; der Cylinder hat dagegen eine Wandstärke von 3 bis 5 und eine Bodenstärke von 4 bis 6 Zoll. Der Speisekolben hat nur $^3/_4$ bis 1 Zoll Durchmesser, wobei er pr. Min. 30 bis 40 Spiele von je 4 bis 6 Zoll Hub macht, und den Arbeitsaufwand von 3 Pferdekräften in Anspruch nimmt. Hierbei werden in 8 bis 12 Minuten, 6 bis 8 Kuchen oder nahe 1 Scheffel Oelsamen durchgepreßt.

Blundel's Doppelpressen kommen in neuer Zeit sehr oft in Anwendung. Hier enthält jede Presse 4 übereinander stehende Preßkammern, und es liefert jede Pressung binnen 10 Minuten Zeit, 60 Pfd. Kuchen oder 24 Pfd. Oel.

§. 132. Lohmühlen, Trass- und Gypsmühlen u. s. w. Eine Lohmühle zum Hacken der Lohrinde in $^3/_4$ bis 1 Zoll lange Stücke liefert stündlich 20 bis 22 Centner, erfordert 4 Pferdekräfte Arbeitsaufwand und macht pr. Min. 140 Schnitte. Ein Lohgang, dessen Läufer bei 46 Zoll Durchmesser, 14 Zoll Höhe hat, mahlt stündlich 440 Pfd. gehackte Rinde, wobei er pr. Min. 100 Umdrehungen macht und 5 Pferdekräfte in Anspruch nimmt. Mühlen mit glockenförmigem Läufer aus Gußeisen von $28^1/_2$ Zoll Durchmesser und $13^1/_3$ Zoll Höhe liefern stündlich 642 Pfd. Lohe, wobei sie pr. Minute 28 bis 30 Umdrehungen machen und die mechanische Arbeit von 4 Pferdekräften beanspruchen.

Zum Vermahlen von Gyps, Traß u. s. w. verwendet man einen Mahlgang mit zwei aufrechtstehenden Steinen von $4^2/_3$ Fuß Durchmesser und 1 Fuß Dicke, welcher bei 13 Umdrehungen pr. Min. stündlich 6 bis 8 Scheffel fein gekörnten Traß liefert, und 5 bis 6 Pferdekräfte Arbeitsaufwand erfordert. Den auf einem solchen Gange grob vermahlenen Dünngyps vermahlt man auf einem gewöhnlichen Mahlgang ganz fein.

Drittes Capitel.

Manufacturmaschinen.

§. 133. Flachs- und Leinenmanufactur. Ein Morgen Feld liefert 800 bis 1500 Pfd. trocknen rohen Flachs, zu je 2800 bis 5000 Stengel, wovon jeder 14 bis 15 Proc. reine Faser liefert. Das Riffeln des Flachses, wobei derselbe von den Samenkapseln befreit wird, erfolgt durch einen eisernen Riffelkamm. Das Rösten (Rotten) des Flachses hat den Zweck, durch einen Gährungsproceß den Kleber in den Flachsstengeln zu zerstören, es besteht dasselbe entweder in einer Wasser- oder in einer Thauröste, oder besser in einer gemischten Röste, oder in der sogenannten Dampfröste, wobei die Röstzeit auf drei Tage reducirt wird. Nach dem Rösten wird der Flachs durch die Sonnen- oder Ofenhitze gedarrt und gleichgezogen. Hierauf erfolgt das Brechen desselben, wobei das Holz der Flachsstengel zerknickt und vom Bast getrennt wird. Hierzu dient entweder eine sogenannte Handbreche oder eine besondere Brechmaschine. Die Handbreche ist ein einarmiger Hebel mit zwei Holzmessern, wodurch der Flachs gegen die aus drei Holzmessern bestehende Lade gedrückt wird. Die Brechmaschine besteht dagegen in einem Walzwerke mit mehreren geriffelten Walzenpaaren, zwischen welchen der Flachs nach und nach durchgezogen wird. Eine solche Maschine mit 5 Walzenpaaren erfordert zum Betrieb 1 Pferdekraft und zur Bedienung 3 bis 4 Kinder, wobei sie in 12 Stunden 30 bis 40 Centner Flachs bricht. Mit dem Brechen ist auch wohl das Schlagen oder sogenannte Boken mittels hölzerner Schlägel oder Stampfer verbunden.

Auf das Brechen folgt das Risten, Ribben und Schwingen des Flachses. Das letztere erfolgt entweder durch die Handschwinge mit einem hölzernen Messer oder durch eine sogenannte Schwingmaschine, welche letztere in einer rotiren-

den Welle mit fünf aus derselben radial hervorstehenden Holzmessern besteht. Gewöhnlich sitzen 12 solcher Messersterne auf einer und derselben Welle, welche pr. Minute 150 bis 200 Umdrehungen macht. Das nun vorzunehmende Hecheln, wobei der Flachs fein zertheilt und vom Werg befreit wird, erfolgt entweder durch eine Handhechel oder durch eine Hechelmaschine. Während die Handhechel in einem Teller mit 500 bis 1000 Drahtspitzen besteht, ist die Hechelmaschine in der Hauptsache eine mit 3 bis 4 Fuß Geschwindigkeit umlaufende Trommel, auf deren Umfange die Hechelzähne festsitzen.

Der Hanf ist härter und gröber als der Flachs, weshalb er nur zu groben Geweben und zur Seilfabrikation dient.

Die Flachsspinnerei. Das Spinnen auf der Spindel liefert ein Garn, welches wegen seiner geringen Drehung nur zur Anfertigung von Zwirn und zum Einschuß beim Weben gebraucht werden kann, wogegen das Spinnrad brauchbares Garn für alle Zwecke giebt.

Die Maschinenspinnerei ist vorzüglich zur Anfertigung feiner Gespinnste geeignet. Es ist zu unterscheiden: die Flachs- und Wergspinnerei. Bei der Flachsspinnerei kommen folgende Arbeiten vor:

1) Die Bildung von Bändern durch die Anlegemaschine. Nachdem hier der Flachs zwischen den Einführungs-, Streck- und Abzugswalzen hindurchgegangen ist, tritt er als ein 2 Zoll breites Band aus den letzteren heraus;

2) das Dupliren und Strecken der Flachsbänder durch die Anlegemaschine und durch Streckwerke. In beiden Fällen erfolgt das Fortziehen des Flachses von einem Walzenpaar zum anderen durch die Hechelhalter, welche entweder mittels einer Doppelkette ohne Ende oder mittels zweier Schraubenspindeln fortbewegt werden. Nach dem dritten Ausziehen kommen die Flachsbänder

3) in die Vorspinnmaschine (Spulmaschine, Spindelbank), wo sie durch weiteres Strecken und gelindes Drehen ($1\frac{1}{4}$ Drehung auf 1 Zoll Länge) in das sich auf Spulen aufwickelnde Vorgespinnst von der Dicke eines gewöhnlichen Bindfadens verwandelt werden. Dieses wird endlich durch die Feinspinnmaschine weiter gestreckt und gedreht, wobei sich der Faden auf Spulen aufwickelt, deren Spindeln pr. Minute 2000 bis 3000 Umdrehungen machen, wogegen die Spindeln der Vorspinnmaschine pr. Minute nur 550 Mal umlaufen. Man wendet jetzt oft das nasse Feinspinnen an, wobei das Vorgespinnst durch heißes Wasser geleitet wird, bevor es durch die Walzen geht. Zu feineren Gespinnsten wird der Flachs vor dem Vorspinnen erst in 2 bis 4 Theile zerschnitten.

Um Werg auf Maschinen verspinnen zu können, ist dasselbe erst durch Schütteln oder Schlagen mittels besonderer Maschinen aufzulockern und zu reinigen. Die hierzu dienenden Kratzmaschinen (Karden, Krempel) bestehen aus einer größeren

Trommel und mehreren kleinen Walzen, beide mit Kratzleder überzogen. Bei dieser Vorarbeit findet ein Materialverlust von 20 Proc. statt. Das nun folgende Strecken und Dupliren, sowie das Vor- und Feinspinnen der Wergbänder ist von dem Verspinnen des Flachses nicht wesentlich verschieden.

Im Allgemeinen läßt sich beim Flachsspinnen Folgendes annehmen:

	Walzen	Durchmesser der Walzen in Zollen	Umdrehungszahl u der Walzen pr. Minute	Gelieferte Band- oder Fadenlänge in Zollen	Streckung pr. Durchzug
Flachsspinn.	Einzugw. . .	$1^1/_2$ bis 3	3 bis 12	12 bis 96	1,05fach
	Streckwalzen	$2^1/_2$ bis $4^1/_2$	20 bis 120	200 bis 1200	6- bis 36fach
	Abzugwalzen	3 bis 4	70 bis 100	650 bis 1300	12- bis 40fach
Wergspinn.	Einzugw. . .	$1^1/_2$	$3^1/_2$ bis 25	16 bis 120	—
	Streckwalzen	$2^1/_2$ bis $2^3/_4$	20 bis 90	200 bis 700	6- bis 12fach
	Abzugwalzen	$2^1/_2$	80 bis 100	730 bis 750	6,36- bis 12,72fach

Die Garnnummer N giebt an, wie viel Gebinde oder Leas à 300 Yards Länge auf 1 Pfd. engl. gehen. Aus derselben läßt sich die Anzahl n der Drehungen von 1 Zoll Länge Garn durch die Formel $n = \alpha\sqrt{N}$ berechnen, wobei $\alpha =$ im Mittel 2,2 zu setzen ist. Die Weife giebt bei einem Umschlag in England eine Fadenlänge von 3 Yards, in anderen Ländern eine solche von nur $2^1/_2$ Yards.

Man kann annehmen, daß 100 Pfd. geschwungener Flachs 60 Pfd. gehechelten Flachs, 35 Pfd. Werg und 5 Pfd. Abgang geben. Eine Feinspindel producirt täglich 12 bis 15 Gebinde von der Nummer 20 bis 80, im Durchschnitt von 0,10 bis 0,125 Pfd. Gewicht. Im Mittel erfordern 100 Feinspindeln 1 Pferdekraft zum Umtrieb.

§. 134. Baumwollenmanufactur. Die Arbeiten, welche in einer Baumwollspinnerei vorkommen sind der Reihe nach folgende: 1) das Reinigen und Auflockern der rohen Baumwolle, 2) das Kratzen (Krempeln, Cardiren) derselben, wobei die Baumwollenfasern zu einem Bande vereinigt werden, 3) das Strecken und Dupliren der Bänder, 4) das Vorspinnen, wobei die Bänder zu einem groben und schwach gedrehten Faden, das sogenannte Vorgespinnst, ausgezogen und auf eine Spule aufgewickelt werden, und 5) das Feinspinnen, durch welches das Vorgespinnst weiter gestreckt wird und die nöthige Drehung erhält. Zuletzt folgt noch das Haspeln, Sortiren und Verpacken des durch das Feinspinnen erhaltenen fertigen Garnes.

Die erste dieser Arbeiten erfolgt entweder durch Schlagen mittels eines Stäbchens, oder mittels eines sogenannten Wolfes, oder mittels einer besonderen Schlagmaschine. Der gewöhnliche Wolf besteht in einer mit Stahlzähnen ausgerüsteten und in einem Gehäuse eingeschlossenen rotirenden Trommel. Bei dem sogenannten Willow mit conischer Trommel findet stetige Arbeitsverrichtung statt, indem die Baumwolle am schwächeren Ende der Trommel ein- und am stärkeren Ende derselben austritt. Eine solche Maschine von 6 Fuß Länge macht pr. Minute 400 bis 600 Umdrehungen und verarbeitet bei 3 Pferdekräften Arbeitsaufwand, täglich 2000 bis 5000 Pfd. Baumwolle. Die Schlagmaschine besteht im Wesentlichen aus einem oder zwei Schlägern oder rotirenden Wellen mit je zwei oder drei eisernen Flügeln und enthält noch einen Ventilator, welcher den feinen Staub fortführt, während der gröbere Staub durch den sogenannten Rost fällt. Die erste Schlag- oder sogenannte Putzmaschine mit zwei Schlägern und einem Ventilator verarbeitet täglich 1000 bis 1500 Pfd. Baumwolle bei 3 Pferdekräften Arbeitsaufwand. Der erste Schläger macht pr. Minute 1000 bis 1600, der zweite 1300 bis 1900 Umdrehungen; beim Durchgang von 1 Zoll Baumwolle macht jener 50 bis 60, dieser aber nur 40 Schläge. Die zweite Schlagmaschine, Watten- oder Wickelmaschine hat nur einen Schläger, welcher 1200 bis 1500 Umdrehungen macht, enthält aber außer den geriffelten Speisewalzen und einer Siebtrommel noch besondere Druckwalzen, von welchen aus sich die Baumwolle als Watte auf die Wickelwalze aufrollt. Eine solche Maschine liefert täglich 1500 Pfd. Watte, und beansprucht 2 Pferdekräfte Arbeit. Der Epurateur, welcher in neuerer Zeit zwischen der Wickelmaschine und den Krempel eingeschaltet wird, macht nur einen Durchgang durch diese Maschine nöthig, und eignet sich vorzüglich zur Wattenfabrikation. Er verarbeitet, während seine Haupttrommel pr. Minute 250 bis 270 Umdrehungen macht, täglich 180 bis 240 Pfd. Baumwolle, und nimmt $^2/_3$ Pferdekräfte in Anspruch.

Durch die Krempel werden die Baumwollenfasern vollständig entwirrt und in eine parallele Lage gebracht. Der Hauptbestandtheil einer Krempelmaschine ist eine große Trommel, welche pr. Minute 90 bis 200 mal umläuft, und am Umfange mit Kratzenleder bekleidet ist, von welchem 1 Quadratzoll 200 bis 850 Drahthäkchen von $^1/_4$ Linie Dicke enthält. Außerdem enthält diese Maschine noch Speisewalzen, Vorwalzen, Arbeitswalzen u. s. w. Der Vorkrempel liefert nur Watte; der Feinkrempel hingegen, welcher einen feinen Kratzenbeschlag hat, verwandelt das Baumwollenvließ in ein Band. Die Streckung beim Durchgang durch eine Krempelmaschine ist 50 bis 150, die Betriebskraft einer solchen Maschine 0,2 bis 0,3 Pferdekräfte, und die tägliche Leistung derselben pr. Zoll Breite des Krempelbeschlages, 1 bis $3^1/_3$ Pfd., und zwar bei 3 Fuß Breite im

Mittel 50 Pfd. Band. Die von 6 bis 12 Vorkrempeln gelieferten Bänder werden durch die Kanalmaschine auf eine Holzspule neben einander aufgewickelt, wovon sie durch die Duplir- oder Lappingmaschine abgezogen und zu einem Wickel für den Feinkrempel vereinigt werden.

Durch die Streck- oder Laminirmaschine erhalten die Bänder nicht nur die nöthige Streckung, sondern werden auch noch duplirt, wobei man 4 bis 8 Bänder zu einem Ganzen vereinigt und weiter auszieht. In der Hauptsache besteht eine solche Maschine aus mehreren, z. B. vier geriffelten Cylinderpaaren von 1 bis $1^1/_2$ Zoll Durchmesser mit steigenden Umfangsgeschwindigkeiten. Jede Strecke besteht aus 3 bis 8 Köpfen oder zusammengehörigen Walzensystemen, und jeder Kopf zieht das Band 5- bis 9fach aus, wonach die ganze Streckung eines Bandes durch mehrere Köpfe leicht zu berechnen ist. Z. B. bei 6facher Streckung durch einen Kopf und beim Durchgang durch vier Köpfe, beträgt die ganze Streckung $(6)^4 = 1296$. Um das Band durch die Streckung nicht zu verfeinern, duplirt man in demselben Verhältniß, wie die Köpfe strecken, läßt z. B. im gegebenen Falle sechs Bänder zugleich durch einen Streckkopf gehen. Die fertigen Bänder werden durch die Abzugswalzen in die Kannen (Preßtöpfe, Drehtöpfe) geführt. Eine Strecke mit vier Köpfen wird durch zwei Personen bedient, wobei jeder Kopf täglich 600 Pfd. Band liefert und $^1/_{20}$ Pferdekraft zum Umtrieb erfordert.

Beim Vorspinnen wird das Streckband durch weitere Streckung und Drehung in grobes Garn verwandelt. Die Drehung ist entweder bleibend oder nur vorübergehend. Die vorzüglichste Vorspinnmaschine, welche ein wenig gedrehtes Vorgespinnst liefert, ist die Spindelbank, Spulenmaschine mit Fleyer. Dieselbe besteht aus einem gewöhnlichen Streckwerke mit 3 bis 4 Cylindern und aus dem Fleyermechanismus, welcher durch die Spindeln dem Garn die nöthige Drehung giebt, und es mittels der Fleyer auf die Spulen aufwickelt. Damit sich der von den Streckwalzen gelieferte Faden in größer und größer werdenden Umfängen auf die Spulen gehörig aufwickele, ist nöthig, daß die Umfangsgeschwindigkeit derselben nicht allein kleiner sei als die des Fleyers, sondern auch constant bleibe und daher die Umdrehungszahl der Spule während der Aufwickelung allmälig kleiner werde, wozu das sogenannte Differentialgetriebe dient. Gewöhnlich geht das Garn nach und nach durch drei Spindelbänke, den Grob-, Mittel- und Feinfleyer. Um eine dichte Aufwickelung zu erlangen, bedient man sich der sogenannten Preßfleyer. Die Spindeln sitzen zu je 24 bis 120 auf einer Spindelkante, und machen pr. Min. 300 bis 700 Umdrehungen. Die Anzahl der Drehungen des Vorgespinnstes pr. Zoll ist 0,45 bis 4,5. Eine Spindel liefert täglich 14000 bis 26500 Fuß Vorgespinnst, und eine Spindelbank mit 60 Spindeln, wovon jede 600 Umgänge pr. Minute macht, erfordert zum Be-

trieb 0,5 Pferdekräfte, dagegen eine solche mit 96 Spindeln mit je 800 Umdrehungen nur 0,75 Pferdekräfte Arbeitsaufwand erfordert.

Das **Feinspinnen** erfolgt entweder durch die **Water-(Drosselmaschine)**, oder, und zwar gewöhnlicher, durch die **Mule- (Mule-Jenny) maschine.** Beide Maschinen haben ein Streckwerk mit drei Cylinderpaaren, sind aber im Mechanismus zum Drehen und Aufwinden von einander verschieden. Die erstere Maschine ist der Spindelbank ähnlich construirt und wickelt wie diese den Faden, nachdem er durch den Fleyer und die Spindel die nöthige Drehung erhalten hat, auf die rotirenden Spulen auf. Bei **Mulemaschinen** sitzen dagegen die einfachen Spindeln auf einem Wagen, welcher beim Ausfahren den Faden auszieht und dreht, sowie um einige Zoll streckt, und beim darauf folgenden Einfahren das Garn auf die Spindel aufwickelt, wobei es nach und nach einen birnförmigen Körper, den sogenannten **Kötzer** (die **Bobine**), bildet. Bei der **selbstthätigen Mulemaschine** (Selfactor) werden alle Bewegungen, mit Einschluß der des Wagens, durch eine Elementarkraft hervorgebracht. Zwischen dem Selfactor und der Handmule steht der **Halbselfactor** inne, bei welchem noch einige Bewegungen durch die Hand hervorgebracht werden. Die ganze Auszugszeit, innerhalb welcher der Wagen den Weg von 5 Fuß hin und zurück durchläuft, beträgt 15 bis 30 Sec. Eine Mulemaschine enthält 120 bis 1200 Spindeln, welche pr. Minute 3000 bis 7000 Mal umlaufen und 100 bis 350 Zoll Garn liefern, welches bei einer 4- bis 20fachen Streckung, auf 1 Zoll Länge, 17 bis 30 Drehungen enthält. Einen Schneller = 2520 engl. = 2447 preuß. Fuß gerechnet, läßt sich voraussetzen, daß eine Spindel täglich 20 Schneller Garn Nr. 40, oder 10 Schneller Garn Nr. 120 liefert.

Im Allgemeinen läßt sich annehmen, daß 1 Pferdekraft 200 bis 300 Spindeln in Umtrieb setzt, wovon die Vorbereitungsmaschinen 30 Proc. in Anspruch nehmen. Die Anzahl der Drehungen der Garnnummer N ist $n = \alpha\sqrt{N}$, wobei man $\alpha = 3$ bis 4,5 setzen kann. Die englische **Garnweife** hat einen Umfang von 1,5 Yard = 54 Zoll engl., und die Garnnummer N giebt an, wie viel hanks oder Schneller à 840 Yards in einem englischen Pfund Garn enthalten sind.

§. 135. Schafwollenmanufactur. Außer der **Pelzwäsche** (Schwemme), welche der Schafschur einige Tage vorausgeht, erfordert die Schafwolle noch eine **Fabrikwäsche.** Die letztere erfolgt nach vorausgegangenem Auflockern und Reinigen durch Ausklopfen in heißem Seifenwasser, worin sie mit Holzgabeln umgestochen wird. Ein Mann verarbeitet täglich $1^1/_2$ bis 2 Centner Wolle, wobei 7 bis 12 Pfd. Seife verbraucht werden. Zum Auswinden und Trocknen der gewaschenen Wolle dient eine Wollwalze, eine Centrifugalmaschine u. s. w.

Wesentlich sind von einander zu unterscheiden: die Kammwolle und die Streichwolle. Jene hat eine Faserlänge von mindestens 4 Zoll und wird, wie die Baumwolle, zu Bildung von Fäden verwendet, woraus glatte Stoffe, wie Merino, Thibet u s. w., verwebt werden; diese hingegen besteht aus kurzen gekräuselten Fasern, welche sich leicht verfilzen lassen, und deshalb zur Fabrikation von Tuch, Kasimir, Flanell u. s. w. dienen. Zwischen inne liegende Wollsorten liefern sogenannte Halbkammgarne, wohin die Strick-, Strumpfwirkergarne u. s. w. gehören.

Das Kämmen der Wolle zur Kammgarnfabrikation erfolgt entweder durch die Hand oder durch Maschinen. Die Kämme der Handkämmerei enthalten mehrere Reihen stählerner Zähne von 8 bis 10 Zoll Länge, welche am Fuße $1/8$ bis $1/6$ Zoll Dicke haben und am freien Ende in Spitzen auslaufen. Die Ebene einer Zahnreihe von 24 bis 30 Zähnen ist gegen die Axe des Stieles unter einem Winkel von 50 Grad geneigt. Die Kämme werden in einem besonderen Ofen angewärmt, weil die Wolle in der Hitze an Geschmeidigkeit zunimmt; auch schmiert man wohl die letztere mit $1/40$ bis $1/16$ ihres Gewichtes Oel ein. Das Product eines Kämmens ist ein 5 bis 6 Fuß langes, 6 Zoll breites und höchstens $1/4$ Zoll dickes Band oder sogenannter Zug von $1\frac{1}{2}$ bis 3 Loth Gewicht. Der Abgang beim Kämmen besteht in 3 bis 5 Proc. Unreinigkeiten und 15 bis 30 Proc. Kämmlingen. Ein Handkämmer liefert täglich 1 bis 2,5 Pfd. Kammzug.

Unter den verschiedenen Kämmmaschinen ist das System von Heilmann und Schlumberger das vorzüglichste. Hier wird die gewaschene Wolle in der sogenannten Nappeuse getrocknet und in lockere Watte verwandelt. Diese Maschine besteht in der Hauptsache in einer umlaufenden eisernen Trommel, welche am Umfang mit 70000 Stahlnadeln besetzt ist und innen mit Dampf geheizt wird. Von da kommt die Watte in die Stapelzugmaschine (Demeloir), welche in der Hauptsache aus einer Krempel- und einer Kammwalze besteht, und durch 20fache Ausdehnung das erste Wattenband liefert. Nach mehrfachem Dupliren und Strecken wird das fertige Band auf eine Spule aufgewickelt und in einem verschlossenen Kasten gedämpft. So vorbereitet gelangen die Wattenbänder in die Kämmmaschine, welche aus einer Zange sammt dem mit Nadeln besetzten Speiseapparat, einer Kämmwalze zum eigentlichen Kämmen, einem Abreißapparat, einer Abzugs- und einer Reinigungsvorrichtung besteht. Eine solche Maschine liefert wöchentlich 250 bis 500 Pfd. Zug, wobei 125 bis 250 Pfd. Kämmlinge fallen. Eine Lister'sche Doppelmaschine giebt dreimal soviel Zug als die Heilmann'sche Kämmmaschine, oder soviel als 100 Handkämmer; sie erfordert zum Umtrieb mit Einschluß der Hülfsmaschinen, 2 bis $2\frac{1}{2}$ Pferdekräfte, und zur Bedienung 5 bis 6 Personen.

Die **Kammgarnspinnerei** beginnt mit mehreren Vorarbeiten, namentlich mit dem Auswaschen, Entölen, sowie mit dem Entkräuseln und Strecken der Wolle, wobei die **Wasch-** und **Plättmaschine** sowie die Strecken mit Nadelwalzen in Anwendung kommen. Uebrigens ist das **weiche Kammgarn** für Thibet, Merino u. s. w. von dem **harten Kammgarn** für Damast, Lasting u. s. w. sowie von dem für Strick- und Posamentirarbeiten zu unterscheiden; auch kommen drei verschiedene Spinnsysteme, das deutsche, französische und englische, in Anwendung, wobei die ersteren vorzüglich weiche, und das letztere zum Verschlingen weniger geneigte harte Wolle verarbeitet. Das deutsche Spinnsystem besteht aus **Strecken, Spindelbänken** und **Feinspinnmaschinen**, bei welchen letzteren die **Mule-** und **Watermaschinen** in Anwendung kommen. Bei dem französischen Systeme ist die Spindelbank durch **Spulstrecken** (bobinoirs) sammt **Würgelapparat** ersetzt. Das englische System hat mehrere eigenthümliche Einrichtungen an den Strecken und Spindelbänken, namentlich kommen hier statt der Nadelwalze Nadelkämme in Anwendung.

Die deutsche Weife für Kammwollgarne ist 1 Faden = 1,5 Yards = $^3/_2$mal die englische Weife, welche nur 1 Yard mißt. Ein **Strähn** ist 7 Gebind = 7 . 80 = 560 Faden = 840 Yards = 2520 englische Fuß Fadenlänge. Die Feinheitsnummer ist gleich der Anzahl Strähne, welche zusammen 1 englisches Pfund liefern. Der Draht des Wollengespinnstes ist $= \alpha \sqrt{N}$ zu setzen, und hierbei für Kettengarn, $\alpha = 2$ bis 2,2, für Schußgarn 1,6 bis 2, und für Strumpfgarn, $\alpha = 1{,}2$ anzunehmen.

Die Wolle zur **Streichwollspinnerei** wird, nachdem sie vielleicht noch eine Färbung durch Indigo erhalten hat, zunächst mittels des sogenannten **Reißwolfs** oder **Teufels** aufgelockert und gereinigt. Die mit Spitzen besetzte und in einem Gehäuse eingeschlossene Trommel dieser Maschine zerzaust die ihr durch Riffelwalzen zugeführte Wolle, während die Unreinigkeiten durch einen Siebboden fallen. Ein solcher Wolf von 3 Fuß Durchmesser macht 300 bis 400 Umdrehungen pr. Minute und verarbeitet stündlich 50 bis 100 Pfd. Wolle, wobei ein Kraftaufwand von $^1/_2$ bis $^5/_4$ Pferdekräfte erforderlich ist. Die durch den Wolf gegangene Wolle wird, um ihr die zum Krempeln nöthige Geschmeidigkeit zu geben, durch Baumöl, Rüböl, Oelsäure u. s. w. eingefettet und geht nach gehöriger Durcharbeitung nochmals durch den Wolf. Auf 100 Pfd. Wolle sind 10 bis 20 Pfd. Oel nöthig. Die eingefettete Wolle kommt in die **Kratzen** oder **Krempeln** (Carden), und zwar zunächst in den **Schrubbel-** oder **Pelzkrempel**, und dann in den **Lockenkrempel** oder die **Lockenmaschine**. Der Haupttheil beider Maschinen ist eine mit Kratzenblättern bezogene Trommel von 3 bis 4 Fuß Durchmesser, welche pr. Minute 85 bis 110 Umgänge macht, und statt des Kratzendeckels mit Kratzenwalzen

umgeben ist. Die Pelzcarde liefert ein Vließ, welches durch die Kammwalze von der Haupttrommel abgenommen und auf die Pelztrommel aufgewickelt wird; die Lockencarde hat einen feineren Kratzbeschlag, und liefert mittels der vielfach gefurchten Lockentrommel lockere fingerdicke Würste, sogenannte Locken. Eine Kratzmaschine verarbeitet stündlich 5 Pfd. Wolle, und nimmt $\frac{1}{2}$ Pferdekraft Leistung in Anspruch. Statt der Lockenmaschine wendet man in neuerer Zeit gewöhnlich den Vorspinnkrempel an, welcher eine größere Anzahl schmaler und durch die Würgelmaschine abzurundende Bänder liefert. Die Vorspinnmaschine, welche das Ausziehen der Locken mittels einer Presse bewirkt, ist ähnlich wie die Mulemaschine der Baumwollspinnerei construirt. Das vom Vorspinnkrempel oder von der Vorspinnmaschine gelieferte bindfadendicke Vorgespinnst wird auf der Feinspinnmaschine durch weiteres Ziehen und stärkeres Drehen in Garn verwandelt. Diese Maschine stimmt im Wesentlichen mit einer Mule-Jenny-Maschine bei der Baumwollenspinnerei überein; auch sie bewirkt die Streckung des Garns durch Bewegung eines Wagens. Eine Feinspinnmaschine hat 120 bis 300 Spindeln, wovon jede stündlich 450 bis 550 Fuß oder $\frac{3}{4}$ bis 1 Loth Garn liefert. Ein Spinner bedient mit der Hülfe von vier Kindern zwei Feinspinnmaschinen von je 240 Spindeln mit der Umtriebskraft $= \frac{1}{3}$ Pferdekraft.

Die preußische Weife ist 1 Faden $= 2\frac{1}{2}$ Ellen, 1 Stück $= 20$ Gebinde $= 880$ Faden $= 2200$ Ellen. Die österreichische Weife mißt $2\frac{1}{4}$ wiener Ellen, die englische Weife 1 Thread $= 1$ Yard u. s. w. Die Garnnummer drückt die Anzahl von Stück auf 1 Zollpfund Garn aus. Der Draht des Garnes ist für Kettengarn $= 4{,}3\sqrt{N}$ und für Schußgarn $= 2{,}6\sqrt{N}$ anzunehmen.

Bei der Tuchfabrikation gelten folgende Erfahrungszahlen. Ein Weber liefert täglich 3 bis 6 Ellen Tuch von 2 Ellen Breite. Eine Walzenwaschmaschine liefert in 2 bis 4 Stunden zwei Stücke Tuch von je 24 Ellen Länge und erfordert 1 Pferdekraft zum Umtrieb. Eine Hammerwalke mit Hämmern von 250 bis 350 Pfd. Gewicht nimmt $1\frac{1}{4}$ bis $2\frac{1}{2}$ Pferdekräfte Arbeit in Anspruch (vergl. S. 703) und walkt ein Stück Tuch in 6 bis 24 Stunden. Ein Arbeiter bedient gleichzeitig zwei Walken. Um 100 Pfd. Tuch zu walken, sind 15 bis 20 Pfd. Seife nöthig. Eine Walzenwalke walkt ein Stück Tuch in 5 bis 15 Stunden, verbraucht 4 bis 5 Pfund Seife und erfordert 1 bis $1\frac{1}{3}$ Pferdekraft zum Umtrieb. Eine Rauhmaschine, deren Trommel mit 12 bis 16 Doppelreihen von Carden besetzt ist, rauht in 12 Arbeitsstunden 2 Stück Tuch mit 60 Trachten und erfordert $\frac{1}{3}$ bis $\frac{2}{3}$ Pferdekraft. Die Scheermaschinen werden durch ein oder zwei Mann in Umtrieb gesetzt. Die Bürstenmaschine zieht das Tuch mit $2\frac{1}{2}$ bis 8 Zoll Geschwindigkeit durch und erfordert $\frac{1}{2}$ Pferdekraft.

§. 136. **Papierfabrikation.** Eine Arbeiterin kann täglich nahe 1 Centner Lumpen sortiren, wobei 2 Proc. Verlust stattfindet. Das Zerschneiden der Lumpen in ein- bis zweizöllige Stücke erfolgt entweder mittels eines Messers durch die Hand eines Arbeiters oder mittels einer Maschine, des sogenannten Lumpenschneiders, welcher in der Hauptsache entweder in einem schwingenden Messer oder in stetig umlaufenden, nach Befinden auf dem Umfang einer Trommel befestigten Messern besteht. Eine Maschine der letzteren Art zerschneidet täglich gegen 30 Centner Lumpen und erfordert 3 bis 4 Pferdekräfte zum Umtrieb. Das Sieben oder Stäuben der Lumpen erfolgt am besten durch eine besondere Lumpenreinigungsmaschine, welche im Wesentlichen in einer 5 bis 7 Fuß langen, $2\frac{1}{2}$ bis $3\frac{1}{2}$ Fuß weiten Siebtrommel besteht, deren Umfang von einem Drahtgeflecht mit $\frac{1}{4}$ Zoll weiten Maschen gebildet wird. Diese Trommel läuft entweder selbst um oder es geht durch dieselbe nur eine rotirende mit Eisenstiften besetzte Welle, deren Arme oder Flügel hervorstehen. Das Waschen der Lumpen erfolgt entweder mittels Wasser oder mittels einer alkalischen Lauge aus Kalk oder Soda. Sehr zweckmäßig ist das mehrstündige Kochen in einer solchen Lauge, wobei man entweder einen feststehenden oder einen rotirenden Kessel in Anwendung bringt.

Die auf die angegebene Weise vorbereiteten und nach Befinden auch noch gebleichten oder mazerirten Lumpen werden nun entweder durch ein Stampfwerk oder durch ein Halbzeugholländer in sogenanntes Halbzeug verwandelt. Ein Stampfwerk, deutsches oder Hammergeschirr, besteht aus vier in einem und demselben Loche arbeitenden hölzernen Stirnhämmern. Jeder Hammer wird aus einem mit Eisen beschlagenen Eichenholzstück von $3\frac{1}{2}$ Fuß Länge, $\frac{1}{2}$ Fuß Dicke und $\frac{1}{2}$ Fuß Breite gebildet und der Stiel desselben, die sogenannte Schwinge, ist nach der Axe hin 6, und nach dem Kopfe hin 2 Fuß lang. Der Hammerhub beträgt nur 5 bis 6 Zoll, dagegen die Anzahl der Hammerschläge pr. Minute, 70 bis 80. Ein mit einem Haarsieb bekleideter Schieber, der sogenannte Kas, welcher das schmutzige Wasser abführt, ist in der Hinterwand des Grubenstocks angebracht. Ein solches Geschirr verarbeitet in 12 Stunden 2 Centner Lumpen und nimmt die Leistung von $2\frac{1}{2}$ bis 3 Pferdekräften in Anspruch. Der wesentliche Theil eines Holländers ist eine Walze aus Eichenholz von 2 bis $2\frac{1}{2}$ Fuß Länge und Durchmesser, aus deren Umfang 36 bis 72 Messer oder Eisenschienen von $\frac{1}{4}$ bis $\frac{3}{4}$ Zoll Dicke und $3\frac{1}{2}$ bis 4 Zoll Breite 1 bis $1\frac{1}{2}$ Zoll hoch hervorragen. Diese Walze läuft in einem Kropfe oder Sattel, welcher sie auf $\frac{1}{4}$ des Umfanges umfaßt, an der unteren Stelle mit 7 bis 12 Messern oder Schienen besetzt ist, und von dem übrigen Raum des Troges, welcher mit Wasser und Lumpen angefüllt ist, durch eine Scheidewand getrennt wird. Bei Um-

drehung der über dem Trog wegliegenden Walzenwelle werden die Lumpen zwischen die Messer der Walze und des Troges geführt und von denselben zerrissen. Der Holländer Trog (Back), welcher 8 bis 10 Fuß lang, 4 bis 6 Fuß breit und $1\frac{1}{2}$ bis $2\frac{1}{2}$ Fuß tief ist, wird bei Beginn der Arbeit mit Wasser nebst 1 bis $1\frac{1}{2}$ Centner Lumpen angefüllt und es folgt zunächst hauptsächlich nur ein Waschen der Lumpen, wobei das unreine Wasser durch ein Drahtsieb abfließt. Später läßt man die Walze so tief herab, daß die Messer nahe bei einander vorbeigehen, und das Zerkleinen der durchgeführten Lumpen beginnt. Im Mittel verarbeitet ein Holländer 1 Centner Lumpen binnen 24 Stunden, wobei die Trommel 120 bis 200 Umdrehungen pr. Minute macht, und eine Arbeit von 4 bis 6 Pferdekräften aufzuwenden ist. Das gewonnene Halbzeug wird gewöhnlich noch durch Chlorgas, Chlorwasser, oder eine Chlorkalkauflösung gebleicht, ehe man es in Ganzzeug verwandelt. Der Ganz- oder Feinzeugholländer erhält in der Regel noch mehr Schneiden als der Halbzeugholländer, ist aber übrigens diesem ganz ähnlich construirt und liefert auch nahe dasselbe Arbeitsquantum wie dieser. Uebrigens läßt sich annehmen, daß ein arbeitender Holländer pr. Minute 2 bis $2\frac{1}{2}$ Cubikfuß Wasser verbraucht. Ein Halb- und ein Ganzzeugholländer versorgen 2 bis 3 Schöpfbütten mit dem nöthigen Zeug. Das letztere kommt, nachdem es vielleicht noch gebläut sowie durch vegetabilischen Leim geleimt und in einem besonderen Kasten mit Wasser eingerührt worden ist, in die sogenannte Schöpfbütte, wo es durch Kohlenfeuer oder Wasserdampf auf eine höhere Temperatur gebracht wird. Mit derselben ist gewöhnlich noch ein Knotenfänger verbunden.

Das Schöpfen des Papieres aus der Schöpfbütte erfolgt durch die sogenannte Form, ein mit Messingdrahtgitter bespannter Holzrahmen, sammt ihrem Deckel einen zweiten Rahmen bildend. Nach dem Ausschöpfen werden die Papierbogen auf die Filze oder besondere Wollenzeuge gelegt (gekautscht). Ein Schöpfer und ein Kautscher liefern zusammen täglich 5000 bis 6000 Bogen Papier. Nach dem Kautschen wird das Papier noch gepreßt, getrocknet, ferner wenn es zum Schreiben oder Zeichnen dienen soll, mittels eines besonders zubereiteten Leimes geleimt und als verkäufliche Waare zugerichtet.

Das sogenannte Maschinenpapier, Papier ohne Ende, bildet sich auf einem in stetiger Bewegung befindlichen Drahtsieb ohne Ende, welches auf einem hohlen Cylinder oder, wie gewöhnlich, zwischen zwei parallelen Walzen ausgespannt ist. Während die Maschinen nach dem ersten Princip nur zur Fabrikation von dickerem und schlechterem Papier dienen, werden die letzteren vorzüglich zur Erzeugung von feinem Schreib- und Zeichnenpapier verwendet. Hierbei ist der Proceß im Wesentlichen folgender. Das Papierzeug wird zunächst in der sogenannten Schöpf- oder Arbeitsbütte angesammelt und

durch rotirende Rührer mit dem Wasser vermengt, sowie durch ein schüttelndes Reinigungssieb geleitet. Aus demselben fließt das Zeug durch eine breite Schütze und zwischen Einsatzbrettern hindurch in einen Kasten, und von da über einem Lederstreifen auf die Form. Letztere wird nicht allein von den End-, sondern auch von mehreren Zwischenwalzen getragen und gespannt, und läuft über eine Reihe von kleinen Walzen, welche auf einem Tische sitzen, dessen Beine mit Gelenken versehen sind, und durch die Lenkstange einer Kurbel eine schaukelnde Seitenbewegung erhalten. Das sich auf der Form niederschlagende Papier wird an den Rädern durch ein Band ohne Ende aufgedrückt und, nachdem sich dieses Band zurückgezogen hat, durch einen besonderen Saugapparat entwässert, geht ferner durch die aus drei Paar Walzen bestehende Naßpresse, gelangt von da über den mit Wasserdampf angefüllten Trockenapparat, durchläuft die beiden Trockenpressen und wickelt sich schließlich als fertiges Fabrikat auf einen Haspel auf, welcher nach Befinden noch mit einem Papierschneideapparat verbunden ist. Die Bewegung der ganzen Maschine geht von der Welle der mittleren Naßpresse aus, welche ebenfalls durch Zahn- oder Riemenräder mit den übrigen Wellen verbunden ist. Ist der Umfang der Walze dieser Presse 30 Zoll, und macht dieselbe pr. Minute 12 Umdrehungen, so beträgt die Länge des pr. Minute angefertigten Papieres, = 30 Fuß, daher das pr. 10 Stunden wirklicher Betriebszeit, = 18000 Fuß, bei 4 Fuß Papierbreite, die Papierfläche = 72000 Quadratfuß. Eine solche Papiermaschine ist 40 bis 60 Fuß lang, 5 bis 6 Fuß breit und erfordert 4 bis 5 Pferdekräfte Betriebskraft; sie erzeugt täglich 20 bis 30 Centner Papier, verbraucht pr. Minute 4 Cubikfuß Wasser und erfordert 3 bis 4 Arbeiter zur Bedienung. 1 Centner Lumpen giebt je nach der Feinheit, 60 bis 90 Pfd. Papier. Ein Dampfkessel von 120 bis 150 Quadratfuß Heizfläche liefert die nöthige Dampfmenge für Lumpenkochapparate, für die Trockencylinder u. s. w., wonach 1 Pfd. Papier 1 Pfd. Steinkohle erfordert. Zum Satiniren des Papiers dient ein $1\frac{1}{2}$pferdiges Walzwerk mit drei gußeisernen Walzen von 24 bis 36 Zoll Länge und 7 bis 12 Zoll Durchmesser, dessen Umfangsgeschwindigkeit 1,5 bis 2 Zoll ist. Das specifische Gewicht des Papiers ist 0,70 bis 1,16. Gewöhnliches Velinschreibpapier ist 0,003 bis 0,004 Zoll, und gewöhnliches Velinbriefpapier 0,0018 bis 0,0022 Zoll dick. Auf 1 Pfd. Papier gehen 50 bis 90 Quadratfuß Schreib- oder 60 bis 150 Quadratfuß Briefpapier.

Viertes Capitel.

Feuerungs-, Lüftungs- und Beleuchtungsanlagen.

---

§. 137. Feuerungsanlagen. Mißt die Fläche der freien, der äußeren Luft ausgesetzten Wand eines Saales, $= F$ Quadratfuß, die Dicke derselben, $= e$ Fuß, sowie die Fläche der Fenster dieses Saales, $= F_1$, so läßt sich die Wärmemenge, welche stündlich nöthig ist, um den Temperaturunterschied θ zwischen der inneren und äußeren Luft zu erhalten:

$$W = \left(\frac{0{,}8\,F}{1{,}3 + e} + 0{,}5\,F_1\right)\theta \text{ Wärmeeinheiten setzen.}$$

Z. B. für $e = 2$ Fuß, $W = (0{,}243\,F + 0{,}5\,F_1)\theta$, und bei dem größten Temperaturunterschied $\theta = 30$ Grad: $W = 7{,}3\,F + 15\,F_1$ Wärmeeinheiten, wovon Eine bekanntlich 1 Pfd. Wasser um 1 Grad erwärmt wird.

Durch die nöthige Luft zum Athmen und zum Verbrennen wird dieses Wärmequantum noch modificirt.

1.) Bei der Kaminheizung wird fast nur $1/4$ der ganzen strahlenden Wärme des Brennmaterials nutzbar gemacht, und zwar nur 6 Proc. bei Holz- und höchstens 13 Proc. bei Coaks oder Steinkohlen. Der Wärmeverlust ist bei der Ofenheizung viel kleiner als bei der Kaminheizung, da hier ungefähr 80 Proc. der ganzen Wärme nutzbar gemacht werden. Die mittlere Temperatur im Brennherd 600^0 und die des fortziehenden Rauches 150^0 angenommen, folgt der Temperaturunterschied 450^0. Nun ist nach Péclet anzunehmen, daß 1 Quadratfuß Heizfläche stündlich bei 1^0 Temperaturdifferenz an Wärme durchläßt:

0,77 Wärmeeinheiten, wenn die Wand aus gebranntem Thon,
0,79 » » dieselbe aus Eisenblech,
1,98 » » sie aus Gußeisen besteht,

folglich ist dieses Wärmequantum, bei 450^0 Temperaturdifferenz im ersten Falle, 346 Cal., im zweiten 355 Cal., und im dritten 891 Cal. Diese Zahlen können dazu dienen, die zur Erzeugung einer gewissen Wärmemenge W nöthige Heizfläche S des Ofens zu berechnen. Gewöhnlich rechnet man auf 1 Quadratfuß Heizfläche 300 Cubikfuß Fassungsraum des Saales und stündlich 0,2 Pfd. Steinkohlen.

2.) Bei der warmen Luftheizung, wo ein erhitzter Luftstrom in den Saal geführt wird, ist die zur Erzeugung der Wärmemenge W nöthige Luftmenge aus der Differenz θ_1 zwi-

schen der Temperatur der zuströmenden Luft und der im Saale durch die Formel

$$Q\gamma = \frac{W}{0{,}267\,\theta_1} = 3{,}74\,\frac{W}{\theta_1}$$ bestimmt.

Der nöthige Brennstoffaufwand K bestimmt sich aus der Wärmemenge w, welche 1 Pfd. Brennstoff liefert, durch die Formel $K = \frac{W}{w}$. Man kann annehmen, daß auf dem Brennherd von der Gesammtwärme 50 bis 75 Proc. nutzbar gemacht werden. Auf den stündlichen Verbrauch von 1 Pfd. Steinkohle oder 2 Pfd. Holz ist eine Heizfläche von 10 Quadratfuß zu rechnen Um der Trockenheit der Luft entgegenzuwirken, ist im Saale stündlich pr. 1000 Cubikfuß Inhalt, 1 Pfd. Wasser verdunsten zu lassen.

3.) Der nöthige Dampf zur Dampfheizung wird in gewöhnlichen Dampfkesseln (s. S. 557 u. s. w.) erzeugt, und das in der zur Heizung dienenden Dampfröhre niedergeschlagene Wasser fließt in besonderen Abzugsröhren in einen Behälter, aus welchem es wieder in den Kessel geführt werden kann. Die Dampfspannung ist $1^1/_4$ bis $1^1/_3$ Atmosphären. Da beim Condensiren von 1 Pfd. Dampf 540 Wärmeeinheiten frei werden, so folgt die zur Erzeugung der Wärmemenge W nöthige Dampfmenge $= Q\gamma\,\frac{W}{540} = 0{,}00185\,W$ Pfd., ferner das erforderliche Steinkohlenquantum $= \frac{Q\gamma}{7} = 0{,}000264\,W$ Pfd., sowie die Heizfläche des Kessels, $S = 0{,}267\,Q\gamma = 0{,}000494\,W$ Quadratfuß. Man kann annehmen, daß auf 1 Quadratfuß Oberfläche einer eisernen oder kupfernen Röhre stündlich 0,35 Pfd. Dampf condensirt werden, und kann deshalb die zur Erzeugung der Dampfmenge $Q\gamma$ nöthige Abkühlungsfläche

$$O = \frac{Q\gamma}{0{,}35} = 2{,}86\,Q\gamma = 0{,}00529\,W \text{ Quadratfuß}$$

setzen. Auch ist anzunehmen, daß 1 Quadratfuß Rohrfläche hinreicht, um einen Raum von 200 bis 300 Cubikfuß zu heizen. Man setzt auch voraus, daß bei 10 Fuß Höhe ein Raum von 25 Fuß Länge und Breite, wo die Fenster $^1/_6$ der ganzen Oberfläche einnehmen, durch eine Röhre von 15 Zoll Umfang und der einfachen Länge (25 Fuß) hinreichend geheizt wird.

Die Warmwasserheizung erfolgt entweder mit Tief- oder mit Hochdruck. Im ersteren Falle wird das Wasser auf 80, im zweiten aber auf 150 bis 200 Grad erwärmt, dort giebt 1 Quadratfuß Abkühlungsfläche stündlich circa 100, hier dagegen 200 Wärmeeinheiten. Man nimmt an, daß bei der Warmwasserheizung mit Tiefdruck 1 Quadratfuß Abkühlungsfläche einen Zimmerraum von 125, und bei der mit Hochdruck dieselbe einen solchen von 250 Cubikfuß erwärmt, oder auf 15° Wärme erhält. Die Heizröhren bei der ersten Heizung sind

$3\frac{1}{2}$ Zoll, die bei der letzteren nur 1 Zoll dick, bei $\frac{1}{2}$ Zoll lichter Weite. Nimmt man den mittleren Wärmeausdehnungscoefficienten des Wassers, $\delta = 0{,}000466$ an, so läßt sich die der Wassersäulenhöhe h entsprechende Geschwindigkeit des Wassers in den Röhren,

$$v = \sqrt{\frac{2gh.\delta\theta}{1 + \zeta\frac{l}{d} + \zeta_1}} = 0{,}0216 \sqrt{\frac{2gh\theta}{1 + \zeta\frac{l}{d} + \zeta_1}}$$

$$= 0{,}171 \sqrt{\frac{h\theta}{1 + \zeta\frac{l}{d} + \zeta_1}}$$

Fuß setzen, wobei θ den Temperaturunterschied zwischen der steigenden und fallenden Wassersäule, l die Länge und d die Weite der ganzen Röhre, ζ den Reibungscoefficienten und ζ_1 die Summe der übrigen Widerstandscoefficienten derselben bezeichnet.

Die zur Erzeugung der Wärmemenge W nöthige Wassermenge ist $Q\gamma = \frac{W}{\theta}$ Pfund.

§. 138. Lüftungsanlagen. Der Mensch, dessen mittlere Temperatur 37 Grad ist, verbraucht in einem Raume von 15 Grad Wärme, stündlich 11 Cubikfuß Luft beim Athmen zur Erzeugung von Kohlensäure, und 189 Cubikfuß beim Transpiriren zur Erzeugung von Wasserdampf; es ist daher der ganze Luftbedarf desselben pr. Stunde, $Q = 200$ Cubikfuß, wofür man zur Sicherheit 250 Cubikfuß annehmen kann. Die hierbei entwickelte Wärmemenge ist 143,5 Cal.; da aber hiervon 49 Cal. auf die Dampfbildung verwendet werden, so ist die Wärmemenge, welche von einem Menschen auf die umgebende Luft übergeht, 94 Cal. Wenn nun ein Saal, welcher n Personen enthält, mit Luft gespeist wird, dessen Temperatur um θ Grad unter der Zimmerwärme ist, so folgt unter der Voraussetzung, daß 1 Cubikfuß Luft 0,0758 Pfd. wiegt, und daß die specifische Wärme der Luft 0,237 ist, die zur Erhaltung der constanten Temperatur nöthige Wärmemenge: $W_1 = 0{,}237 \,.\, 200 \,.\, 0{,}0758\, n\theta - 94n = (3{,}59\theta - 94)n$ Cal. Dieselbe ist zu der Abkühlungswärme W in §. 137 zu addiren, um die nöthige Wärme zum Heizen des Saales zu bestimmen. Die Luftmenge, welche durch die Beleuchtung eines Saales verdorben wird, ist dreimal so groß anzunehmen, als das zum Verbrennen nöthige Luftquantum. Man rechnet hiernach auf 1 Inselt- oder Wachslicht, wovon 6 auf das Pfund gehen, und stündlich 0,22 Pfd. verbrannt werden, 10,5 Cubikfuß Luft, wogegen eine Lampe, welche stündlich 0,084 Pfd. Oel verbrennt, und neunmal so stark leuchtet als das erstere, oder siebenmal so stark als das zweite, 41 Cubikfuß Luft verbraucht.

Der natürliche Luftwechsel wird durch die Temperaturdifferenz θ zweier Luftsäulen von gleicher Höhe h hervorgebracht. Wenn ein übrigens abgeschlossener Raum durch zwei Mün-

dungen mit der äußeren Luft communicirt, so wird sich die kältere Luft durch die untere, dagegen die wärmere durch die obere hindurch bewegen, und zwar entweder von innen nach außen, oder von außen nach innen, je nachdem die innere oder die äußere Luft die wärmere ist.

Ist hier h der Höhenabstand zwischen beiden Mündungen so hat man die Geschwindigkeit der ein- und ausströmenden Luft:

$$v = 0{,}0606 \sqrt{\frac{\theta \cdot 2gh}{3}} = 0{,}48 \sqrt{\frac{\theta h}{3}} = 0{,}277 \sqrt{\theta h} \text{ Fß.}$$

Hat eine Mündung den Querschnitt F, so ist das durchströmende Luftquantum pr. Sec.

$$Q = Fv = 0{,}277\, F \sqrt{\theta h},$$

sowie umgekehrt:

$$F = \frac{Q}{v} = \frac{3{,}61\, Q}{\sqrt{\theta h}} \text{ Quadratfuß.}$$

Wenn z. B. 300 Personen in einem Saale stündlich $300 \cdot 250 = 75000$, d. i. pr. Sec. 21 Cubikfuß Luftzufluß nöthig haben, während die innere Temperatur 15 und die äußere 5 Grad mißt, so ist bei dem senkrechten Abstande $h = 30$ Fuß zwischen der Zu- und Ausströmungsöffnung, der erforderliche Querschnitt derselben:

$$F = \frac{3{,}61 \cdot 21}{\sqrt{(15-5) \cdot 30}} = \frac{75{,}81}{\sqrt{300}} = 4{,}38 \text{ Quadratfuß,}$$

und der entsprechende Durchmesser: $d = 2{,}36$ Fuß $= 28\frac{1}{3}$ Zoll.

Strömt die Luft durch einen längeren Canal zu oder ab, so ist, wenn l die Länge, $\zeta = 0{,}024$, den Reibungscoefficienten und ζ_1 die Summe der übrigen Widerstandscoefficienten bezeichnen:

$$v = 0{,}0606 \sqrt{\frac{\theta \cdot 2gh}{3 + \zeta \frac{l}{d} + \zeta_1}}$$

$$= 0{,}48 \sqrt{\frac{\theta h}{3 + 0{,}024 \frac{l}{d} + \zeta_1}} \text{ zu setzen.}$$

Hat endlich der Canal eine verengte Ausmündung von mittlerem Durchmesser d_1, so ist, wenn α_1 den Contractionscoefficienten für dieselbe bezeichnet (s. S. 454), die Ausströmungsgeschwindigkeit durch die Formel:

$$v_1 = \left(\frac{d}{d_1}\right)^2 v = 0{,}48 \sqrt{\frac{\theta h}{1{,}5 + \left(1{,}5 + \zeta \frac{l}{d} + \zeta_1\right) \alpha^2 \left(\frac{d_1}{d}\right)^4}}$$

Fuß zu bestimmen, und, wenn $F_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}$ den Querschnitt der Ausmündung bezeichnet, das ausströmende Luftquantum $Q_1 = F_1 v_1$ zu setzen.

Der Luft- oder Wetterwechsel in unterirdischen Räumen ist besonders noch von der Erdwärme abhängig. Die constante Erdwärme tritt bei 24 Meter = $76\frac{1}{2}$ Fuß Tiefe ein und ist ungefähr 1 Grad höher als die mittlere Jahrestemperatur an der Erdoberfläche, welche im mittleren Deutschland an mäßig hoch liegenden Punkten 7 Grad angenommen werden kann. Von 24 Meter Tiefe an nimmt die Erdwärme auf je 80 bis 100 Fuß Tiefe um 1 Grad zu. Bei Herstellung des natürlichen Wetterwechsels kommt es immer darauf an, eine Leitung mit zwei Mündungen herzustellen, welche um eine gewisse Höhe h über einander stehen. Sind die Mündungen eines Grubenbaues in gleicher Höhe, so kann nur dann ein stetiger Wetterzug eintreten, wenn die äußere Luft die kältere ist. Die künstliche Ventilation erfolgt entweder durch Erhitzung der Luft in Oefen, oder durch Fortbewegung derselben mittels Maschinen, sogenannten Ventilatoren. Wenn bei der Verbrennung auf Herden 1 Pferdekraft stündlich 7 Pfd. Kohlenstoff oder pr. Sec. 56000 Cal. verbraucht, so läßt sich annehmen, daß 1 Cal. effectiv 31 Fußpfd. Arbeit liefert, und daß $Q\gamma$ Pfund Luft bei Erhöhung der Temperatur um θ Grad die mechanische Arbeit:

$$L = 31 \cdot \frac{Q\gamma\theta}{4} = 7{,}8\, Q\gamma\theta = 7{,}8 \cdot \frac{v^2}{2g\delta h} \cdot Q\gamma$$

$$= 2131\, \frac{v^2}{2gh}\, Q\gamma = 18{,}7 \frac{v^2}{h} Q\gamma = 33{,}4 \frac{v^2}{h}\, Q\gamma \text{ Fßpfd.}$$

in Anspruch nehmen.

Ein Ventilator, welcher pr. Sec. das unerhitzte Luftquantum $Q_1\gamma_1 = Q\gamma$ in die Geschwindigkeit v_1 versetzt, erfordert dagegen den Arbeitsaufwand $L_1 = 3\, Q_1\gamma_1 \cdot \frac{v_1^2}{2g}$, daher folgt das Verhältniß: $\frac{L}{L_1} = 2131\, \frac{v^2}{v_1^2 h}$, oder, wenn man gleiche Querschnitte voraussetzt, und deshalb

$$\frac{v}{v_1} = \frac{\gamma_1}{\gamma} = 1 + \delta\theta = 1 + 0{,}003670\theta \text{ setzt,}$$

$$\frac{L}{L_1} = 2131\, \frac{(1 + \delta\theta)^2}{h}.$$

In der Regel ist dieser Werth viel größer als Eins, daher die Erzeugung des Luftzuges durch Erhitzung viel unvollkommener als die durch Maschinen.

Die Ventilation eines Zimmers oder Saales wird gewöhnlich durch eine Lüftungsesse bewirkt, welche durch eine Oeffnung mit diesem Raume in Verbindung steht, und durch eine in ihr aufsteigende Rauchröhre oder, nach Befinden, durch ein in oder neben ihr brennendes Feuer erwärmt wird. Sehr gewöhnlich ist die Ventilation eines Saales mit der Heizung desselben verbunden.

Zur Erzeugung des Luftzuges in Gruben dienen oft Wetter-

schächte, welche mit einem Ofen oder Brennherde in Verbindung stehen.

Bei Erzeugung des Luftzuges durch Ventilatoren bedient man sich gewöhnlich sogenannter Sauger (Exhaustoren).

§. 139. **Gasbeleuchtung.** Das Licht pflanzt sich in gerader Linie mit 42000 Meilen Geschwindigkeit fort, wobei die Intensität desselben auf einem Flächenelemente umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung und direct wie der Sinus des Neigungswinkels desselben gegen die Richtung des Strahles wächst. Man kann die Lichtstärke der Flamme einer 0,2 Pfd. schweren Stearinkerze, von welcher stündlich 0,02 Pfd. verbrennt so daß also die ganze Verbrennungszeit 10 Stunden beträgt, zur Einheit annehmen, und hiernach die Intensitäten anderer Lichtquellen messen. Eine Wachskerze von demselben Gewicht ist hiernach = 0,95, eine Spermacetikerze = 1,01, ein Talglicht = 0,8 Stearinkerzenstärken. Ferner ist eine gewöhnliche Oellampe mit plattem Docht, bei 0,022 Pfd. stündlichem Oelverbrauch, 0,85, eine Argandsche Lampe, bei 0,06 Pfd. Oelaufwand $3\frac{1}{2}$, eine Carcellampe bei 0,084 Pfd. Oel 7 Stearinkerzen. Die Leuchtkraft oder Lichtmenge pr. Pfund Brennstoff fällt hiernach zwischen $37\frac{1}{2}$ bis $83\frac{1}{3}$ aus. Endlich giebt eine Flamme von Steinkohlengas, sowie eine solche von Oelgas, 9 Stearinkerzen, erstere bei 4,5, letztere bei 1,5 Cubikfuß stündlichem Gasverbrauch. Das Sonnenlicht ist = 60000, dagegen das Mondlicht nur $\frac{1}{5}$ Stearinkerze.

Bei der Bestimmung der Lichtstärke verrückt man zwischen der Normalkerze und der Flamme, deren Lichtstärke J gemessen werden soll, eine Fläche längs einer eingetheilten Bank so lange, bis der Lichteffect von beiden Flammen auf derselben ein und derselbe ist. Ist a die Entfernung beider Flammen von einander, z. B. 10 Fuß, und x die Entfernung der Fläche von der ersten Flamme, so hat man: $J = \left(\frac{a-x}{x}\right)^2$ Normalflammen oder Lichteinheiten, z. B. für $a = 10$ und

$x = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9 Fuß
$J = 81$	16	5,44	2,25	1,00	0,44	0,184	0,0625	0,0125

Bei dem Photometer von Bunsen besteht die beleuchtete Fläche in einem Papierschirm mit einem durch Spermaceti durchsichtig gemachten Kreis, bei dem Photometer von Wheatstone ist sie dagegen eine schnell umlaufende Glasperle.

Bei der Beleuchtung durch Oele kommen nur die fetten, und zwar vorzüglich Lein-, Rübsen-, Mohn- und Olivenöl zur

Anwendung; zur Gasbeleuchtung dient vorzüglich das Steinkohlengas, wiewohl sich auch Oel-, Harz-, Holz-, Suintergas u. s. w. dazu anwenden lassen. Der Hauptbestandtheil des Leuchtgases ist der Kohlenwasserstoff, und zwar insbesondere das ölbildende Gas, welches $^1/_7$ Wasserstoff und $^6/_7$ Kohlenstoff enthält und das specifische Gewicht 0,985 hat, sowie andere schwere Kohlenwasserstoffe. Das Kohlenoxydgas, sowie das leichte Kohlenwasserstoffgas oder sogenannte Sumpfgas, welches $^1/_4$ Wasser-, $^3/_4$ Kohlenstoff enthält, verbrennt mit schwach leuchtender und das Wasserstoffgas fast ohne Flamme. Kohlensäure, Schwefelwasserstoff und Ammoniak sind die schädlichen Bestandtheile des Steinkohlengases. Die Leuchtkraft des Steinkohlengases wächst mit dem Kohlenstoffgehalt und hiernach wieder mit dem specifischen Gewichte desselben. Das aus Cannelkohle erzeugte Bogheadgas, sowie das aus dem Fette der Wolle erzeugte Suintergas hat die größte Leuchtkraft, welche die des gewöhnlichen Steinkohlengases um das Zwei- bis Dreifache übertrifft. Im Mittel ist das specifische Gewicht des Steinkohlengases 0,53, dagegen das des Oelgases 0,96.

Bei der Vercoakung giebt 1 Centner Steinkohle 60 bis 65 Pfund oder ein Cubikfuß 1,15 bis 1,45 Cubikfuß Coaks, und 400 bis 700 Cubikfuß Leuchtgas. Außerdem gewinnt man hierbei noch $4^1/_4$ Pfd. = 0,055 Cubikfuß Theer und 10 Pfd. Ammoniakwasser.

Die Destillation der Steinkohlen erfolgt meist in gußeisernen Retorten, welche bei einer Länge von 7 bis 8 Fuß, $1^1/_2$ bis 2 Fuß weit und 10 bis 15 Zoll hoch sind und eine Wandstärke von 0,8 bis 1,0 Zoll haben. Retorten aus feuerfestem Thon sind zwar weit dauerhafter als die gußeisernen, erhalten aber leicht Risse. Die Wandstärke ist 2 bis $2^1/_2$ Zoll. Der Fassungsraum einer Retorte beträgt 2 bis $2^1/_2$ Scheffel. Die Anzahl der Retorten in einem Ofen ist 2 bis 9. Das Retortengewölbe ist aus Chamotteziegeln gebildet und umgiebt die Retorten in einem Abstande von 3 bis 6 Zoll. Der Brennherd nimmt $^1/_3$ bis $^1/_2$ der Retortenlänge ein und ist, je nach der Anzahl der Retorten, 12 bis 22 Zoll hoch und breit. Man kann, nach Redtenbacher, auf 1 Quadratfuß innerer Retortenfläche $4^1/_2$ Pfd. Kohlenladung und täglich 10 Cubikfuß Gas rechnen. Aus der Anzahl n der Brenner und dem stündlichen Gasbedarf eines Brenners von 3 bis 4 Cubikfuß kann man hiernach den einer gegebenen Beleuchtungszeit t entsprechenden Inhalt F aller Retortenflächen durch den Ausdruck $F = 0{,}3\,nt$ bis $0{,}4\,nt$ berechnen. Zur Unterhaltung des Feuers auf dem Herde ist bei Oefen mit weniger als 5 Retorten, 35 bis 50 und bei solchen mit mehr als 5 Retorten, 25 bis 30 Pfd. Coaks pr. Centner Coaksproduction nöthig. Die Destillationszeit beträgt 4 bis 6 Stunden, und die Temperatur des Destillirens ist die dunklere Rothglühhitze. Das aus dem Ofen hervorragende 10 bis 16 Zoll lange Mundstück einer Retorte enthält

einen Ansatz für das Ableitungsrohr und wird mittels einer Schraube oder eines Hebels durch einen gerippten Deckel abgeschlossen. Das Ableitungsrohr, welches durch einen Muff mit dem gedachten Ansatz des Ableitungsrohres verbunden ist, hat 3 bis 5 Zoll Weite, steigt 5 bis 10 Fuß hoch empor und mündet mit seinem umgebogenen Ende 1 bis $1\frac{1}{2}$ Zoll tief unter das in der Vorlage befindliche Wasser. Letztere ist 1 bis 2 Fuß hoch und weit und erstreckt sich gewöhnlich auf eine ganze Ofenreihe. Um das sich in der Vorlage sammelnde Gas abzukühlen und die Dämpfe in derselben niederzuschlagen, wird noch eine besondere Luft- oder Wassercondensation vorgenommen. Bei der einfachen Luftcondensation in 12 Fuß hohen Röhren rechnet man 8 Quadratfuß Kühlfläche auf 1 Cubikfuß pr. Minute durchzuleitende Gasmenge. Durch einen Wasserstrahl, welcher den Condensator bespielt, wird die Condensation besonders befördert. Auch läßt man wohl das Gas durch den Scrubber, einen mit Coaksstücken angefüllten Behälter, streichen, und unterwirft dasselbe noch einer Waschung, wobei man es durch mehrere hintereinander stehende Wasserbehälter strömen läßt.

Um den Druck in den Retorten zu vermindern, wobei der Graphitansatz in denselben und die Zersetzung der Kohlenwasserstoffgase verhindert wird, schaltet man noch sogenannte Exhaustoren ein, welche den Druck in den Retorten bis auf 1 Zoll Wassersäule herabziehen und dagegen das Gas mit circa 4 bis 7 Zoll Wasserdruck fortschaffen können. Zur Erhaltung eines bestimmten Druckes dient noch ein mit dem Exhaustor verbundener Kolbenregulator.

Nachdem das Gas durch die angegebenen Apparate vom in die Theergruben abfließenden Theer und Ammoniakwasser gereinigt und auf 10 bis 12° C. abgekühlt worden ist, wird es noch einer chemischen Reinigung unterworfen, wobei es besonders darauf ankommt, die Kohlensäure, den Schwefelwasserstoff und das Ammoniak aus dem Gase zu entfernen. Das vorzüglichste Reinigungsmittel ist der kaustische Kalk. Derselbe wird entweder als Kalkmilch flüssig oder in trockenem Zustande angewendet. Die Kalkmilch bereitet man aus 1 Thl. gebranntem Kalk und 20 bis 24 Thln. Wasser, wobei darauf zu rechnen ist, daß mit 1 Cubikfuß kaustischem Kalk, = $\frac{1}{2}$ bis $\frac{2}{3}$ rohem Kalk, 10000 Cubikfuß Gas gereinigt werden können. Durch Rührwerke wird die Wirkung der nassen Reinigung wesentlich begünstigt. Bei der trockenen Reinigung kommt der kaustische Kalk, nachdem er durch Bespritzen mit Wasser eine backende Pulverform angenommen hat, auf Rosten oder sogenannte Horden $2\frac{1}{2}$ Zoll hoch ausgebreitet, und das Gas strömt von unten nach oben durch diese Kalkhydratschicht. Die Anzahl der Horden ist 4 bis 6, und die Hordenstäbe sind $\frac{1}{2}$ Zoll breit und stehen $\frac{3}{8}$ bis $\frac{1}{2}$ Zoll von einander ab. Der ganze Reinigungsapparat ist aus Gußeisen zusammengesetzt oder von Mauerwerk ausgeführt, und hat einen Deckel aus Eisenblech,

welcher mit seinem umgebogenen Rande in eine Wasserrinne eintaucht, und dadurch luftdicht abschließt. Zum Abheben des Deckels dient ein Flaschenzug. Man kann annehmen, daß 1 Cubikfuß Kalk, 2 Cubikfuß Kalkhydrat giebt und 5000 bis 10000 Cubikfuß Gas reinigt; wobei auf 1 Quadratfuß Querschnittsfläche des Reinigungsapparates stündlich 100 bis 200 Cubikfuß Gas kommen. Man verwendet auch schwefel- und salzsauren Kalk, Eisenoxyd und in neuerer Zeit vorzüglich das Laming'sche Pulver zur Reinigung des Steinkohlengases. Dasselbe ist eine Verbindung von einem Kalksalz mit Eisenoxyd, und wird dadurch bereitet, daß man 1 Thl. bis zur Pulverform gelöschten Kalk mit 1 Thl. Sägespähne vermengt, und nach und nach mit 1 Thl. in Wasser aufgelöstem Eisenvitriol behandelt. Nach gehörigem Durcharbeiten läßt man die Masse an der Luft stehen, und wenn sie den andern Tag eine braune Farbe angenommen hat, ist sie zur Verwendung geeignet. Diese Masse hat den Vorzug, daß sie nach dem Gebrauche beim Liegen in freier Luft, durch Aufnahme von Sauerstoff wieder ihre anfängliche Zusammensetzung annimmt, und nur durch Ammoniaksalze verunreinigt wird. Diese Salze werden aber durch Wasser ausgelaugt, wie überhaupt durch Auswaschen aus dem Gase entfernt.

Das gehörig gereinigte Gas wird in dem Gasbehälter aufgefangen und von da in die Gasleitung geführt. Der Gasbehälter ist ein im Innern einer aufgemauerten Cisterne aufgehangener Blechcylinder mit einer wenig gewölbten Haube. Dieser Behälter ruht anfangs mit seiner Haube auf dem Wasser in der Cisterne auf, wird aber durch das mittels eines Rohres in sein Inneres geführte Gas nach und nach emporgehoben, wobei noch an Ketten aufgehangene Gegengewichte zu Hülfe kommen. Ein anderes Rohr führt dagegen das Gas in die Hauptleitungsröhre. Zur Senkrechtführung der Glocke dienen Leitsäulen und an der Glocke befestigte Leitrollen. Der gewöhnliche Durchmesser eines Gasometers ist 24 bis 72 Fuß, jedoch construirt man neuerlich auch Gasometer von 100 und mehr Fuß Weite. Die Höhe ist bei kleineren Gasometern $1/2$, bei größeren aber $1/3$ oder nur $1/4$ des Durchmessers, und zwar 12 bis 24 Fuß. Von dem Bleche, welches zu dem Gasometer verwendet wird, wiegt 1 Quadratfuß $2 1/2$ bis $3 1/2$ Pfd. Die Nieten, wodurch die Bleche luftdicht verbunden sind, haben $1/4$ Zoll Dicke und stehen von Mitte zu Mitte, 1 Zoll von einander ab. Das Bassin ist mittels Portlandcement aus Backsteinmauerwerk 2 bis 3 Fuß dick herzustellen, und mit einer Thonrammelung zu umgeben. Das Ein- und das Auslaßrohr erhalten Ventile mit Wasserverschluß. Ein Gasometer muß mindestens die Hälfte von dem Gasquantum fassen, welches in der längsten Winternacht verbraucht wird. Hiernach hat man

$$d^2 l = \frac{2}{\pi} V = 0{,}637\, V \text{ zu setzen,}$$

wenn d den Durchmesser, l die Höhe und V die in der läng-

sten Winternacht verbrauchte Gasmenge bezeichnet. Nun ist

$$d = \mu l = \frac{1}{4} l \text{ bis } \frac{1}{2} l,$$

daher hat man:

$$d = \sqrt[3]{0{,}637\,\mu V}, \text{ z. B. für } \mu = \frac{1}{2},$$

$$d = \sqrt[3]{0{,}3185\,V} = 0{,}683 \sqrt[3]{V}.$$

Bezeichnet G das Gewicht der Glocke (nach Abzug des Gegengewichtes), d den Durchmesser derselben in Fußen, h den Manometerstand des eingeschlossenen Gases oder die Höhe von $1\frac{1}{2}$ bis $2\frac{1}{2}$ Zoll, um welche der äußere Wasserspiegel über dem inneren steht, ferner δ die Blechstärke des Glockenmantels in Zollen und x die veränderliche Tiefe der Eintauchung der Glocke ins Wasser in Fußen, so hat man:

$$G = \frac{\pi}{4} d^2 h \gamma + \pi d \delta x \gamma = 4{,}04\, d^2 h + 16{,}17\, d \delta x,$$

und daher, wenn δ in Zollen gegeben ist,

$$h = 0{,}2475 \frac{G}{d^2} - \frac{4 \delta x}{d} \text{ Zoll.}$$

Z. B. für $G = 25000$ Pfd.,
$d = 50$ Fuß, $\delta = \frac{3}{8}$ Zoll, und $x = 12$ Fuß folgt:
$h = 0{,}2475 \,.\, 10 - \frac{3}{2} \,.\, \frac{12}{50} = 2{,}475 - 0{,}36$
$= 2{,}115$ Zoll.

Natürlich nimmt diese Druckhöhe ab, je höher die Glocke steigt. Zum Reguliren des Gasabflusses dient noch ein besonderer Regulator mit einem langen Kegelventile und einem Schwimmkasten. Es ist zweckmäßig, noch einen Registrirdruckmesser in Anwendung zu bringen. Uebrigens soll jede Gasanstalt mindestens zwei Gasbehälter haben. Die Hauptgasleitung besteht aus gußeisernen Röhren und ist mindestens $2\frac{1}{2}$ Fuß tief unter die Erde zu legen. Je nach der Weite dieser Röhren von 2 bis 20 Zoll, ist ihre Wanddicke $\frac{3}{8}$ bis $\frac{3}{4}$ Zoll zu machen. Die Verbindung derselben erfolgt durch Muffe und die Abdichtung der letzteren entweder durch Vergießen mit Blei oder durch Gummiringe u. s. w. Man giebt der ganzen Leitung 0,005 Neigung und bringt zum Auffangen von Niederschlägen noch sogenannte Wassertöpfe (Syphons) an, deren Weite mindestens das Doppelte, und deren Tiefe das Vierfache der Röhrenweite betragen soll. Die Röhren, namentlich die Zweigröhren, sind, wenn ihre Weite 2 Zoll nicht überschreitet, aus Schmiedeeisen, oder nach Befinden, aus Blei herzustellen.

Der Druck des Gases, welcher an dem Gasometer $1\frac{1}{2}$ bis 3 Zoll mißt, soll in der Leitung nach den Brennern zu allmälig abnehmen, aber vor dem Ausströmen noch immer $\frac{2}{3}$ Zoll betragen. Bei Bestimmung der Röhrenweite d ist von der bekannten Formel

$$z = \zeta \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \varepsilon$$

Gebrauch zu machen, worin l die Länge, d die Weite der Röhre,

ferner z die den Druckverlust in derselben messende Höhe einer Wassersäule, v Geschwindigkeit des Gases in der Röhre, ε das Verhältniß $1/_{1500}$ der Dichtigkeit des Gases zu der des Wassers und ζ den Reibungscoefficienten 0,03 des Gases bezeichnen. Man hat hiernach:

$$z = 0{,}00000384 \frac{l}{d} v^2 \text{ Zoll},$$

also umgekehrt:

$$\frac{d}{l} = 0{,}00000384 \frac{v^2}{z}.$$

Für die mittlere Gasgeschwindigkeit $v = 12$ Fuß ist daher

$$d = 0{,}00055 \frac{l}{z},$$

z. B. für $l = 1000$ Fuß $= 12000$ Zoll und bei dem Druckhöhenverlust $z = 0{,}5$ Zoll, beträgt die erforderliche Röhrenweite

$$d = 0{,}55 \cdot \frac{12}{0{,}5} = 0{,}55 \,.\, 24 = 13{,}2 \text{ Zoll}.$$

Die durchströmende Gasmenge pr. Sec. ist natürlich:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} v,$$

also im vorliegenden Falle $Q = \frac{95}{144} \cdot 12 = 8$ Cubikfuß. Ist wie gewöhnlich Q gegeben, so hat man:

$$v = \frac{4 Q}{\pi d^2},$$

und kann daher

$$z = 0{,}000006225 \frac{l Q^2}{d^5}, \text{ sowie}$$

$$d = 0{,}091 \sqrt[5]{\frac{l Q^2}{z}} \text{ Fuß} = 1{,}09 \sqrt[5]{\frac{l Q^2}{z}} \text{ Zoll}$$

setzen, wenn l in Fußen, Q in Cubikfußen und z in Zollen gegeben sind.

Einen ansehnlichen Einfluß auf die Bewegung des Gases in den Leitungsröhren hat noch die Höhendifferenz h zwischen den Endpunkten derselben. Wenn auch beim Steigen der Röhre der absolute Druck des Gases in Folge seiner Schwere abnimmt, so nimmt doch der relative Druck oder die Pressungsdifferenz zu, da auch der absolute Druck der Luft mit dem Höhersteigen kleiner wird. Es ist unter übrigens gleichen Verhältnissen die der senkrechten Steigung h Fuß einer Gasröhre entsprechende Vergrößerung des Piezometerstandes

$$z = 0{,}0075 h \text{ Zoll Wassersäule},$$

also z. B. bei 100 Steigen oder Fallen, die Vergrößerung oder Verminderung des relativen Druckes:

$$z = 0{,}75 = {}^3/_4 \text{ Zoll Wassersäule}.$$

Folglich ist es zweckmäßig, eine Gasanstalt, und insbesondere die Retorten derselben, tief zu legen. Das Gas soll un-

mittelbar vor dem Brenner noch $h_0 = 0,45$ bis 0,5 Zoll Wasserdruck haben, und es ist hiernach die entsprechende Ausflußgeschwindigkeit derselben:

$$v = \mu \sqrt{2g\,\frac{h_0}{\varepsilon}} = 0,7 \sqrt{2g \cdot \frac{1500\,h_0}{12}}$$

$$= 0,7 \sqrt{7812\,h_0} = 0,7 \,.\, 88,4 \sqrt{h_0}$$

$$= 62 \sqrt{h_0} = 62 \sqrt{1/_2} = 43,8 \text{ Fuß.}$$

Aus dem Mündungsquerschnitt F folgt nun die stündlich ausströmende Gasmenge:

$$Q = 3600\,Fv = 25\,Fv \text{ Cubikfuß,}$$

letzteres wenn F in Quadratzollen gegeben ist. Umgekehrt hat man:

$$F = \frac{Q}{25\,v} = 0,04\,\frac{Q}{v} = 0,000913\,Q,$$

z. B. für $Q = 4$ Cubikfuß, $F = 0,00365$ Quadratzoll.

Hiernach ist für einen **einfachen Lochbrenner** die erforderliche Mündungsweite:

$$d = 0,068 \text{ Zoll} = 0,82 \text{ Linien,}$$

ferner für einen **Doppellochbrenner**:

$$d = 0,0523 \text{ Zoll} = 0,63 \text{ Linien,}$$

ferner für einen **Argand-Brenner** mit 16 Löchern, die Weite eines Loches:

$$d = 0,0136 \text{ Zoll} = 0,163 \text{ Linien,}$$

endlich für einen **Fledermausbrenner** die Weite des Loches, wenn dessen Länge $l = {}^3/_4$ Zoll mißt,

$$b = \frac{F}{l} = \frac{0,00365}{0,75} = 0,00487 \text{ Zoll} = 0,0584 \text{ Linie.}$$

Mittels der letzten Formeln lassen sich auch die erforderlichen Mündungsweiten bestimmen, wenn das Gasconsum ein größeres ist. Z. B. für $Q = 8$ Cubikfuß, folgt $F = 0,0073$ Quadratzoll, und daher beim letzten Brenner, wenn man $l = 1$ Zoll annimmt,

$$b = 0,0073 \text{ Zoll} = 0,0876 \text{ Linie.}$$

Bei gleichem Gasverbrauch geben die Einlochbrenner am wenigsten und die **Fledermausbrenner**, zumal die **doppelten**, am meisten Licht. Im Allgemeinen läßt sich annehmen, daß 1000 Cubikfuß Gas an Lichtentwickelung gleichkommen 42 Pfd. Stearinkerzen = 40 Pfd. Wachskerzen = 46 Pfd. Talglichter = 37 Pfd. Wallrathkerzen = 29 Pfd. Rüböl.

Bei der Straßenbeleuchtung bringt man die Gaslaternen 80 bis 160 Fuß von einander entfernt an, und zwar 10 bis 12 Fuß über dem Pflaster und mindestens 3 Fuß entfernt von den Wänden.

Im mittleren Deutschland ist die mittlere halbe Nachtlänge mit Einschluß der Dämmerung im

Januar	Februar	März	April	Mai	Juni
8,29	7,26	6,24	5,14	4,23	3,86

Juli	August	September	October	November	December
4,13	4,81	5,61	6,44	7,27	8,31 Stdn.

Hiernach kann man die Brennstunden für einen Monat bestimmen, wenn man noch die Zeit kennt, zu welcher das Licht Abends ausgelöscht und Früh angezündet wird.

Die Crosley'sche nasse Gasuhr ist das vorzüglichste Instrument zum Messen des Gasconsums. Dieselbe nimmt zu ihrer Bewegung 0,15 Zoll Wassersäule in Anspruch, hat

für 2	5	10	20	40	80	150 Flammen
d. Durchmess. 9	12,3	14,75	17,14	21,5	24,8	31,9 Zoll

und liefert pr. Umdrehung:

0,0333	0,25	0,50	1,00	2,00	4,00	7,69 Cbfß. Gas.

Man soll die Gasuhr zwar an einem frischen, aber gegen Frost geschützten Ort und etwas unterhalb der Brennermündung aufstellen, und wenigstens allmonatlich ihren Wasserinhalt justiren.

Man verwendet das Steinkohlengas auch mit Vortheil zum Kochen, wobei man sich der Schwarze'schen Specksteinbrenner bedient.

Dritter Abschnitt.

Formeln, Regeln, Erfahrungssätze und Tabellen der Baukunst.

Erstes Capitel.

Baumaterialien, deren Gewinnung und Bearbeitung.

Anmerkung. Wegen Holz als Baumaterial s. Seite 705 u. s. w.

§. 140. Die chemischen Bestandtheile der Steine.

1.) Die Kieselsäure ($Si\,O_3$) besteht aus 1 Aeq. Silicium = 21,3, und 3 Aeq. Sauerstoff = 24, hat also die Aequivalentzahl = 45,3, und enthält in 100 Thln. 52,174 Sauerstoff. Dieselbe kommt rein als Kiesel oder Quarz, Hornstein, Opal u. s. w. in der Natur vor. Sie ist nur in Flußsäure auflöslich und tritt als Säure mit anderen Erden und Alkalien in Verbindung.

2.) Die Thonerde ($Al_2\,O_3$) besteht aus 2 Aeq. Aluminium = 2 . 13,7, und 3 Aeq. Sauerstoff = 3 . 8, hat die Aequivalentzahl 51,4 und in 100 Thln. 46,69 Sauerstoff.

Die Thonerde kommt rein nur im Korund (Smirgel, Rubin, Saphir) vor, gewöhnlich aber in Verbindung mit anderen Stoffen, und zwar sowohl als Basis wie als Säure.

3.) Die Kalkerde ($Ca\,O$) besteht aus 1 Aeq. Calcium = 20,5 und 1 Aeq. Sauerstoff = 8 0, hat folglich die Aequi-

valentzahl 28,5. Kommt in Verbindung mit Kohlensäure und mit anderen Erden häufig vor.

4.) Die Talkerde (MgO) ist 1 Aeq. Magnesia 12 + 1 Aeq. Sauerstoff 8 = 20. Dieselbe kommt vorzüglich in Verbindung mit Kohlensäure und anderen Erden vor.

5.) Die Baryterde (BaO) = 68,6 + 8 = 76,6; sie kommt vorzüglich in Verbindung mit Schwefelsäure (Schwerspath) vor.

6.) Das Eisenoxyd (Fe_2O_3) = 2 . 28 + 3 . 8 = 80; kommt rein als Rotheisenstein und Eisenglanz vor, aber auch häufig in Verbindung mit Kohlensäure (Spatheisenstein). Das Eisenoxydhydrat färbt gelb, während das Eisenoxyd eine rothe Farbe giebt.

7.) Kali (KO) = 39,15 + 8 = 47,15 und

8.) Natron (NaO) = 23,3 + 8 = 31,3; kommen in Verbindung mit Säuren, in Erden, vor. Beide begünstigen die Zersetzung der Steine, wenn diese dem Wetter ausgesetzt sind. Soda ist kohlensaures Natron.

Unter den Säuren kommt nebst

9.) Kohlensäure (CO_2) = 6 + 2 . 8 = 22 vorzüglich noch

10.) Schwefelsäure (SO_3) = 16 + 3 . 8 = 40 in Verbindung mit Erden vor.

§. 141. Die prädominirenden einfachen Mineralien in den Gesteinen.

1.) Der Quarz oder reine Kieselerde, ε = 2,5 bis 2,8, hexagonal krystallisirt und ist sehr hart, Härte = 7. Er ist entweder krystallisirt, z. B. Bergkrystall oder dicht, z. B. Hornstein, Jaspis.

2.) Der Feldspath ist aus Erden und Alkalien zusammengesetzt und kommt in folgenden drei Species vor:

a) Der gemeine oder Kalifeldspath, Orthoklas (ε = 2,4 bis 2,6, Härte = 6), besteht aus 4 Aeq. Kieselerde, 1 Aeq. Thonerde und 1 Aeq. Kali und ist klinorhombisch krystallisirt.

b) Der Natronfeldspath, Albit, enthält statt des Kalis, Natron und ist ebenfalls klinorhombisch krystallisirt.

c) Der Kalkfeldspath, Anorthit, enthält Kalk, und ist ähnlich wie Albit krystallisirt.

Außerdem giebt es noch Feldspathe, welche Kalkerde und Natron zugleich enthalten, z. B. Oligoklas und Labrador.

Der Feldspath bildet einen Hauptbestandtheil von vielen Gebirgsarten, z. B. von Granit, Gneiß, Granulit, Diorit, Syenit. Im Porphyr und Trachyt ist die Hauptmasse Feldspath (Felsit).

3.) Die Hornblende ist aus Kiesel-, Kalk-, Talkerde und Eisenoxydul zusammengesetzt. Die meisten Varietäten derselben sind dunkelgrün, ε = 2,9 bis 3,4. Krystallisirt klinorhombisch, findet sich aber auch häufig derb und eingesprengt vor. Er-

scheint als Gebirgsart unter dem Namen Hornblendefels, Hornblendeschiefer vor, bildet häufiger noch einen Hauptgemengtheil anderer Felsarten, z. B. des Syenits, Diorits u. s. w.

4.) Der Augit ist der Hornblende ähnlich, hat aber eine andere klinorhombische Krystallisation. Derselbe kommt vorzüglich im Dolerit und Basalt vor, bildet aber auch als Augitfels eine besondere Felsart.

5.) Der Glimmer ist ausgezeichnet durch seine geringe Härte und durch seine vollkommene Spaltbarkeit. Krystallform: hexagonal, rhombisch und klinorhombisch, specif. Gewicht: $\varepsilon = 2{,}8$ bis 3. Er ist aus Kiesel-, Thon-, Talkerde, Kali und Eisenoxyd, zusammengesetzt, und bildet einen Gemengtheil von vielen Gebirgsarten, z. B. Granit, Gneiß und Thonschiefer.

6.) Der Chlorit ist grün, blätterig wie der Glimmer, jedoch noch weicher wie dieser. Krystallisirt klinorhombisch und hat das specifische Gewicht 2,7 bis 2,8. Seine Bestandtheile sind Kiesel-, Thon-, Talkerde, Eisenoxydul und Wasser. Er bildet als Felsart den Chloritschiefer.

7.) Der Kalkstein kommt sehr häufig als Gebirgsart vor.

Hierher gehört auch der Marmor, die Kreide, der Stinkstein, Roggenstein, Kalksinter, der meiste Mergel und der Lithographiestein. Der hydraulische Kalk enthält 20 bis 30 Proc. Thon. Durch das Brennen dieses Kalkes werden Thon- und Kalkerde chemisch verbunden, und unter Wasser wird diese Verbindung bei Aufnahme von Wasser zu einer harten Masse.

8.) Der Dolomit oder Bitterkalk besteht aus 54,33 kohlensaurer Kalk- und 45,65 kohlensaurer Talkerde, ist hexagonal krystallisirt, hat $\varepsilon = 2{,}8$ bis 3 und bildet auch eine besondere Felsart.

§. 142. Die vorzüglichsten Felsarten, welche beim Bauen verwendet werden. Nach der Erde, welche den hauptsächlichsten Bestandtheil der Bausteine ausmacht, unterscheidet man kieselige, thonige und kalkige Steine von einander.

I. Die kieseligen Steine.

1.) Der Granit ist ein körniges Gemenge von Quarz, Feldspath und Glimmer. Die Härte und Dauerhaftigkeit desselben ist um so größer, je mehr derselbe Quarz enthält. Er ist ein vorzüglicher Baustein, aber schwer zu bearbeiten, und deshalb mehr zu großen, namentlich Brücken- und Wasserbauwerken, als zu Ornamenten geeignet.

2.) Der Syenit enthält Hornblende statt des Glimmers und keinen Quarz, und ist deshalb dem Granit oft noch vorzuziehen.

3.) Der Gneiß ist ein körnig schieferiges Gemenge von Quarz, Feldspath und Glimmer; er ist in Folge seiner Schichtung leicht in Platten zu gewinnen, und deshalb zum Mauern

sehr geeignet; jedoch nicht so dauerhaft als feinkörniger quarzreicher Granit.

4.) Der Glimmerschiefer hat dasselbe Gefüge wie der Gneiß, enthält aber keinen Feldspath. In Folge der schieferigen Structur dringt das Wasser leicht in den Gneiß und Glimmerschiefer, wodurch die Dauerhaftigkeit der Mauern aus diesen Steinen sehr beeinträchtigt wird.

5.) Der Dolerit und Basalt sind dichte Gemenge von Labrador und Augit, jener körnig, dieser dicht. Letzterer ist schwer und nur in kleineren Stücken zu bearbeiten, aber sehr zweckmäßig bei Grundmauern, Pflastern und Aufschütten von Straßen zu verwenden.

6.) Die Grünsteine unterscheidet man in Diorit, Diabas und Gabbro; und sind körnige Gemenge und zwar a) Diorit aus Oligoklas und Hornblende; b) Diabas aus Oligoklas oder Labrador, Augit und Chlorit und c) Gabbro aus Labrador und Diallag.

7.) Talk- und Chloritschiefer, sowie Speckstein kommen seltener zur Verwendung, sind leicht zu bearbeiten und widerstehen, namentlich der letztere, dem Feuer.

8.) Der Hornblendschiefer ist hart und dauerhaft, widersteht den Einwirkungen des Wassers, und läßt sich zu Steinplatten gut verwenden.

9.) Der Quarzfels, Hornstein, Kieselschiefer, Feuerstein u. s. w. bestehen ganz oder nahe aus reiner Kieselerde und sind die dauerhaftesten Bausteine, aber wegen ihrer großen Härte schwer zu bearbeiten, und deshalb zum Mauern nicht geeignet.

10.) Der Sandstein besteht aus kleinen Quarzkrystallen oder Quarzkörnern, welche durch ein Bindemittel von Kiesel-, Thon- und Kalkerde mehr oder weniger fest verbunden sind.

Der Kieselsandstein hat ein kieseliges Bindemittel, ist deshalb sehr hart, dauerhaft und giebt daher sehr gute Quadern; der Thonsandstein, wo das Bindemittel hauptsächlich Thon ist, ist zwar weniger hart als der erstere, giebt aber noch immer ein gutes Baumaterial. Der Sandstein mit kalkigem Cement zersetzt sich leicht an der Seeküste und an Orten, wo viele Steinkohlen verbrannt werden, durch Einwirkung der Salz- und Schwefelsäure. Die sandigen Kalksteine gehen allmälig in kalkige Sandsteine über. Weiße Sandsteine mit scharfen Körnern und wenig Bindemittel sind die festesten und dauerhaftesten. Rothe Sandsteine sind durch Eisenoxyd gefärbt. Nester von Thoneisenstein oder von Schwefelkies vermindern die Dauerhaftigkeit des Sandsteins wesentlich, denn diese zersetzen sich in der feuchten Luft. Die Sandsteine sind in ihrer natürlichen Schichtung zu verwenden, damit sie nicht durch den Frost zerbröckelt werden.

II. Die thonigen Steine.

1.) Der Porphyr besteht aus einer Feldspathmasse mit eingestreuten Krystallen von Feldspath, Quarz, Glimmer, Hornblende oder anderen Mineralien. Es giebt Porphyr mit einer dichten Grundmasse, den sogenannten Hornsteinporphyr, welcher den Granit an Festigkeit übertrifft, und wegen seiner rothen und grünen Farben sich auch sehr zu Ornamenten eignet. Der Thonsteinporphyr mit einer weichen und erdigen Feldspathmasse ist weich und deshalb weniger zum Bauen geeignet.

2.) Der Thonschiefer ist ein inniges Gemenge von Quarz und Glimmer mit schieferiger Structur. Die Richtung der letzteren weicht in der Regel bedeutend von der Schichtungsebene dieses Gesteins ab. Er ist von bläulichgrauer, blauer und rother Farbe und läßt sich leicht in Platten und dünne Tafeln formen, daher er auch vorzüglich als Dachschiefer verwendet wird. Eine dunkle Farbe, eine glatte Oberfläche und heller Klang sind Zeichen einer guten Qualität. Der Schieferthon ist ein mit Stein- und Braunkohlen vorkommender Thon, der häufig Pflanzenabdrücke zeigt.

3.) Der Grauwackenschiefer ist ein schieferiger Thonstein, welcher Sand, Glimmer und Fragmente von anderen Mineralien enthält. Er eignet sich weniger zum Dachdecken, als zum Bodenbelegen.

III. Die kalkigen Steine

brausen in verdünnten Mineralsäuren auf, welche sich mit dem Kalk verbinden und die Kohlensäure ausscheiden. Mit Schwefelsäure bildet sich der im Wasser unauflösliche Gyps. Durch große Hitze wird die Kohlensäure ausgetrieben und es bleibt der kaustische oder Aetzkalk. Diese Steine sind entweder reiner Kalkstein, oder verbunden mit kohlensaurer Talkerde, oder vermengt mit Sand, Thon und Eisenoxyd. Dichte kalkige Steine sind fester, dauerhafter und den Einwirkungen der Atmosphäre sowie des Frostes weniger zugänglich als die lockeren und porösen.

1.) Der Urkalkstein ist krystallinisch körnig, weiß und graulich, kommt im Gneiß, Glimmer- und Thonschiefer eingelagert vor, ist deshalb ohne Versteinerungen. Hierher gehören der carrarische, parische und pentelische Marmor, welche wegen ihres feinen Kornes vorzüglich zu Kunstwerken geeignet sind.

2.) Der Uebergangskalk ist auf Thonschiefer oder Grauwacke gelagert, durch alten rothen Sandstein bedeckt und enthält einige Versteinerungen. Derselbe hat mehr ein dichtes als ein körniges Gefüge, eignet sich gut zum Wasserbau sowie zum Kalkbrennen.

3.) Der **Bergkalk** oder **Kohlenkalkstein** und **Zechstein**, ersterer im Steinkohlen-, letzterer im Kupferschiefergebirge vorkommend.

4.) Der **Muschelkalk** ist graulich und thonhaltig, von muschligem Bruche, deutlicher Schichtung und ist reich an Petrefacten. Er widersteht der Witterung und gehört zu den guten Bausteinen.

5.) Der **Liaskalk**, ein bituminöser, mergeliger Kalkstein.

6.) Der **Jurakalk** ist bald dicht, bald rogenartig (Oolith), wird viel zu Bauwerken verarbeitet, verwittert aber leicht, wenn er sehr thonhaltig ist. Hierher gehört auch der Solenhofener **lithographische Stein**.

7.) Die **Kreide** und der **Plänerkalk**.

8.) Der **Grob-** oder **Cerithenkalk** enthält sehr viel Muscheln und Schneckenschalen, ist aber ein guter Baustein (in der Umgegend von Paris).

9.) Der **Süßwasserkalk** und der **Kalktuff** sind die jüngsten Kalkgesteine.

10.) Der **Dolomit** oder **Bitterkalk** ist ein talkerdehaltiger Kalkstein, ist theils dicht, theils körnig, und kommt sowohl im Ur- als auch im Flötzgebirge vor. Er verwittert leicht und nützt deshalb weniger als Baustein; dient aber vorzüglich zur Erzeugung des hydraulischen Kalks (s. S. 782).

§. 143. Festigkeit, Prüfung und Verwahrung der Bausteine. Der Modul der Druckfestigkeit ist bei Granit, Syenit, Grauwacke und Basalt:

$$K_2 = 10000 \text{ bis } 25000 \text{ Pfd.},$$

und bei gutem Sand- und Kalkstein:

$$K_2 = 7000 \text{ bis } 9000 \text{ Pfd.},$$

dagegen bei schlechtem:

$$K_2 = 2500 \text{ bis } 3500 \text{ Pfd.}$$

Schieferige oder blätterige Steine haben in der Richtung des Gefüges eine kleinere Festigkeit.

Der Sicherheit wegen, belastet man die Steine höchstens mit $\frac{1}{10}$ des Festigkeitsmoduls, z. B. guten Sand- oder Kalkstein, mit 700 bis 900 Pfd. pr. Quadratzoll. Es ist zweckmäßig, vor Anwendung bei größeren Bauwerken die Festigkeit der Steine einer besonderen Prüfung zu unterwerfen oder den Zustand von Bauwerken zu untersuchen, welche aus dem zu verwendenden Material schon seit Jahrzehnten aufgeführt worden sind. Auch ist es nöthig, die aus dem Bruche kommenden Steine vor ihrer Verwendung ein Jahr lang der freien Luft und Nässe auszusetzen und sie dann austrocknen zu lassen. Blätterige Gesteine und solche mit Nestern und Adern von Eisen- und Manganoxyd sind der Verwitterung mehr ausgesetzt als dichte und feinkörnige Gesteine. Ein Gestein ist um so dauerhafter, je weniger es Wasser in sich aufnimmt, z. B. Granit und Thonschiefer absorbirt $\frac{1}{4}$ bis $\frac{5}{4}$ Proc., Gneiß und Sandstein $\frac{5}{3}$ bis $\frac{10}{3}$ Proc.

Wasser. Anstatt einen Stein dem Frost auszusetzen, kann man seine Dauerhaftigkeit auch dadurch prüfen, daß man, nach Brard, denselben mehrere Tage lang in einer Glaubersalzauflösung stehen läßt, und zusieht, ob mit dem Ansetzen von Salzkrystallen auch eine Zerstörung des Steins verbunden ist.

Um die Steine vor dem Zerfallen zu schützen, muß man die Poren an der Oberfläche derselben mit einer dem Wetter widerstehenden Masse ausfüllen, vorher aber durch Erhitzung die Feuchtigkeit austreiben. Zu einer solchen Füllmasse kann man verwenden: Steinkohlentheer, Leinöl, Kieselkali oder Wasserglas.

Die Steine dehnen sich in der Hitze nicht bedeutend aus, von Null auf die Siedehitze erhitzt, ist die lineäre Ausdehnung derselben 0,00065 bis 0,001. Ein Stein ist feuerfest, wenn er in der größten Hitze weder schmilzt noch aufreißt oder sich zerblättert. Steine mit Kalk- und Talkerdengehalt taugen nicht zu Feuerungsanlagen.

§. 144. Ziegel- oder Backsteine. Die Thone sind, wie der Feldspath, Silicate von Thonerde, gewöhnlich in Verbindung mit Silicaten von Kali, Natron, Kalk, Talkerde, Eisen- und Manganoxyd; Lehm ist ein mit Kieselsand, und Mergel ein mit Kalksand vermengter Thon. Mit Wasser vermischt, schwillt der Thon an und bildet einen Teig; und beim Austreiben des Wassers durch Hitze zieht sich derselbe zusammen und bildet eine harte Masse. Der aus einem einfachen Silicate, namentlich der aus Thonerdesilicat bestehende Thon widersteht dem Feuer am besten, eignet sich daher vorzüglich zu feuerfesten Ziegeln und Schmelztiegeln; zwei- oder mehrfache Silicate, namentlich solche mit Kali, Natron oder Kalk schmelzen im starken Feuer.

Der Porzellanthon besteht aus 1 Aeq. Thon- und 3 Aeq. Kieselerde, und verbindet sich mit 2 Aeq. Wasser, welches größtentheils durch die Weißglühhitze wieder ausgetrieben wird. Andere feuerfeste Thone enthalten noch mehr Kieselerde. Das Eisenoxyd befördert in den gewöhnlichen Thonziegeln die Härte und Festigkeit und verwandelt die ursprünglich bläulichgraue Farbe in eine rothe. Viel Kalksilicat macht den Thon im Feuer zu leicht schmelzbar und kohlensaurer Kalk macht den Thon nach dem Brennen hygroskopisch.

Um dem starken Zusammenziehen beim Brennen entgegen zu wirken, versetzt man den Thon mit 20 bis 25 Proc. Kieselsand. Man befördert die Güte der Ziegel, wenn man den gewonnenen Thon vor seiner Verarbeitung in dünnen Schichten noch ein Jahr lang der Verwitterung aussetzt.

Die Fabrikation der Ziegel beginnt mit dem Reinigen des Thones von Steinen; hierauf folgt das Versetzen desselben mit der Hälfte seines Volumens Wasser, und dann das Durcharbeiten und Kneten zu einem homogenen Teige, sowie nach Be-

finden, Vermengen mit dem nöthigen Sande. Man verwendet hierbei mit Vortheil einen Mahlgang mit zwei aufrecht stehenden Steinen (s. Seite 755). Das Formen des feuchten Lehms in eisernen Formkästen erfolgt entweder mit der Hand auf dem sogenannten Streichtische, oder auch mittels besonderer Ziegelstreichmaschinen. Nach dem Streichen werden die Ziegel in freier Luft oder in Trockenschuppen, gegen die Sonne geschützt, lufttrocken gemacht, und hierauf gebrannt, wobei man die Hitze allmälig bis zum Weißglühen steigert. Die Dimensionen der Ziegel nehmen beim Brennen um $1/12$ bis $1/10$ ab; um daher z. B. gewöhnliche Mauerziegel von 12 Zoll Länge, 6 Zoll Breite und 3 Zoll Dicke zu erhalten, muß man sie 13 Zoll lang, $6\frac{1}{2}$ Zoll breit und $3\frac{1}{4}$ Zoll dick einformen. Man brennt die Ziegel entweder in Haufen auf dem freien Felde oder in besonderen Ziegelöfen. Bei dem Brennen in Haufen setzt man die Ziegel, mit Aussparung der nöthigen Räume für das Brennmaterial und den Luftzug, in 20 oder mehreren, oben mit Lagen von Kohlenklein abwechselnden Schichten übereinander und bedeckt das Ganze noch durch eine mit Strohschnitzel vermengte Lehmdecke. Ein Haufen mit 200000 in 28 Schichten aufgestellten Ziegeln ist in 8 bis 10 Tagen aufgebaut, brennt 12 bis 15 Tage, und verbraucht pr. 1000 Ziegel 5 Centner grobe und klare Kohle. Ungefähr $3/4$ der gebrannten Ziegel sind dann vollkommen hart gebrannt.

Die Ziegelöfen dienen vorzüglich zur Holz- und Torffeuerung; sie haben eine ausgebauchte Schachtform und sind unten durch Gewölbe mit Zuglöchern geschlossen, auf welche die Ziegel mit der hohen Kante und sich kreuzend so aufgeschichtet werden, daß die leeren Räume ungefähr den dritten Theil des ganzen Schachtraumes einnehmen. Die Feuerung erfolgt ununterbrochen auf einem Herde unter dem Gewölbe. In einem kleineren Ziegelofen von 15 Fuß Höhe und 450 Quadratfuß Querschnitt brennt man binnen vier Tagen 45000 Ziegel, mittels 60000 Stück Torf oder 27 Klafter Holz. Bei größeren Oefen, welche über eine Million Ziegel fassen, ist der Brennmaterialaufwand verhältnißmäßig viel kleiner, aber auch die Brennzeit über zwei Wochen. Die Feuerung ist allmälig zu steigern und, nach vollbrachtem Brennen, die Abkühlung bei verschlossenem Ofen vor sich gehen zu lassen. Um eine bessere Wärmebenutzung zu erlangen, wendet man auch Doppelöfen an.

Die Merkmale eines guten Ziegels sind: eine dunkelrothe Farbe, eine genaue Form mit scharfen Kanten und ebenen Flächen, heller Klang, im Bruche etwas glasig, hart und dicht, und frei von Sprüngen und Blasenräumen. Unter Wasser gebracht, dürfen die Ziegel höchstens $1/15$ ihres Gewichts an Wasser einsaugen und sich nachher nicht abbröckeln. Die Ziegel (Klinker), welche wenig Eisenoxyd, aber kohlensauren Kalk enthalten und schmutzig weiß oder gelb ausfallen, lassen sich zwar ebenfalls sehr hart brennen, widerstehen aber dem Feuer nicht.

Ein guter Ziegelstein wird erst bei $K = 1000$ Pfd. Druck pr. Quadratzoll zerdrückt, soll aber beim Bauen nur mit 125 Pfd. pr. Quadratzoll belastet werden. Bei der Erhitzung von 0 auf 100 Grad, nimmt der gewöhnliche Ziegel um 0,00355, und der feuerfeste Ziegel um 0,0005 an Seitenlänge zu.

Das specifische Gewicht der gebrannten Ziegel ist 1,5 bis 2,2, folglich wiegt ein Cubikfuß Ziegelmasse 93 bis 136 Pfd.

Ziegelformen	Länge. Zoll	Breite. Zoll	Dicke. Zoll.	Gewicht. Pfd.	Anzahl pr. Cubikfuß	Gewicht von 1000 Stück. Centner	Thonmasse für 1000 St. Schachtruth.
Große . .	$11\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	$8\frac{2}{3} \div 12\frac{3}{5}$	$10\frac{4}{5}$	$87 \div 126$	$\frac{3}{4} \div \frac{5}{6}$
Mittlere .	10	$4\frac{5}{6}$	$2\frac{1}{2}$	$6\frac{2}{5} \div 9\frac{2}{5}$	$14\frac{1}{2}$	$64 \div 94$	$\frac{7}{12} \div \frac{5}{8}$
Kleine . .	$9\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{8}$	$4\frac{9}{10} \div 7\frac{1}{5}$	19	$49 \div 72$	$\frac{4}{9} \div \frac{1}{2}$

Gepreßte Ziegel, welche beim Formen mit 10000 Pfd. Druck pr. Quadratzoll zusammengedrückt werden, sind fester und um die Hälfte dichter als gewöhnliche Ziegel, und ziehen sich beim Brennen nur wenig zusammen. Hohlziegel geben ein bedeutendes Materialersparniß, vertragen aber nur einen kleinen Druck. Ungebrannte Ziegel sind vor ihrer Verwendung längere Zeit der Luft auszusetzen, und die aus denselben aufgeführten Mauern sind mit einer Kalkdecke gegen Feuchtigkeit zu schützen. Auch verwendet man beim Bauen sogenannte Beton- oder Mörtelsteine, welche man aus hydraulischem Kalk, Cement, Sand- und Steinstücken zusammensetzt.

§. 145. Kalk und andere Bindemittel. Die Hauptbestandtheile der Kalk- und Cementsteine sind kohlensaurer Kalk, mit der Aequivalentzahl $22 + 28 = 50$, und kohlensaure Talkerde, mit der Aequivalentzahl $22 + 20 = 42$. Außerdem kommt noch Kiesel- und Thonerde, sowie Eisenoxyd und Wasser in denselben vor. Durch Erwärmen bis zur Rothglühhitze verliert der Kalk seinen Wasser- und durch stärkere Erhitzung seinen Kohlensäuregehalt, und wird hierbei in Aetzkalk verwandelt. Der gebrannte Kalk kommt in folgenden Arten vor:

1.) Der reine oder fette Kalk, welcher keine oder wenig Silicate enthält, absorbirt beim Löschen Wasser, wobei er sich bedeutend aufbläht, und bildet eine teigige Masse, welche an der Luft langsam und unter Wasser gar nicht hart wird.

2.) Der hydraulische Kalk, welcher 10 bis 30 Proc. Silicate enthält; derselbe schwillt beim Löschen weniger an, und giebt mit Wasser einen Teig, welcher unter Wasser langsam erhärtet.

3.) Der Cement geht aus Kalksteinen hervor, welche 40

bis 60 Proc. Silicate enthalten, löscht sich mit Wasser nicht ab und erhärtet ganz schnell unter Wasser.

4.) Der Puzzolane enthält Silicate im Uebermaß, und läßt sich durch Mischung mit reinem Kalk in Cement umändern.

Der reine Kalkstein verliert beim Brennen 44 Proc. seines Gewichtes und 12,5 Proc. seines Volumens. Das Brennen erfolgt seltener in freien Haufen, sondern gewöhnlich in besonderen Oefen. Letztere sind entweder solche mit ununterbrochener oder solche mit unterbrochener Feuerung. Ein Kalkofen mit ununterbrochener Feuerung bildet einen abgekürzten Kegel von 10 bis 30 Fuß Höhe, 6 bis 18 Fuß oberer und 3 bis 9 Fuß unterer Weite, und hat unten einen kegelförmigen Steinpfeiler, sowie mehrere Seitenöffnungen, durch welche der gebrannte Kalk herausgezogen wird. Der Kalk wird oben mit dem Brennmaterial schichtenweise abwechselnd aufgegeben. Die Kalköfen mit unterbrochener Feuerung sind gewöhnlich oval im verticalen Durchschnitt, haben nur 10 bis 15 Fuß Höhe und brennen nur 35 bis 50 Stunden lang. Im Allgemeinen läßt sich annehmen, daß das Gewicht des Brennmaterials = 1,5 bis 1,6mal Gewicht des gebrannten Kalkes ist. Doppelöfen, wovon der eine über dem anderen steht, sind ökonomisch vortheilhaft. Man kann annehmen, daß 1 Cubikfuß Kalkstein 87, ferner 1 Cubikfuß gebrochener Kalk, 61 und 1 Cubikfuß gebrannter nur 34 Pfd. wiegt. Bei dem Löschen des Kalkes verbindet sich 1 Aeq. Wasser (9 Gewichtsthle.) mit 1 Aeq. Kalk (28,5 Gewichtstheile) zu einem Kalkhydrat. Hierbei schwillt der Kalk auf das $2^1/_2$ bis $3^1/_2$fache seines Volumens an, und zerfällt bei großer Erhitzung in Pulver. Der gebrannte Kalk ist vor dem Zutritt der Luft geschützt aufzubewahren, weil er durch das Ansaugen von Wasser und Kohlensäure aus der Luft allmälig wieder in kohlensauren Kalk übergeht. Der gelöschte Kalk ist deshalb frisch zu verwenden. Das Löschen des Kalkes erfolgt in einem besonderen Löschkasten, aus welchem er nach gehörigem Zerstoßen und Durchrühren mittels Schaufel und Hacke, als weiße dickflüssige Masse durch ein Loch in die Kalkgrube abgelassen wird.

Der hydraulische Kalk wird gewöhnlich durch Brennen von solchen Kalksteinen erlangt, welche Silicate von Thonerde oder auch kohlensaure Talkerde enthalten, und sich durch ihre blaugraue und braungelbe Farbe auszeichnen. Um einen Kalkstein zu prüfen, ob er hydraulischen Kalk liefere, glühe man 2 bis 3 Cubikzoll Kalkstücke in einem Tiegel, zerstoße dieselben in ein feines Pulver, knete dieses mit Wasser vermischt in einen Ballen zusammen, und bringe denselben in ein Glas mit Wasser. Ist der Kalk hydraulisch, so wird dieser Ballen schon nach 24 Stunden dem Drucke des Fingers widerstehen, aber nach 2 bis 4 Wochen sogar die Härte eines milden Kalksteins haben. Hat man es mit einem Cement zu thun, so erhärtet er schon nach

einigen Minuten. Der beste hydraulische Kalk löscht sich nach dem Brennen so unvollkommen ab, daß es nöthig ist, ihn mittels einer Mühle mit zwei aufrecht stehenden Steinen trocken zu vermahlen. Das erhaltene Kalkpulver ist gegen den Einfluß der Luft und Feuchtigkeit geschützt, in Fässern aufzubewahren.

Um künstlichen hydraulischen Kalk zu erzeugen, kommt es darauf an, gewöhnlichen Kalk mit kieselerdehaltigem Thon zu vermischen. Man kann nach Vicat, diesen Thon mit dem vorher gebrannten und gelöschten Kalk durchkneten und zu Broden formen; letztere trocknen, brennen und entweder ablöschen oder in feines Pulver zerrieben mit gemeinem Kalk vermengen. Das Zerreiben und Vermengen der Bestandtheile des hydraulischen Kalks erfolgt in einem eisernen Trog mit Hülfe von umlaufenden Rädern, welche gewöhnlich von einem Pferdegöpel in Bewegung gesetzt werden. Gewöhnlicher fetter Kalk erhält 20 Proc. Kieselthon Zusatz.

Der natürliche Cement wird durch Brennen solcher Kalksteine erlangt, in welchen die Silicate in solchen Verhältnissen vorkommen, daß sie nach Entfernung der Kohlensäure eine starre Verbindung der Kalkerde mit Kiesel- und Thonerde geben.

Gewöhnlich werden die Cementsteine in dünnen Schichten unter denen von hydraulischem Kalkstein aufgefunden. Der Cement wird nach dem Brennen zu Pulver vermahlen und in Fässern gepackt an einem trockenen Orte aufbewahrt. Der künstliche Cement wird aus gebranntem Kalk und Thon zusammengesetzt und wie der künstliche hydraulische Kalk aufbereitet. Die Puzzolanerde, ein eisenhaltiger Thon, ist ein vorzüglicher Körper zur Bildung von künstlichem Cement. Diese Erde ist zwar ein vulkanisches Product, läßt sich aber auch künstlich erzeugen. Es gehört auch hierher der Traß oder vulkanische Tuffstein, z. B. der von Andernach, ferner die Santorinerde aus Griechenland, der römische oder englische Patentcement, der Portland-Cement, welcher letztere eine sehr große Festigkeit ($K_2 = 1500$ Pfd.) hat und künstlich bereitet wird.

§. 146. Luft- und Wassermörtel.

Als Bindemittel beim Mauern mit Steinen und Ziegeln dient der Mörtel, d. i. ein Gemenge von gebranntem Kalk, Sand und Wasser zu einem halbflüssigen Teige.

Der gewöhnliche Kalk- oder Luftmörtel wird aus reinem und der hydraulische Wassermörtel aus hydraulischem Kalk angefertigt. Der erstere erhärtet während der Verdampfung des Wassers und geht bei Aufnahme von Kohlensäure aus der Luft, durch Krystallisation in einen festen Zustand über; der letztere erhärtet durch Krystallisation des Kalkes, und vorzüglich durch Bildung und Krystallisation der Silicate von Thonerde, Kalk und anderen Basen. Uebrigens kann man auch Luftmörtel durch Zusatz von einem Cement, z. B. Puzzolanerde,

Traß oder Ziegelmehl, in hydraulischen Mörtel verwandeln. Während der Luftmörtel langsam an der Luft erhärten soll, muß der Wassermörtel schnell unter Wasser fest werden, und den mechanischen und chemischen Einwirkungen des Wassers widerstehen können. Der Sand, welcher bei der Mörtelbildung angewendet wird, soll scharf und mittelmäßig fein sein und aus reinem Kiesel bestehen; thoniger Sand ist zu vermeiden, oder vor der Anwendung durch Waschen von dem Thon zu befreien. Fluß- und Quellsand hat zwar meist reine, aber abgerundete Sandkörner. Seesand ist vor dem Gebrauch durch Waschen mit reinem Wasser vom Salze zu reinigen. Durch Zerpochen und Sieben von Sandstein erhält man in der Regel einen guten Sand zur Mörtelbildung. Natürlich bildet der Sand im Mörtel mit dem Kalk nur ein mechanisches Gemenge, und zwar nach Erhärtung des letzteren eine Art künstlichen Sandstein. Der Sand macht das kalkige Bindemittel nicht allein wohlfeiler, sondern giebt demselben auch eine größere Druckfestigkeit und vermindert vorzüglich das starke Zusammenziehen und Aufreißen desselben beim Erhärten. Dagegen verliert der Kalk durch den Sand an seiner Zugfestigkeit, und wird, wenn er zu viel Sand enthält, bröckelig und zerfällt wohl in Stücken. Natürlich ist es nöthig, den Sand nur in solcher Menge dem Kalke zuzusetzen, daß der letztere die hohlen Räume ausfüllt, welche der erstere übrig läßt. Uebrigens verträgt ein Kalk um so mehr Sand, je reiner er ist. Nach Vicat sind zu vermengen 2,4 Maß von Sand mit 1 Maß reinem, oder 1,8 Maß Sand mit 1 Maß gutem hydraulischen Kalk. Wegen der Zwischenräume u. s. w. giebt 1 Maß Sand mit 2 Maß Kalkbrei vermengt nur 1,4 bis 2,4 Maß Mörtel. Das specifische Gewicht des Mörtels ist 1,6 bis 1,8. Die Vermengung des Sandes mit Kalk kann mit der Hand oder mit Maschinen erfolgen. Auch $2^1/_2$ Maß Sand und Puzzolanerde mit 1 Maß reinem Kalk giebt einen guten hydraulischen Mörtel. Im ersteren Falle werden diese Bestandtheile in einem Trog oder Kasten mittels Krücke und Schaufel so lange durchgearbeitet, bis die ganze Masse ein gleichförmiges Ansehen erhält. Ein Mann bereitet auf diese Weise täglich 32 Cubikfuß Mörtel.

Bei größeren Bauten bedient man sich aber zur Mörtelbereitung einer, meist durch Pferdegöpel oder eine Locomobile in Umtrieb zu setzenden Maschine. Dieselbe besteht entweder in einer Thonmühle mit einer in einem Fasse umlaufenden und mit Rührarmen ausgerüsteten stehenden Welle, oder in einer sogenannten Reibmühle, mit in einem ringförmigen Troge umlaufenden Rädern. Der Trog ist aus Steinen aufgemauert und hat bei 20 bis 30 Fuß Durchmesser einen trapezoidalen Querschnitt von $1^1/_2$ Fuß Tiefe und 2 Fuß mittlerer Weite, und die Räder, deren Axen wie Arme aus der Göpelwelle vorstehen, haben $^1/_2$ Fuß breite Reifen und messen 6 Fuß im Durchmesser. Wenn man den Sand mit dem vorher schon eingetragenen Kalk

gehörig verarbeitet hat, eröffnet man eine im Boden des Troges befindliche Oeffnung und läßt den fertigen Mörtel in eine Grube fallen. Eine solche Mühle, welche von zwei Pferden umgetrieben wird, liefert täglich gegen 600 Cubikfuß Mörtel. Da der hydraulische Mörtel sehr schnell erhärtet, so muß man ihn ganz frisch erzeugt verwenden.

Concrete und Beton sind Gemenge von Mörtel mit $1\frac{1}{2}$ bis 2 Zoll dicken Steinstücken. Bei dem gewöhnlichen Concret enthält das Gemenge Luftmörtel, bei dem hydraulischen Concret oder sogenannten Beton, besteht es aus hydraulischem Mörtel und Steinstücken. Die letzteren müssen fest, rauh und scharfkantig sein, und vor dem Gebrauch ins Wasser eingetaucht werden. Gewöhnlich kann man annehmen, daß Concret und Beton auf 1 Volumen Steine 0,6 Volumen Mörtel erfordern, und daß das Volumen der Mengung $\frac{2}{3}$ bis $\frac{3}{4}$ des ganzen Volumens der Bestandtheile beträgt. Nach dem Setzen und, nach Befinden, Zusammenrammen ist aber dieses Volumen nur $\frac{5}{9}$ bis $\frac{5}{8}$ des ganzen Volumens der Gemengtheile. Um 100 Cubikfuß Beton zu erzeugen, kann man 96 Cubikfuß zerschlagene Geschiebe, 48 Cubikfuß Sand, $12\frac{1}{4}$ Cubikfuß Kalk und 16 Cubikfuß Wasser mit einander vermengen. Die Vermengung der Gesteinstücke mit dem Mörtel kann mit Hülfe von Schaufeln und Krücken auf einem Bretboden oder auch mittels einer im Innern mit Spitzen ausgesetzten rotirenden Trommel u. s. w. erfolgen.

Concret findet seine Anwendung vorzüglich bei schlechtem Baugrund und der Beton ist ein ausgezeichnetes Mittel für Gründungen unter Wasser.

Der Modul der Druckfestigkeit des Mörtels und Betons ist nach $1\frac{1}{2}$jährigem Stehen: $K_2 = 400$ bis 600 Pfd., und wenn derselbe vorher zusammengerammt worden ist: $K_2 =$ 600 bis 900 Pfd. Sechszehn Jahr später ist K_2 um $\frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{4}$ größer. Der Modul der Zugfestigkeit des Kalks und Mörtels ist dagegen im Mittel, $K_1 = \frac{1}{8} K_2$.

Die Adhäsion des gemeinen Mörtels am Kalkstein beträgt 15, und an Ziegelsteinen 32 Pfd. pr. Quadratzoll.

Der Gyps ist schwefelsaurer Kalk und besteht aus 1 Aeq. Schwefelsäure $(16 + 24) = 40$, 1 Aeq. Kalkerde $= 28{,}5$ und 2 Aeq. Wasser $= 18$, hat also die Aequivalentzahl 86,5. Er findet sich in der Natur meist über dem Kalkstein gelagert, ist körnig, blätterig, faserig und erdig, weiß und grau von Farbe, hat wenig Härte und das specifische Gewicht $\varepsilon = 2{,}5$ bis 3. Der feinkörnige Gyps heißt Alabaster und wird zu plastischen Kunstwerken verwendet. Beim Brennen des Gypses, welches in einer Art Ziegelöfen erfolgt, wird das Wasser ausgetrieben und ein trockenes weißes Pulver, der sogenannte Stuck, erhalten. Mit Wasser vermischt, bildet derselbe einen Teig, welcher aber durch Einsaugen von Wasser unter Entwickelung von Wärme wieder in gewöhnlichen dichten

Gyps übergeht. Bei der Verwendung wird der natürliche Gyps gemahlen ins Wasser geworfen, und ein gleiches Volumen mit demselben zu einem nach Bedürfniß dicken Brei angemacht. Der Gypsbrei oder Gypsmörtel haftet sehr gut an Holz und Steinen, verträgt aber keine Feuchtigkeit, und man verwendet ihn deshalb zum Verstreichen von Fugen, zum Herstellen von Gesimsen und Stuckaturarbeiten, sowie zum Bekleiden von Holzwänden, Abputz von Mauern und Herstellen von Estrich. Der Festigkeitsmodul des Zerdrückens ist $R_2 = 68$ Pfd. und der des Zerreißens, $K_1 = 7$ Pfd.

Man wendet auch gemischten Cement an, um das ungleiche Eintrocknen und Aufspringen des Cements zu verhindern. Derselbe besteht aus 1 bis 2 Maß Cement mit 1 Maß Sand.

Noch kommt bituminöser Cement oder Steinkitt und Concret in Anwendung, und zwar sowohl als Bindemittel wie auch als Bekleidung zum Schutz gegen den Angriff des Wassers. Dieser Cement ist eine Verbindung von einer harzigen oder bituminösen Substanz mit einer erdigen. Hierher gehört der Asphalt oder Asphaltmastix, eine Mischung von Bitumen oder Mineraltheer und gepulvertem bituminösen Kalkstein. Der Mineraltheer wird durch Auskochen eines Molassesandsteins gewonnen. Der bituminöse Kalkstein enthält nebst Thon, 3 bis 15 Proc. Bitumen. Er wird entweder in Stücken zerbrochen oder zu Pulver gemahlen und mit dem Bitumen dadurch verbunden, daß man letzteres in einem Kessel über dem Feuer erhitzt, den Kalkstein nach und nach einträgt und mit dem Bitumen umrührt. Im Mittel verbindet man so 1 Maß Bitumen mit 7 bis 8 Maß bituminösen Kalkstein. Man verwendet diesen Asphaltmastix vorzüglich zum Decken flacher Dächer, zum Belegen von Trottoirs, sowie auch als Kitt zur Verbindung großer Steine und als Schutzmittel des Holzes gegen Nässe.

Es wird auch künstlicher Asphaltmastix aus Steinkohlentheer oder Pech und fein gemahlenem Kalkstein oder feuerfestem Thon u. s. w. bereitet.

Man erhält dadurch auch guten Steinkitt für Sandsteinfugen u. s. w.

Bituminösen Mörtel erhält man, wenn man zu dem Asphaltmastix, $^3/_5$ seines Volumens Sand und $^1/_{35}$ Harzöl zusetzt.

Zweites Capitel.

Stein-, Holz- und Eisenconstructionen.

---

§. 147. Gründungen. Die Gründung, wodurch man sich die feste Basis für ein Bauwerk verschafft, erfolgt 1.) im festen Gestein, oder 2.) im festen Sand, Kies oder Thon, oder 3.) in weicher Erde.

Bei Felsengründungen muß man alles lose oder faule Gestein entfernen, und im festen Gestein eine ebene oder stufenförmige Basis herstellen, welche rechtwinkelig zur Richtung des aufzunehmenden Druckes steht. Dieser Druck soll höchstens $\frac{1}{10}$ des Druckes sein, bei welchem der Felsen zerdrückt wird. Unebenheiten oder Vertiefungen im Grunde sind durch Abarbeiten mit Schlägel und Eisen oder durch Ausfüllung mit Beton zu beseitigen oder durch aufgemauerte Bogen zu überspringen. Uebrigens ist jeder Bau so tief zu fundiren, daß weder Nässe noch Frost auf das Grundgestein einwirken kann. Bei den Gründungen auf festem Sand, Steingerölle, Lehm u. s. w. ist es nöthig, 4 bis 6 Fuß tief niederzugehen und das Wasser durch Spundwände, Beton und Abzüchte abzuhalten. Der größte Druck ist bei diesen Gründungen 16 bis 22 Pfd. pr. Quadratzoll. Gewöhnlich macht man die Basis des Grundes $1\frac{1}{2}$- bis 2mal so breit als die darauf aufzusetzende Mauer. Bei Gründungen in weicher Erde und losem Sande muß man die Tiefe und Breite des Fundaments der erforderlichen Tragfähigkeit desselben entsprechend herstellen. Ist $q = \frac{Q}{F}$ der Druck, welchen das Fundament pr. Quadratfuß aushalten soll, γ die Dichtigkeit und ϱ der Reibungswinkel desselben, sowie γ_1 die Dichtigkeit der Mauer oder der Ausfüllungsmasse im Fundament, so hat man die erforderliche Tiefe der Ausgrabung:

$$h = \frac{q\left[tg.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2}{\gamma\left[tg.\left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - \gamma_1\left[tg.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2}$$

$$= \frac{q\left[tg.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^4}{\gamma - \gamma_1\left[tg.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^4},$$

z. B. für $\varrho = 30^0$ und $\frac{\gamma_1}{\gamma} = {}^4/_3$,

$$h = \frac{0{,}11112}{1 - {}^4/_3 \cdot 0{,}11112}\,\frac{q}{\gamma} = \frac{0{,}11112}{0{,}85184}\,\frac{q}{\gamma} = 0{,}1305\,\frac{q}{\gamma}.$$

Wäre nun noch der Druck $q = 30 \cdot 144 = 4320$ Pfd. und das Gewicht eines Cubikfußes Fundamentalmasse, $\gamma = 80$ Pfd., so würde die nöthige Tiefe der Ausgrabung

$$h = \frac{4320 \cdot 0{,}1305}{80} = 7 \text{ Fuß}$$

betragen müssen. Durch Vergrößerung der Basis F kann man natürlich den Druck $q = \frac{Q}{F}$, und folglich auch die Tiefe h herabziehen. Um dieses zu erzielen, giebt man der Fundamentmauer Absätze oder sogenannte Bankete. Statt der grob behauenen Gesteinstücke wendet man mit Vortheil Beton zur ersten Grundlage des Fundaments an.

Liegt der Fundamentboden unter Wasser oder unter weichen Erdschichten von größerer Dicke, so wendet man vorzüglich Gründungen auf Rosten an, und zwar entweder auf Schwellen- oder Pfahlrosten. Jeder Rost besteht aus einem Gerippe von Lang- und Querschwellen und einer Bohlendecke von $2^1/_2$ bis 6 Zoll Dicke; und je nachdem er unmittelbar auf dem Baugrund aufliegt oder auf den Köpfen von in den Baugrund eingerammten Pfählen aufsitzt, ist er ein Schwellen- oder ein Pfahlrost. Die Pfähle eines Pfahlrostes sind ungefähr $^1/_{24}$mal so dick als lang, haben aber mindestens $7^1/_2$ Zoll Dicke, und sollen pr. Quadratzoll 600 Pfd. Widerstand leisten können.

Die Köpfe der Pfähle werden nach dem Einrammen in einer gewissen Höhe abgeschnitten, und der Raum zwischen denselben, sowie zwischen den Schwellen des später aufzulegenden Rostes wird mit Mauerwerk oder Beton dicht ausgefüllt.

Es ist nothwendig, daß der ganze Rost, selbst bei dem niedrigsten Wasserstande, vom Wasser verdeckt bleibe. Um während des Baues den Rost über dem Wasser zu haben, sind auch sogenannte Fangdämme in Anwendung zu bringen, und ist die Baugrube durch Ausschöpfen trocken zu legen. Bei ruhigem und seichtem Wasser kann man den Fangdamm

aus Erde aufführen; ist aber die Tiefe des Wassers größer und das Wasser fließend, so setzt man denselben aus eingerammten Pfählen und Bohlen zusammen, und ist die Tiefe desselben sehr groß, so bringt man einen sogenannten Kastendamm in Anwendung, welcher aus zwei Pfahlreihen, Bohlen und Spundwänden und zwischen beiden eingestampfter Erde besteht. Auch construirt man wohl die Fangdämme aus Beton. Beim Gründen in großen Tiefen bedient man sich der sogenannten Senkkästen, welche man sammt dem darin aufgeführten Mauerwerk auf den vorher durch Pfahlwerk oder Beton befestigten Grund herabsinken läßt, und bei sehr großen Tiefen unter Wasser ist es wohl nöthig, die Fundirung mittels einer Taucherglocke bewerkstelligen zu lassen.

Weichem Baugrund verschafft man wohl den nöthigen Widerstand entweder durch Einrammen von Pfählen oder durch Ausfüllen der durch Ausziehen der Pfähle entstandenen Löcher mittels Beton oder Mörtel, welchen man nach Befinden noch einstampft und mit einer Betonschicht bedeckt. Sehr zusammendrückbarer Boden wird durch eingestampfte Steine und umgekehrt eingetriebene Pfähle dichter gemacht. Auch bringt man wohl Pfeiler mit umgekehrten Bögen in Anwendung.

Der stark mit Wasser geschwängerte Thonboden setzt einer Gründung die größten Schwierigkeiten entgegen, da sich hier der Druck fast wie beim Wasser nach allen Seiten hin fortpflanzt. Man ist hier genöthigt, das Fundament ganz ungewöhnlich zu erweitern, und einen sehr breiten liegenden Rost in Anwendung zu bringen und denselben ganz gleichmäßig zu belasten.

§. 148. **Mauerwerke.** Bei Aufführung eines Mauerwerks soll man die größeren Steine im Grund oder Fuß verwenden, die Steine in Ebenen oder Lagerfugen über einander mauern, welche gegen die Richtung des Druckes rechtwinkelig liegen und sie so an einander ansetzen, daß keine durch mehrere Lagerfugen zugleich hindurchgehenden Stoßfugen entstehen. Alle Flächen eines Steines, welche eine Fuge bilden, sind jedoch so dünn wie möglich mit Mörtel zu bestreichen, und damit dieser festhafte, hat man die Steine, zumal wenn dieselben trocken und porös sind, vorher mit Wasser anzufeuchten. Es sind Quader-, Bruchstein-, Ziegel- und Erdmauern von einander zu unterscheiden.

Die Quader oder Werkstücke, aus welchen die Quadermauern zusammengesetzt werden, sind in der Form eines rechtwinkeligen Parallelepipedes behauen, und zwar meistens aus Granit, Sand- oder Kalkstein. Weiche Quader sind meist 3mal so lang und $1\frac{1}{2}$mal so breit, härtere, 4- bis 5mal so lang und 2- bis 3mal so breit als dick zu bearbeiten. Eine große Glätte der Flächen ist nicht zu fordern, wohl aber ist nöthig, daß sämmtliche Furchen einer und derselben Fläche, zumal der Lagerflächen, in einer Ebene liegen.

Um einen gehörigen Steinverband zu erhalten, ist es ferner nöthig, daß die Steinenden gehörig übereinander weggreifen, damit sich der Druck auf die ganze Mauer möglichst vertheile und die letztere den nöthigen Zusammenhang erhalte. Man legt zu diesem Zwecke die Steine abwechselnd der Länge und der Breite nach. Die der Länge nach liegenden Steine oder sogenannten Läufer, halten in Folge der Reibung, die Mauer der Länge nach, dagegen die querliegenden Steine oder sogenannten Binder, dieselbe der Breite nach zusammen. Den festesten Verband giebt die Mauer, in welcher jede Schicht abwechselnd aus je zwei Läufern und einem Binder besteht. Hierbei sollen die Endflächen der Binder nur $1/4$ bis $1/3$ der ganzen Seitenfläche einer Mauer einnehmen. Gewöhnlich fordert man, daß das Uebergreifen der Steine übereinander 1- bis $1^1/_2$mal so groß als sei die Steindicke. Die Ecksteine vertreten die Stelle eines Läufers und Binders zugleich. Die Mörteldicke soll $1/8$ Zoll, und das Volumen der ganzen Mörtelmasse soll $1/8$ der Steinmasse einer Mauer betragen. Beim Versetzen kann man den Quader erst auf Keilen ruhen lassen und die Fuge mit Mörtel ausfüllen und dann die Keile herausziehen. Besser ist es aber, man hebt erst den vorher gehörig eingepaßten Stein ab, überzieht die Lagerflächen mit einer Mörtelschicht, läßt dann denselben wieder herab, und preßt ihn, nach Befinden durch einige Rammschläge, stark auf dieses Mörtellager auf. Um den Quadern die nöthigen Bewegungen beim Versetzen ertheilen zu können, wendet man besondere Hebezeuge, z. B. Böcke mit Klobenzügen, Haspeln, Krahne und Versetzgerüste, an. Letztere bestehen in Vorgelegehaspeln, welche mittels Rädern auf einer kurzen Quereisenbahn bewegt werden können, deren Bett wieder mittels Rädern auf einer längs des Bauwerkes hinlaufenden Eisenbahn ruht. Zum Erfassen der Werkstücke dienen entweder Zangen, oder Dollen, oder Steinklauen, sogenannte Wölfe.

Die Bruchsteinmauern sind entweder solche mit gespitzten oder bearbeiteten, oder solche mit rohen Bruchsteinen. Auch bei den ersteren legt man die Steine so viel wie möglich schichtenweise über einander, jedoch sind die Bruchsteine in der Regel nicht so dick wie die Quader, und zwar meist noch nicht 1 Fuß dick, und es stoßen diese der Länge nach, in der Regel auch nicht in verticalen Fugen an einander. Man ahmt bei Aufführung von bearbeiteten Bruchsteinmauern im Verband die der Quadermauern so viel wie möglich nach; es sollen auch hier die Binder mindestens $1/4$ der ganzen Seitenfläche einer Mauer ausmachen. Die hohlen Räume zwischen den Läufern und Bindern sind mit kleinen Steinen sorgfältig auszufüllen. Ueberhaupt ist auf die Aufführung einer Bruchsteinmauer große Sorgfalt zu verwenden. Ein Cubikfuß Bruchsteinmauer erfordert 1,2 Cubikfuß Steine und 0,2 Cubikfuß Mörtel. Man kann annehmen, daß die Tragkraft einer

guten Bruchsteinmauer 0,4 von der ihres Steinmaterials ist. Bei den rohen Bruchsteinmauern kann man die Steine nicht in Schichten über einander legen, jedoch sind die einzelnen Steine so viel wie möglich in breiten ebenen Flächen über einander zu lagern. Die Tragfähigkeit dieses Mauerwerks ist nur wenig größer, als die des zu demselben verwendeten Mörtels. Ein Cubikfuß Mauer aus rohen Bruchsteinen erfordert 1,4 Cubikfuß Steine und 0,1 Cubikfuß Mörtel. Bruchsteine werden auch oft in Verbindung mit Quadern angewendet, namentlich dienen letztere oft zur Bildung der Ecken, Kanten und Stirnflächen von Bruchsteinmauern. Auch erhalten manche Bruchsteinmauern große, nach Befinden zusammengedübelte Deckplatten, entweder zum Schutz oder zur Vertheilung des Druckes.

Niedrige Mauern, welche keinen großen Druck auszuhalten haben, werden wohl ganz trocken gemauert.

Ein Maurer kann täglich 12 bis 27 Cubikfuß Mauerwerk aufführen, und ein Steinbrecher täglich 10 bis 40 Cubikfuß weiche, oder 5 bis 10 Cubikfuß feste Steine gewinnen und nach Befinden bearbeiten.

Die Ziegelmauern werden vollkommen schichtenweise, und zwar so aufgeführt, daß jeder Ziegel 1/4 bis 1/2 seiner Länge über der Stoßfuge weggreift. Jeder Ziegel ist vor seiner Verwendung zu reinigen und zu nässen, damit der Mörtel an demselben nicht zu schnell erhärtet. Verzogene Ziegel sind gar nicht, und Ziegelstücke nur, wenn es nicht zu vermeiden ist, z. B. beim Schließen einer Mauer, in Anwendung zu bringen. Der Mörtel soll höchstens 1/4 Zoll dick aufgetragen werden, und die Mörtelmasse einer Mauer 1/5 des Volumens der Ziegelsteine ausmachen. Bei einer Ziegelmauer nimmt, da die Ziegeln in der Regel doppelt so lang als breit sind, der Läufer an der Stirnfläche einer Mauer doppelt so viel Flächenraum ein, als der Binder. Der Verband der Ziegel erfolgt in der Art, daß man entweder Schichten von Läufern mit solchen von Bindern, oder daß man in einer und derselben Schicht Läufer mit Bindern abwechseln läßt. Beim letzteren Verband hat jede Schicht gleichviel Stoßfugen, bei dem ersteren ist dagegen die Anzahl der Stoßfugen der einen Schicht doppelt so groß, als die der anderen; deshalb muß man entweder die Ziegelsteine nicht ganz halb so breit als lang, oder die Stoßfuge zwischen den Läufern doppelt so weit als zwischen den Bindern machen. Wenn man bei dem ersten Verband auf jede Läuferschicht eine Bindeschicht folgen läßt, erhält die Mauer einen größeren Zusammenhang in der Breite als in der Länge, wenn man aber auf je zwei Läuferschichten eine Binderschicht folgen läßt, so entsteht eine Mauer, welche in der Breite und Länge eine und dieselbe Festigkeit hat. Bei Essen, welche vorzüglich in der Länge Widerstand leisten müssen, läßt man wohl auf drei oder vier Läuferschichten nur eine Binderschicht folgen.

Auch Ziegelmauern erhalten zuweilen Ecksteine von Quadern.

Ein Maurer kann mit Unterstützung eines Handlangers, täglich 25 bis 40 Cubikfuß Ziegelmauer liefern.

Schlackenziegel halten nur einen schwachen Druck aus.

Ueberhaupt macht man die Thür- und Fensterstöcke der Gebäude von Ziegel-, und Bruchsteinmauern aus besonders behauenen Steinen. Um die Feuchtigkeit einer Mauer von unten abzuhalten, legt man eine Schicht von Erdpech oder Theer zwischen die Steine über dem Fundament.

Die Pisé- oder Erdmauern werden aus mit Strohschnitzel eingeknetetem Lehm hergestellt; um ihnen die nöthige äußere Form zu geben, stampft man den Lehm zwischen Holzwänden ein, welche man nach und nach weiter fortrückt. Diese Mauern vertragen keinen großen Druck, und bedürfen noch eines Bewurfes aus Kalk und Thon, um dem Wetter widerstehen zu können.

§. 149. Gewölbe, Pfeiler und Futtermauern. Die Gewölbe dienen vorzüglich zur Ueberdeckung eines Raumes, sind deshalb Mauern aus keilförmigen Steinen mit gegen den Horizont geneigten Lagerfugen. Am häufigsten kommen die Tonnengewölbe, bei welchen die innere Gewölbfläche cylindrisch ist, zur Anwendung. Je nachdem die gerade Erzeugungslinie eines Gewölbes horizontal oder geneigt ist, hat man es mit einem horizontalen oder geneigten Tonnen- oder sogenannten Kellerhalsgewölbe, und je nachdem die Erzeugungslinie winkelrecht oder schief gegen die Stirnfläche des Gewölbes gerichtet ist, mit einem geraden oder schiefen Tonnengewölbe zu thun. Kreuz- und Klostergewölbe sind aus Tonnengewölben zusammengesetzt, und Kuppelgewölbe sind innen von einer Rotationsfläche begrenzt.

Bei jedem Tonnengewölbe, es mag dasselbe aus behauenen oder unbehauenen oder aus Ziegelsteinen bestehen, müssen die Lagerfugen ganz oder wenigstens nahe mit der Richtung des aufzunehmenden Druckes, d. i. mit der Stirn- und der inneren Gewölbfläche zugleich, den Rechtwinkel einschließen, sowie die Stoßfugen mit der Stirnfläche des Gewölbes parallel laufen. Bei dem geraden Gewölbe laufen hiernach die Lagerfugen in parallelen geraden Linien fort, bei den schiefen Gewölben hingegen längs Spirallinien, welche alle Parallelebenen zur Stirnfläche rechtwinkelig schneiden. Man hat Gewölbsteine mittels Schablonen zu bearbeiten, welche aus einer auf dem sogenannten Reißboden entworfenen Zeichnung entnommen werden. Die Lagerflächen der Gewölbsteine sind sorgfältig zu bearbeiten, und der Mörtel ist in Lagerfugen nur dünn aufzutragen, damit sich das Gewölbe wenig setzt. Die Hintermauerung ist erst dann auszuführen, wenn sich das Gewölbe gesetzt und man die etwa entstandenen Fugen durch harte Schiefer und mit weichem Mörtel ausgefüllt hat. Die Kronen der Hintermauern sind zur Abhaltung des Wassers mit einer Schicht von Beton oder einem

bituminösen Concrete zu bedecken. Auch bringt man besondere Rinnen und Röhren zur Ableitung des Wassers an. Ziegelgewölbe werden entweder von besonders keilförmig geformten oder auch von gewöhnlichen Ziegeln aufgeführt. Im letzteren Falle ist es nöthig, die Lagerfugen nach außen zu weiter zu machen, und nach Befinden, noch dünne Schieferstücke von außen herein in dieselben einzuschieben. Gewöhnlich construirt man das Ziegelgewölbe in concentrischen Ringen von einer halben Ziegeldicke, indem man die Ziegel in lauter Läufern aneinanderlegt. Um aber den einzelnen Bogen einen stärkeren Zusammenhang mit einander zu geben, verbindet man je zwei solcher Ziegelbogen noch durch einige Binder. Zuweilen wendet man auch noch bei Ziegelgewölben Eisenbänder an, um einen festeren Verband zu erzielen.

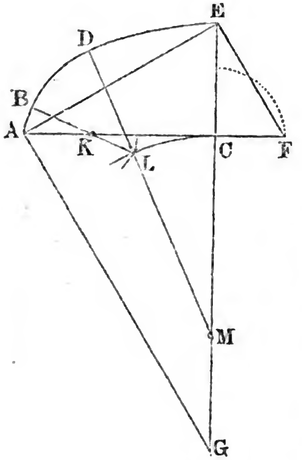
Während bei den gewöhnlichen Mauern der Mörtel zur Festigkeit derselben wesentlich beitragen soll, kommt es bei Gewölben nur darauf an, daß der Mörtel die Rauhigkeiten der Gewölbsteinflächen ausgleiche. Um die Gewölbsteine noch während des Baues zu unterstützen, ist ein sogenanntes **Lehrgerüste** in Anwendung zu bringen. Ein solches Gerüste besteht gewöhnlich aus **Lehr-** oder **Rüstbogen**, welche 4 bis 6 Fuß von einander abstehen, sowie den darauf liegenden **Schalhölzern**.

Die Lehrbogen sind außen nach der Form der Gewölblinien geformt, und die parallel zu der Erzeugungslinie des Gewölbes liegenden Schalhölzer bilden mit ihrer äußeren Begrenzung die ganze innere Gewölbfläche. Die Lehrgerüste sind entweder **stehende** oder **gesprengte**. Erstere haben den Vorzug einer größeren Starrheit, lassen sich aber nicht immer anwenden; letztere sind, damit sie dem Druck wenig nachgeben, sehr sorgfältig und stark zu construiren. Die äußere Form der Lehrbogen muß um die zu erwartende Senkung mit Einschluß der des Lehrgerüstes selbst, von der Endform der inneren Wölbfläche des Gewölbes abweichen. Bei stehenden Gerüsten ist die Senkung im Scheitel 0,005 $(s - h)$ und bei gesprengten, 0,01 bis 0,019 mal $(s - h)$ anzunehmen, wenn s die Spannweite und h die Spannhöhe bezeichnen. Die Aufführung des Gewölbes beginnt an beiden Widerlagern zugleich und soll auch zu beiden Seiten in derselben Zeit gleichviel fortschreiten. Ein Druck der Gewölbsteine auf das Gerüst erfolgt erst dann, wenn die Neigung der Lagerfugen den Reibungswinkel $\varrho = 30$ bis 40^0 erreicht. Bei der weiteren Aufführung des Gewölbes suchen die unteren Gewölbsteine nach außen auszugleiten, und sind deshalb wohl vorübergehend zu belasten. Hat man die beiden Gewölbhälften hinreichend hoch aufgeführt, so treibt man schließlich den gehörig zugerichteten Schlußstein in den Zwischenraum. Das Ausrüsten oder Abnehmen der Lehrgerüste soll nicht eher erfolgen, als bis die Uebermauerung des Gewölbes vollendet und der Mörtel hinreichend eingetrocknet ist; und in dem Falle,

wenn sich zwei Gewölbe gegen einen und denselben Pfeiler stützen, soll es auch nicht eher vorgenommen werden, als bis beide Gewölbe vollständig aufgeführt sind. Damit der Mörtel nicht hart werde, rüste man zwei bis drei Monate nach Vollendung des Gewölbes aus. Das Ausrüsten muß ganz allmälig erfolgen, und zwar durch Lösung von Keilen oder Schrauben, welche die einzelnen Lehrbogen oder die Schalhölzer unterstützen.

Die Gewölblinie ist entweder ein einfacher Kreis- oder ein aus mehreren Kreisbogen zusammengesetzter Korbbogen. Ein halber Korbbogen $ABDE$, Fig. 488, mit drei Mittelpunkten K, L, M wird dadurch bestimmt, daß man die Krümmungshalbmesser $AK = r_1$ und $EM = r_2$ in A und E aufträgt, und aus K mit $KL = CE - r_1$, sowie aus M mit $MC = ML$ Kreisbogen beschreibt: der Durchschnitt L dieser Bogen ist das Centrum, sowie $LB = LD$ der Radius des eingeschalteten Bogens. Um in A und E mit einer Ellipse gleiche Krümmungen zu erhalten, kann man $r_1 = AK = CF$ und $r_2 = ME = GC$ machen, nachdem man EF und AG rechtwinkelig auf AE gesetzt hat. Aus der Spannweite $s = 2\,CA$ und Spannhöhe $h = CE$ folgt in diesem Falle:

Fig. 488.



$$r_1 = \frac{2h^2}{s} \text{ und } r_2 = \frac{s^2}{4h}$$

(s. I, S. 171).

Die Höhe des Schlußsteines ist nach Rankine zu setzen:

für Kreisbogengewölbe: $e = 0{,}346 \sqrt{r}$, und

für gedrückte Korbbogengewölbe: $e = 0{,}412 \sqrt{r}$ Fuß,

wenn r den Krümmungshalbmesser am Scheitel der inneren Gewölblinie bezeichnet. Die auf Seite 475 angegebene Formel von Perronet giebt für weite Gewölbe zu große Werthe von e.

Von der Stabilität der Gewölbe wird §. 51, S. 475 u. s. w. gehandelt. Von der Stabilität der Widerlager und Widerlagspfeiler ist in §. 51, S. 479 die Rede.

Ueber die Größe des Erddruckes und die Stärke der Futtermauern handelt §. 50, S. 470 u. s. w.

Bei Ausführung der letzteren ist Folgendes zu beachten. Der Fuß der Futtermauern ist, um den Druck auf eine größere Fläche

zu vertheilen und den Mittelpunkt des Druckes dem Mittelpunkt der Lagerfläche so nahe wie möglich zu bringen, nach außen stufenförmig aufzumauern. Ebenso ist das Fundament treppenförmig anzulegen, wenn es aus abhängigen Felsen besteht. Die Lagerfugen sollen so viel wie möglich gegen die Richtung des zusammengesetzten Druckes rechtwinkelig stehen. Um der Mauer die nöthige Festigkeit zu geben, soll man starke, die ganze Dicke derselben einnehmende Binder in Anwendung bringen. Auch soll man den Rücken der Mauer rauh oder stufenförmig anlegen, damit die Erde hinter derselben nicht herabgleiten könne. Uebrigens darf die Hinterfüllungserde nicht eher eingeworfen werden, als bis die Mauer durch Festwerden des Mörtels die nöthige Festigkeit erlangt hat. Damit das Wasser, welches sich hinter der Futtermauer zusammenzieht, abfließt, führt man Abzüge durch die letztere, und leitet das Wasser in mit Steinen ausgefüllten Rinnen oder sogenannten Sickergräben nach diesen Abzügen. Das letztere ist besonders dann nöthig, wenn die Erde thonig ist oder überhaupt kein Wasser durchläßt. Auch führt man wohl in diesem Falle eine rohe trockene Zwischenmauer auf, welche das Wasser durchläßt. Bei Sand oder Kies genügen Ablässe oder Abzüchte in der Futtermauer. Uebrigens wird die Erde in 1 Fuß dicken Schichten hinter der Futtermauer aufgetragen und festgestampft. Die Mauerkrone muß mindestens 80 Zoll dick sein und mit breiten Steinen bedeckt werden.

Um die Stabilität der Futtermauern zu erhöhen, giebt man denselben eine Neigung gegen die Erdmasse oder versieht sie mit Strebepfeilern u. s. w. Die geneigten Lagerfugen, welche bei geneigten Futtermauern gewöhnlich vorkommen, müssen gegen das Eindringen des Wassers besonders geschützt werden.

Man wendet auch gewölbte Futtermauern an; setzt auch Futtermauern, zumal bei schlechtem Grunde, aus Strebepfeilern und Bogen zusammen.

§. 150. Holz- und Eisenconstructionen. Die Hauptstücke eines Zimmerwerkes sind:

1.) horizontal liegende Balken, Schwellen u. s. w.,
2.) senkrecht stehende Säulen, Stand- und Hängesäulen und
3.) gegen den Horizont geneigte Sparren.

Kleinere Constructionsstücke sind Bänder, Streben oder Spreizen und Arme, je nachdem sie eine Zug- oder eine Druckkraft, oder beide Kräfte zugleich auszuhalten haben, z. B. einer Biegung ausgesetzt sind.

Die Befestigung dieser Holzstücke unter einander erfolgt:

1.) durch Zusammenstoßen und Versetzen,
2.) durch das Zusammenblatten,
3.) durch Verkämmung,
4.) durch Verzapfung und
5.) durch Zusammenbolzen und Nageln, s. §. 80, S. 583.

Die letztere Verbindung wird mit einer der ersteren zugleich angewendet. Das Zusammenklammern dient meist nur zu vorübergehenden Befestigungen.

Um Hängesäulen zu verlängern, werden die Enden derselben entweder

1.) stumpf zusammengestoßen und durch aufgeschraubte Laschen zusammengehalten, oder

2.) über einander geblattet, oder

3.) über einander gekämmt,

überdies aber in beiden Fällen noch durch Schraubenbolzen fest verbunden. Die Kämme sind entweder schräge Kämme, oder Hakenkämme, oder Schwalbenschwanzkämme. Statt der Kämme kann man auch Dübel von Eisen oder hartem Holze einsetzen. Standsäulen und Streben werden durch stumpfes Zusammenstoßen ihrer Enden verlängert, sind aber überdies noch mit einem Axenzapfen zu versehen. Balken werden ebenso wie Hängesäulen verlängert, nur erfordern diese meist längere Verbindungsstellen. Bei Laschenverbindung ist die eine Lasche oben und die andere unten zu legen, beim Zusammenblatten und Zusammenkämmen dagegen hat man die Enden neben einander zu verbinden.

Die Verbindung der Holzstücke unter einem Winkel, gewöhnlich dem rechten, ist entweder eine Eck- oder eine T- oder eine Kreuzverbindung. Bei diesen Verbindungen kommt der einfache Stoß, sowie der Stoß mit Vorsatz, ferner das Zusammenblatten, das Zusammenkämmen, das Verzapfen, Verschlitzen, Zusammenzinken, Verschränken, Zusammennuthen u. s. w. in Anwendung, überdies aber noch das Zusammenkeilen und Zusammenschrauben. Um die Holzstücke nicht zu sehr zu schwächen, setzt man oft besondere Hülfsstücke ein, z. B. Schuhe, Eck-, Kopf- und Fußstücke oder Consolen von Eisen. Solche Hülfsstücke von Gußeisen sind, zumal wenn sie zur Verbindung von Eichenholzstücken dienen, durch einen Anstrich oder bloßes Theeren vor dem Rosten zu schützen (siehe S. 588).

Um die Tragfähigkeit der Balken oder Träger zu erhöhen oder deren Gewicht zu vermindern, wendet man folgende Hülfsmittel an:

1.) Man giebt dem Balken eine besondere Querschnittsform, macht diese z. B. mehr hoch als breit, ferner oben und unten breiter als in der Mitte (s. S. 492).

2.) Es erhält derselbe nach der Längenaxe die Form eines Körpers von gleichem Widerstande (s. S. 389 u. s. w.).

3.) Man setzt den Balken aus mehreren Stücken zusammen, legt z. B. zwei Balken über einander und verbindet dieselben durch Schraubenbolzen. Auch setzt man zur Erlangung einer größeren Festigkeit, Dübel ein oder verzahnt die Berührungsflächen. Die Dübelverbindung ist die bessere, nur ist dafür zu sorgen, daß in der Mitte des Trägers, wo die Bie-

gung am stärksten ausfällt, weder ein Dübel noch eine Schraube angebracht wird. Die Dübel sind doppelt so lang als dick zu machen, und die Dicke aller Dübel zusammen soll, nach Tredgold, $\frac{4}{3}$mal der ganzen Balkenhöhe betragen.

4.) Es werden mittels zwischengestellter Streben und Bänder zwei über einander gelegte Balken zu einem Ganzen, einem sogenannten Gitter- oder Fachwerksbalken, vereinigt (siehe S. 493 u. s. w).

5.) Es wird der Balken durch einfache Säulen, Stand- oder Hängesäulen unterstützt.

6.) Man unterstützt den Balken durch Streben, Hänge- und Sprengwerke (s. S. 484 u. s. w.).

7.) Man unterstützt ihn durch einen Bogen aus Holz, mittels Bogenhäng- und -sprengwerke. Zu dem Bogen verwendet man entweder Holz oder Gußeisen oder Eisenblech. Im ersteren Falle nimmt man hierzu entweder krumm gewachsenes Holz oder giebt dem gerade gewachsenen Holze die Bogenform mittels einer besonderen Vorrichtung, oder man setzt den Bogen aus einzelnen Stücken zusammen.

8.) Man hängt den Balken an Ketten oder Seilen auf, Ketten- und Seilhängewerke, z. B. bei den sogenannten Hängebrücken (s. S. 489 u. s. w.).

§. 151. Umfassungsmauern und Scheidewände eines Hauses. Freistehenden Mauern ist nach Rondelet die Dicke $e = \frac{h}{8}$ zu geben, wenn h die Mauerhöhe bezeichnet. Bei unbedeckten Umfassungsmauern soll man aber $e = \frac{l}{\sqrt{l^2 + h^2}} \cdot \frac{h}{8}$ setzen, wenn l die Länge derselben angiebt.

Ist eine solche Mauer cylindrisch, so macht man

$$e = \frac{d}{\sqrt{d^2 + 16h^2}} \cdot \frac{h}{8},$$

wenn der äußere Durchmesser derselben die Größe d hat.

Für die Umfassungsmauern eines einstöckigen Hauses von der Tiefe b, welches vom Dache keinen Seitenschub erhält, ist

$$e = \frac{b}{\sqrt{b^2 + h^2}} \cdot \frac{h}{12} \text{ zu setzen.}$$

Für Wohnhäuser mit einer Zimmertiefe ist nach Rondelet die Dicke der Frontmauer

$$e = \frac{2b + h}{48} + 1 \text{ Zoll},$$

und für solche mit zwei Zimmertiefen

$$e = \frac{b + h}{48} \text{ anzunehmen.}$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel kann man die Dicke für jedes Stockwerk besonders bestimmen. Die Höhe eines Stockwerkes 12 Fuß angenommen, folgt die Abnahme der Mauerdicke von einem Stockwerke zum anderen,

$$= \frac{h}{48} = {}^{12}/_{48} = {}^{1}/_{4} \text{ Fuß} = 3 \text{ Zoll.}$$

Die Stärke einer Zwischenmauer ist nach der Formel

$$e_1 = \frac{l_1 + h_1}{36} + n \text{ Zoll,}$$

wenn h_1 die Höhe dieser Mauer sowie l_1 die Länge des durch sie getheilten Raumes, und n die Anzahl der Etagen über dieser Mauer bezeichnen.

Gewöhnlich giebt man der Frontmauer in der obersten Etage $1^1/_4$ bis $1^1/_2$ Fuß Stärke und setzt bei jeder tiefer liegenden Etage $^1/_4$ bis $^1/_2$ Fuß zu. Die Frontmauer für ein dreistöckiges Haus kann z. B. hiernach erhalten in dem dritten Stockwerk 18 Zoll, im zweiten 21 Zoll, im ersten Stockwerk 24 Zoll, im Erdgeschoß 27 Zoll, im Keller 30 Zoll und im Fundament 33 bis 36 Zoll Dicke. Die Giebelmauern erhalten im Dache 12 bis 15 Zoll Dicke und im obersten Stockwerk, wie die Frontmauern, 18 Zoll u. s. w. Den Zwischen- und Scheidewänden giebt man oben $^1/_2$ bis 1 und unten 1 bis $1^1/_2$ Fuß Dicke.

Wenn die Frontmauern eines Gebäudes den Horizontalschub H eines Dachgespärres auszuhalten haben, so ist die Dicke derselben wie die eines Brückenpfeilers zu berechnen und zwar nach Ardant mittels der Formel

$$e = -\frac{G}{h\gamma} + \sqrt{\left(\frac{G}{h\gamma}\right)^2 + \frac{12H}{h\gamma} - \frac{e_1^2 h_1}{h}} \text{ Fuß,}$$

worin G das Gewicht des Gespärres, h die Höhe der Mauer bis zum Sparrenfuß gemessen, sowie h_1 und e_1 die Höhe und Dicke der Uebermauerung und γ das Gewicht eines Cubikfußes Mauermasse bezeichnen.

Fachwerke aus Holz und Steinen zusammengesetzt, werden nicht allein bei Scheidewänden steinerner Gebäude, sondern auch bei Umfassungswänden hölzerner Gebäude angewendet. Das Gerippe dieser Wände wird mittels Verzapfung aus Schwellen, Säulen und Streben zusammengesetzt, und die Zwischenräume werden entweder mittels Steinen oder Ziegeln oder Gypsplatten ausgesetzt, oder auch mittels Holzstücken und einer Bekleidung von Lehm, Mörtel oder Gyps ausgefüllt. Die gewöhnliche Dicke dieser Wände ist 6 bis 8 Zoll.

Bei den gewöhnlichen neueren Gebäuden nehmen im Grundriß die Mauern $^1/_8$ von der Fläche der von ihnen umschlossenen Räume ein; bei älteren Palästen steigert sich dieses Verhältniß auf $^1/_4$. Das Verhältniß zwischen der Länge und Höhe eines Gebäudes ist gewöhnlich 2 bis 3, äußersten Falles 10. Die gewöhnlichen Höhen eines Wohngebäudes sind fol-

gende: vierte Etage ist $7\frac{1}{2}$ bis 8 Fuß, dritte Etage 8 bis $9\frac{1}{2}$ zweite Etage $9\frac{1}{2}$ bis $11\frac{1}{2}$, erste Etage 10 bis 15, Halbgeschoß 7 bis 8, Erdgeschoß 10 bis 15, Keller 7 bis 9 Fuß. Die Thüren und Fenster sind $1\frac{1}{2}$- bis 2mal so hoch als breit. Nur bei Halbgeschossen sind die Fenster viel niedriger. Gewöhnliche einflügelige Zimmerthüren sind $3\frac{1}{3}$ bis $3\frac{1}{2}$, zweiflügelige $4\frac{1}{3}$ bis 5 Fuß breit. Hausthüren erhalten, je nach dem Zweck des Gebäudes, 4 bis 7 Fuß Breite. Die Breite der Fenster beträgt gewöhnlich $3\frac{1}{4}$ bis $3\frac{1}{2}$ Fuß, die Fensterbrüstung mißt $2\frac{1}{2}$ bis 3 Fuß, und die Höhe vom Fenster bis zur Decke, 1 bis $1\frac{1}{2}$ Fuß.

Gewöhnliche Treppen sind $4\frac{1}{2}$ bis 6 Fuß breit, Haupttreppen in öffentlichen Gebäuden aber $7\frac{1}{2}$ bis 10 Fuß, und Nebentreppen 3 bis $3\frac{1}{2}$ Fuß. Die Höhe a einer Stufe mißt 6 bis $7\frac{1}{2}$ Zoll, die Breite b derselben meist das Doppelte, folglich das Ansteigen $\frac{1}{2}$, und der Steigwinkel $\alpha = 26\frac{1}{2}^0$. Auch gilt die Regel $b + 2a = 25$ Zoll, wonach für $a = 0$, $b = 25$ Zoll, d. i. eine Schrittlänge, und für $b = 0$, $a = 12\frac{1}{2}$ Zoll, d. i. der Abstand der Sprossen einer Leiter folgt. Für $a = 7$ folgt hiernach $b = 11$, und $\alpha = 32\frac{1}{2}^0$. Jede Treppe soll auf je 6 bis 8 Fuß senkrechter Höhe, d. i. 10 bis 15 Stufen, einen quadratischen Absatz oder sogenannten Podest erhalten.

Der Flächenraum eines gewöhnlichen Zimmers ist 250 bis 300 Quadratfuß, der eines Vorzimmers 150 bis 200, der eines Kabinets 100 bis 150, dagegen der eines Saales mindestens 300 Quadratfuß. Für ein Speisezimmer ist eine Breite von wenigstens 12 Fuß nöthig, wovon die Tafel in der Mitte den dritten Theil einnimmt. Der Hof innerhalb eines Gebäudecomplexes muß mindestens 25 Fuß Seitenlänge haben, damit ein Wagen in demselben umgekehrt werden kann. Die Wanne eines Badezimmers nimmt 5 bis 6 Fuß Länge und $2\frac{1}{2}$ bis 3 Fuß Breite in Anspruch. Jeder Sitzplatz eines Zuschauers im Parterre eines Theaters oder anderen ähnlichen Raumes erfordert 20 Zoll Breite und 30 Zoll Tiefe, letztere von Bank zu Bank gerechnet. Das Ansteigen des Fußbodens soll auf diese Strecke 3 Zoll betragen.

In Getreidemagazinen wird das Getreide $1\frac{2}{3}$ bis $2\frac{1}{3}$ Fuß hoch so aufgeschüttet, daß nicht nur ein 3 Fuß breiter Raum bis zur Mauer, sondern auch ein 12 bis 16 Fuß breiter Raum in Abständen von circa 50 Fuß zum Umstechen des Getreides frei bleibt. Die Breite eines Getreidebodens ist 40 bis 60 Fuß, und die Höhe $9\frac{1}{2}$ Fuß.

Der Flächenraum, welchen ein Pferd im Stalle einnimmt, ist 8 bis 9 Fuß lang und 4 bis $5\frac{1}{2}$ Fuß breit, und der freie Raum hinter den Pferden soll $5\frac{1}{2}$ Fuß Breite haben. Die Höhe eines solchen Stalles soll 10 Fuß, und die der Stallthüren, bei 4 Fuß Breite, 7 bis 8 Fuß betragen. Ein Stück Rind im Stalle erfordert den Flächenraum von 8 Fuß

Länge und $4\frac{1}{3}$ bis $4\frac{4}{5}$ Fuß Breite. Der Gang hinter einer Reihe Rinder erhält $3\frac{1}{4}$ Fuß Breite und der ganze Stall $9\frac{1}{2}$ bis 10 Fuß Höhe. Für einen Schafstall rechnet man im Durchschnitt pr. Schaf 6 bis 7 Quadratfuß Bodenfläche. Die Tiefe eines Schafstalles ist 30 bis 40, und die Höhe desselben 9 bis 11 Fuß. Im Schweinestall nimmt ein Eber, sowie auch eine Zuchtsau 30 bis 40, dagegen ein Mastschwein nur 12 bis 16 Quadratfuß Fläche in Anspruch. Die Höhe des ganzen Schweinestalles ist $7\frac{1}{2}$ bis 8 Fuß, die der Abtheilungswände 4 bis 5 Fuß.

Die Getreidescheunen sind 40 bis 60 Fuß tief, höchstens 200 Fuß lang, und 20 bis 24 Fuß hoch, eine Tenne ist bei einfacher Bahn 10 bis 12 Fuß, bei doppelter 14 bis 16 Fuß, und ein ganzer Bansen zwischen zwei Tennen, 42 bis 48 Fuß breit. Die Scheunenthore sind doppelt anzulegen, und zwar mit 10 bis 12 Fuß Breite und 12 bis 14 Fuß Höhe. Ein Morgen Feld giebt 300 bis 600 Cubikfuß Stroh, Klee oder Heu, von je 7 Pfd. Gewicht.

§. 152. Gebälke und Bedachung eines Hauses. Die Hauptbalken zur Unterstützung des Fußbodens eines Gebäudes sind gewöhnlich 3 bis 4 Fuß von einander entfernt, und liegen mit den Enden 8 bis 10 Zoll tief in den Frontmauern auf. Man macht im Mittel die Breite b der Balken 0,8 ihrer Höhe a, und zwar bei Balken ohne Unterstützung, von der Länge

$l = 12$ Fuß, $b = 6$ Zoll, $h = 8$ Zoll,
$l = 16$ » $b = 7$ » $h = 9$ »
$l = 20$ » $b = 8$ » $h = 10$ »
$l = 24$ » $b = 9$ » $h = 11\frac{1}{4}$ »
$l = 28$ » $b = 10$ » $h = 12\frac{1}{2}$ »

Bei der angegebenen Entfernung der Balken besteht die Dielung aus $1\frac{1}{2}$ bis $1\frac{3}{4}$ Zoll dicken Bretern; bei Entfernungen von 5 bis 10 Fuß sind dagegen Pfosten von 2 bis 4 Zoll Stärke anzuwenden.

Sehr lange Balken sind durch Unterzüge, und letztere wieder nach Befinden, durch Säulen zu unterstützen.

Nach Tredgold kann man die Balkenhöhe

$$h = 2{,}25 \sqrt[3]{\frac{l^2}{b}} \text{ Zoll},$$

und die der Unterzüge, wenn ihre Entfernung höchstens 10 Fuß beträgt,

$$h_1 = 4{,}15 \sqrt[3]{\frac{l^2}{b}} \text{ Zoll}$$

setzen, wenn die Balkenlänge l in Fußen und dagegen die Breite b in Zollen gegeben ist.

In neueren Zeiten wendet man auch schmal geschnittene Holzbalken an, und rückt dieselben näher an einander. Mit großem Vortheil wendet man zur Unterstützung des Fußbodens

der Häuser auch häufig im Querschnitt Iförmig gewalzte Balken aus Eisen an. Man legt sie im Abstande $2^1/_2$ bis 3 Fuß von-, und verbindet sie durch Querstangen von Rundeisen mit einander. Die gewöhnliche Höhe dieser eisernen Balken ist $^1/_{30}$ bis $^1/_{35}$ der Länge und zwar 5 bis $6^1/_2$ Zoll, die Breite derselben läßt sich nach S. 375 u. s. w. berechnen. Der Fußboden, welcher über die Balken zu liegen kommt, besteht entweder aus Holzdielen oder aus Tafeln (Platten) von Holz, Stein oder Gyps, oder aus sogenanntem Estrich von Mörtel, Gyps, Lehm u. s. w. Das Getäfel kommt in der Regel auf eine mit einer Gypsschicht bedeckten und auf den Balken aufruhenden Verschalung zu liegen, welche natürlich bei dem Estrichboden ebenfalls nöthig ist. Die Decke besteht gewöhnlich aus einer Holzschale mit darauf aufgetragener Kalk- oder Gypsschicht. Die Bekleidung der Mauerwände erfolgt entweder durch Kalk, Mörtel oder durch Gyps. Um die Feuchtigkeit zurückzuhalten, verwendet man, namentlich zur Bekleidung der äußeren Wände, hierzu hydraulischen Kalkmörtel. Vor dem Auftragen einer solchen Bekleidung ist es nöthig, die Mauerfugen aufzukratzen, kleine Furchen in die Steine einzuhauen, alle Theile, welche nicht festsitzen, zu beseitigen, und endlich die ganze Mauerfläche mit Wasser abzuwaschen.

Die ebenen Dächer sind entweder Pult- oder Sattel- oder Walmdächer, und werden von den sogenannten Dachgespärren unterstützt, wovon jedes in der Hauptsache aus einem Dachbalken und zwei Sparren besteht. Größere Dachgespärre erhalten noch durch Dachstühle die nöthige Festigkeit. Die Sparrenweite der einzelnen Gespärre von einander ist gewöhnlich 4 Fuß, und nur bei Stroh- und Schindeldächern, 6 Fuß. Das Deckmaterial kommt entweder auf bloße Dachlatten oder auf eine Dachschalung zu liegen, und kann bestehen aus Ziegeln, Schiefer, Glas, Pappe, Schindeln, Kupfer-, Zink- oder Eisenblech, u. s. w. Die Dachziegel sind entweder Platt- oder Hohlziegel, haben $^1/_2$ bis $^3/_4$ Zoll Stärke, 12 bis 16 Zoll Länge, 6 bis 8 Zoll Breite und $2^3/_4$ bis $5^1/_4$ Pfd. Gewicht. Dieselben ruhen mittels ihrer Nasen auf Latten von $2^1/_2$ bis 3 Zoll Breite und $1^1/_2$ bis 3 Zoll Dicke, welche $5^1/_2$ bis $7^1/_2$ Zoll von einander abstehen. Hierbei greift jede Ziegelreihe um die Hälfte bis zwei Drittel ihrer Länge über die nächst tiefere Ziegelreihe über. Hierbei kann man rechnen, daß bei einem Doppeldach 1000 Ziegel, 500 Fuß Latten, 3 Schock Lattennägel und 12 Cubikfuß mit 3 Pfd. Kälberhaaren vermengtem Mörtel erfordern. Der Dachschiefer hat im Mittel $^1/_8$ Zoll Dicke, und wird in sehr verschiedenen Größen verwendet. In der Regel nagelt man ihn auf eine Holzverschalung so auf, daß eine Schicht um $^1/_2$ ihrer Länge über die andere weggreift. Zur Herstellung von 1 Quadratruthe Dach sind nöthig: 340 Stück quadratische Schiefertafeln von 12 Zoll Seitenlänge, 12 Schock Schiefernägel und je nachdem die Tafeln in söhligen oder

geneigten Reihen aufgenagelt werden, 346 Fuß Latten mit 5 Zoll Abstand oder 276 Fuß Latten mit $6\frac{1}{4}$ Zoll Abstand. Ferner erfordert 1 Quadratruthe Dach zum Decken mit englischem Schiefer, 370 Tafeln von 16 und 8 Zoll Länge und Breite, 15 Schock Nägel und in einem Falle, 260 Fuß Latten mit 7 Zoll Abstand, im andern 176 Fuß Latten mit $9\frac{4}{5}$ Zoll Abstand; oder auch 230 Tafeln von 20 und 10, oder 157 Tafeln von 24 Zoll und 12 Zoll Länge und Breite u. s. w.

Die Schindelbedachung besteht entweder aus Holz- oder aus Lehmschindeln. Eine Quadratruthe Dachfläche erfordert $7\frac{1}{2}$ Schock Schindeln bei einfacher Bedeckung und 16zölliger Lattung, dagegen $10\frac{1}{2}$ Schock Schindeln bei 11zölliger Lattung.

Die Bleitafeln zum Decken der Dächer sind $\frac{1}{16}$ bis $\frac{1}{10}$ Zoll dick, 10 bis 12 Fuß lang und 3 bis 6 Fuß breit. Eine Quadratruthe Dachfläche mit 1 Linie dicken Bleitafeln erfordert 840 Pfd. Blei und $1\frac{1}{4}$ Schock verzinnte Nägel. Das Kupferblech zu Dächern ist $\frac{1}{3}$ Linie dick, wiegt pr. Quadratfuß 1 Pfd. und wird in Tafeln von 3 bis 4 Fuß Länge und Breite verwendet. Eine Quadratruthe Dachfläche erfordert 158 Pfd. Blech und 6 Pfd. Nägel und Hafter. Das Schwarzblech, welches zur Bedachung dient, ist gewöhnlich $\frac{3}{8}$ Linie dick und wiegt pr. Quadratfuß 1,3 Pfd. Man verwendet glattes und wellenförmiges Schwarzblech. Eine Quadratruthe Dachfläche erfordert 60 ebene Blechtafeln von je 24 Zoll Länge und 18 Zoll Breite, sowie 60 Stück Hafter und 2 Schock Nägel. Die Schwarzblechdächer erfordern einen besonderen Anstrich. Die Zinkblechtafeln zur Dachdeckung sind 6 Fuß lang, $2\frac{3}{4}$ Fuß breit und $\frac{2}{5}$ Linie dick, und 1 Quadratfuß derselben wiegt 1,25 Pfd. Die Zinktafeln sind mit Zinknägeln zu befestigen und an der Seite zusammenzufalzen.

Drittes Kapitel.

Strassen und Eisenbahnen.

§. 153. Tracirung der Strassen, Auf- und Abträge für Strassen. Bei Auswahl der Trace einer Straße, welche zwei Punkte mit einander verbindet, ist darauf zu sehen, daß die Straße bei nicht sehr großem Kostenaufwand die kleinste Länge und die kleinsten Steigungen erhalte. Terrainverhältnisse sind aber Ursache, daß man sehr oft von der geraden Linie, welche die kürzeste Straßenlinie geben würde, abweicht. Die größte Steigung von Hauptstraßen ist $\alpha = 2\frac{1}{2}$ bis 3^0, d. i. $sin.\ \alpha = 6{,}0436$ bis $0{,}0523$; nur bei Nebenstraßen, Vicinalwegen u. s. w. ist das zulässige Ansteigen $\alpha = 5$ bis 6^0, also $sin.\ \alpha = 0{,}0872$ bis $0{,}1045$. Um das Einhemmen beim Abwärtsfahren nicht nöthig zu haben, also keinen Arbeitsaufwand durch dasselbe nöthig zu haben, soll $sin.\ \alpha$ höchstens $= \mu$ sein, wenn μ das Verhältniß $\frac{P}{M+G}$ der Kraft P zur Last $M+G$ auf horizontalem Wege bezeichnet (s. S. 662). Hiernach soll also das größte Ansteigen einer Straße um so kleiner sein, je kleiner μ, d. i. je vollkommener das Transportmittel ist; $\mu = sin.\ \alpha = 0{,}03$ entspricht $\alpha = 1^0{,}43'$, dagegen $\mu = sin.\ \alpha = 0{,}005$, z. B. für Eisenbahnen, $\alpha = 0^0{,}17\frac{1}{4}'$.

Meistens ist es vortheilhafter, Straßen in Thälern fortzuführen, als auf Gebirgsrücken. Beim Uebergang aus einem Thal in ein anderes, soll man den Uebergang in Bergsätteln bewerkstelligen, wobei nach Befinden, die Straße in Serpentinen zu führen ist. Flüsse sind an engen Thalstellen und möglichst rechtwinklig zu überschreiten. Nach getroffener Auswahl ist zur Aufnahme und zum Nivellement des Terrains, durch welches die Straße gehen soll, zu schreiten, vorher aber noch das Abstecken der der Straßenaxe entsprechenden Operationslinie, sowie das von Querprofilen in schicklichen Abständen vorzunehmen, wobei man sich mit Vortheil eines Winkelspiegels bedienen kann. Das Verfahren der Aufnahme stimmt übrigens ganz überein mit der Methode des Seite 290 u. s. w. beschriebenen Aufnehmens der

Berge u. s. w. Man erhält dadurch nicht nur einen Plan der Aufnahme, sondern auch die Projectionen der Verticalschnitte durch die Operationslinien und die Projectionen der verschiedenen Querprofile. Jetzt kommt es darauf an, statt der Brechpunkte, in welchen die Operationslinien zusammenstoßen, Kreisbogen oder sogenannte Curven zu interpoliren, und die Dammkrone sowie die Querschnitte der Oberfläche des künftigen Straßenkörpers einzutragen, welche in Vereinigung mit den Querprofilen des Terrains, die Querprofile des ganzen Straßenkörpers geben. Die Curvenhalbmesser sind natürlich nicht unnöthig klein zu machen, und müssen bei guten Straßen mindestens 100 Fuß, dagegen bei Eisenbahnen nicht unter 1000 Fuß betragen. Da wo, wie z. B. bei Serpentinen, starke Wendungen der Straße vorkommen, giebt man der Straßenkrone eine größere Breite, und ein möglichst kleines Ansteigen.

Die Straßenbogen lassen sich wie die Eisenbahncurven auf dem Terrain abstecken (s. S. 276 u. s. w.). Ebenso sind die Auf- und Abträge der Straßenkörper wie bei Eisenbahnen, und zwar wie S. 287 u. s. w. angegeben wird, zu berechnen. Es ist auch hier dahin zu trachten, daß die Abtragsmassen soviel wie möglich wieder bei den Aufträgen verwendet werden, und dabei auf mäßige Strecken zu transportiren sind. Die mittlere Transportweite einer Erdmasse ist die Entfernung der Schwerpunkte derselben Masse vor dem Abtragen und nach dem Auftragen. Um die Schwerpunkte solcher Masse aus den Abständen und den Inhalten der Querprofile zu bestimmen, hat man die auf S. 342 angegebenen Regeln der Mechanik in Anwendung zu bringen. Ist Q das Gewicht einer solchen Erdmasse, ferner s die horizontale und h die verticale Verrückung (das Aufsteigen) ihres Schwerpunktes, so läßt sich die Arbeit zum Fortschaffen derselben $A = Q(\mu s + h)$ setzen, wobei je nach der Art des Transportmittels $\mu = 0{,}01$ bis $0{,}20$ anzunehmen ist. Hierbei ist nicht außer Acht zu lassen, daß die Erde im Auftrag gegen 10 Proc. mehr Raum einnimmt als im Abtrag, und daß die Felsenstücke mindestens 50 bis 100 Proc. mehr Raum einnehmen als anstehender Felsen. Man kann annehmen, daß ein Arbeiter mit der Schaufel oder dem Spaten täglich 400 bis 450 Cubikfuß lockere Erde oder Sand abgräbt und in Schubkarren ladet. Ist die Erde durch den Pickel oder die Radhaue erst aufzulockern, z. B. bei Thonboden, so fällt das Arbeitsquantum viel kleiner aus; noch kleiner natürlich, wenn, wie bei zerklüftetem Gestein, Brechstangen, Keile und Schlägel zur Gewinnung der Masse nöthig sind. Hier trägt ein Arbeiter nach Befinden täglich nur 100 Cubikfuß ab. Festes Gestein ist natürlich durch Bohren und Schießen zu gewinnen. Man kann erwarten, daß durch 1 Pfd. Schießpulver 7000 bis 14000 Pfd. Gestein losgeschossen werden.

Man nimmt gewöhnlich an, daß die Arbeit zum Abtragen einer Erdmasse durch die Schaufel dieselbe ist, wie die zum Fort-

schaffen derselben in Karren auf 100 Fuß über einer horizontalen Pfoste. Hiernach ist bei der Bedeutung des Obigen, die Anzahl der Förderleute, welche auf einen Schaufler kommen, $n = \frac{s + 6h}{100}$. Beim Laden der Karren ist vorauszusetzen, daß jeder Schaufler die Erde 8 bis 10 Fuß horizontal oder 3 bis 4 Fuß vertical werfen könne. Uebrigens ist anzunehmen, daß zur Gewinnung von dichter Erde, ein Schaufler $\frac{1}{2}$, und zur Gewinnung von lehmiger Erde, $\frac{1}{2}$ bis 2 Aufhacker nöthig hat. Ein einräderiger Schiebkarren enthält ungefähr 1 Cubikfuß und ein Arbeiter legt täglich 100'000 Fuß Weg mit demselben zurück, fördert folglich in dieser Zeit $\frac{100000}{200} = 500$ Karren Erde 100 Fuß weit fort. Ein zweiräderiger Ziehkarren faßt ungefähr 6 Cubikfuß Erde, und wird von zwei bis drei Mann ebenfalls täglich 100000 Fuß fortgezogen. Der zweiräderige Wippkarren, welcher gewöhnlich von einem Pferde fortgezogen wird und täglich 120000 Fuß zurücklegt, faßt 20 bis 30 Cubikfuß Erdmasse. Bei einem Förderweg von 6000 Fuß Länge ist die Anzahl der täglich zu fördernden Karren $= \frac{120000}{6000} = 20$. Die Anzahl der nöthigen Karren für einen Schaufler beträgt hier

$$n = \frac{s + 150h}{6000}.$$

Die Förderung der gewonnenen Erdmassen in vierräderigen Kippwagen durch zwei Pferde oder eine Locomotive und auf einer sogenannten Dienstbahn ist besonders bei tiefen Einschnitten und großen Förderwegen vortheilhaft. Hier ist die Kraft zum Fortziehen eines ganzen Wagenzuges vom Gewicht Q, $P = (\frac{1}{150} \pm \sin.\alpha)\, Q$ zu setzen, und daher beim Abwärtsfördern = Null, wenn die Neigung $\sin.\alpha = \frac{1}{150}$, d. i. $\alpha = 0^0{,}23'$ beträgt. Der Förderweg beträgt hier nicht unter 3000 Fuß, und das Fördern erfolgt in zwei oder drei Wagenzügen, damit der eine gefüllt werden kann, während der andere in Bewegung ist. Ein Kippwagen faßt circa 60 Cubikfuß Erde von 100 Centner Gewicht und wiegt 35 Centner leer.

Um Erdmassen aus größeren Tiefen zu schaffen, ist es nöthig, einen Haspel in Anwendung zu bringen.

§. 154. Construction der Strassen. Die Breite der Fahrbahn einer Straße soll, damit ohne Gefahr zwei Wagen einander ausweichen können, 24 Fuß betragen; jedoch macht man Hauptstraßen, zumal in der Nähe von großen Städten, auch 30 bis 36 Fuß breit. Außerdem erhält jede Straße noch Fußwege oder Bankets von je 3 bis 8 Fuß Breite, und nach Befinden auch einen Sommerweg von 10 bis 12 Fuß Breite. Die Fahrbahn wird gewöhnlich entweder aus gebrochenen Steinen, sogenanntem Schotter, oder aus Pflaster-

steinen, seltener aus Concret oder Holz gebildet. Die Schotterstraßen werden aus circa 2 Zoll dicken Stücken von hartem Gestein, z. B. Granit, Porphyr, Kiesel, Basalt u. s. w., hergestellt. Die angefahrenen größeren Steinstücke läßt man mittels eines langgestielten Hammers an dem Orte der Verwendung so klein zerschlagen, daß die erhaltenen Steinstücke durch einen Ring von 2 Zoll Weite fallen können. Hat man es mit einem festen Grund zu thun, so legt man auf denselben ein dichtes Steinbett aus größeren Steinen von 6 bis 8 Zoll Höhe, und breitet dann das Schotter mittels Schaufel und Rechen in Schichten von 4 Zoll Dicke über dieses Bett aus. Diese Steinschichten fährt man durch sogenannte Straßenwalzen von 50 bis 60 Centner Gewicht zusammen, so daß dadurch eine compacte circa 10 Zoll dicke Steinmasse entsteht. Ist der Boden nicht ganz fest, so bedeckt man denselben durch ein Steinpflaster, und legt erst hierauf das Steinbett u. s. w.; hat man es mit einem weichen oder sumpfigen Boden zu thun, so muß man denselben entweder 2 bis 3 Fuß tief ausgraben, und den entstandenen Graben entweder mit Steinen ausfüllen oder ihn mit kreuzweise zu legenden Faschinen bedecken. Bei ganz festem Boden läßt man auch wohl das Bett aus größeren Steinen ganz weg, in welchem Falle aber das vorher angenäßte Schotter mittels einer Chausseewalze von 70 Centner Gewicht dicht zusammen zu drücken ist. Uebrigens begrenzt man die ganze Steinbahn zu beiden Seiten noch durch sogenannte Bord- oder Randsteine, welche mit der Spitze nach oben stehen sollen. Die Fußwege sind mit einer 4 Zoll dicken Schicht von fein zerschlagenen Steinen, feinem Kies und grobem Sand, vermengt mit etwas fetter Erde, zu bedecken und festzustampfen. Es ist zweckmäßig, den Fußpfad etwas höher zu legen, ihn nach der Fahrstraße zu wenig zu neigen, und zwischen beiden einen schmalen Graben anzubringen, aus welchem das Wasser mittels Röhren oder sogenannten Dohlen unter dem Fußpfad weg, in den Seitengraben geführt wird. Außerdem hat man den Fußpfad nach außen zu neigen. Um das Ansammeln des Regenwassers auf der Fahrbahn zu verhindern, muß man derselben, und zwar vorzüglich in der Querschnittsebene, eine schwache Wölbung oder Neigung nach beiden Seiten geben. Die Querprofile von nahe horizontal laufenden Straßen erhalten deshalb im Mittel $1/_{24}$ bis $1/_{36}$, von geneigten aber $1/_{36}$ bis $1/_{48}$ Neigung. Eine lange horizontale Bahnstrecke erhält dadurch kleine Wölbungen der Länge nach, daß man die Bahn abwechselnd $1/_{400}$ steigen und fallen läßt. Bei einer starken Straßenneigung ist es nöthig, von Distanz zu Distanz kleine Absätze oder Dämme quer durch die Straßenbahn zu führen und dadurch sogenannte Abschläge zu bilden. Damit ein solcher Absatz dem aufwärts fahrenden Fuhrwerk wenig Hinderniß in den Weg legt, erhält er abwärts eine wenig ansteigende Seitenfläche, dagegen aufwärts eine solche von $1/_{20}$ Neigung.

Gepflasterte Straßen werden vorzüglich bei schwerem Fuhrwerk sowie dann angewendet, wenn es an Material für Schotterstraßen mangelt, auch bringt man da Pflasterung in Anwendung, wo die Straße Mangel an Sonnenschein und Luftzug leidet, oder wo sie zuweilen Ueberschwemmungen ausgesetzt ist. Zur Pflasterung sind feste feinkörnige oder dichte Gesteine, z. B. Granit, Syenit, Basalt und Kieselsteine, in Stücken von circa 6 bis 10 Zoll Seitenlänge roh zugeschlagen, zu verwenden. Man legt das Steinpflaster entweder auf ein Kiesbett, oder auf ein Schotterbett, oder auf ein Bett von rohem Mauerwerk oder auch von hydraulischem Concret, und begrenzt es an jeder Seite durch eine Reihe von größeren Randsteinen. Das Kiesbett erhält eine Dicke von 4 bis 12 Zoll, und wird mit einer Handramme zwischen den Randsteinen festgestampft. Bei einem Pflaster aus Steinen von 9 Zoll Seitenlänge und einer Sandschicht von 5 Zoll Dicke rechnet man auf 1 Quadratfuß Pflasterung 0,42 Cubikfuß Sand für das Bett, 0,10 Cubikfuß zur Ausfüllung der Fugen, und 0,067 Cubikfuß zur Ueberdeckung des Pflasters, bevor die Fugen vollständig mit Sand ausgefüllt sind. Uebrigens wird dieses Pflaster vor der Sandbedeckung erst mit einer Handramme von 70 bis 90 Pfd. Gewicht festgestampft. Eine weit bessere Straße erhält man dadurch, daß man nach und nach 3 bis 4 Zoll dicke Schichten von Schotter aufwirft und jedesmal gehörig zusammenfährt, hierauf eine 3 Zoll dicke Sandschicht wirft, und in diese die an den Seiten mit hydraulischem Mörtel zu bestreichenden Pflastersteine bettet. Die Steine eines solchen Straßenpflasters sind am besten 9 bis 10 Zoll dick, in der Axenrichtung der Straße 4 bis 5 Zoll breit, und quer über die Straße 9 bis 12 Zoll lang, und in quer über die Straße weggehenden Reihen einzusetzen, jedoch so, daß zwischen zwei aneinander anstoßenden Reihen ein Fugenwechsel stattfindet. Uebrigens erhalten die gepflasterten Fahrstraßen ebenfalls eine Wölbung, und zwar von der Höhe $h = \frac{1}{60}$ der Straßenbreite b.

Die Fahrstraßen, insbesondere die Schotterstraßen, erfordern eine sorgfältige Beaufsichtigung und Instandhaltung; bei den Pflasterstraßen sind entweder einzelne Steine auszuwechseln, oder es ist ein ganzes Stück der Straße aufzureißen und zu erneuern; bei den Schotterstraßen ist die Straße von Staub oder Schlamm rechtzeitig zu säubern, durch Einwerfen oder Einstoßen von neuem Schotter der Entstehung von Löchern und Gleisen entgegenzuwirken, sowie nach Befinden ganze Straßenstrecken neu zu beschottern.

Asphaltpflaster ist, sowie Steinplattenpflaster, nur zu Fußpfaden geeignet (s. S. 793).

Zur vollständigen Entwässerung einer Straße gehören noch die Straßengräben, welche in der Regel an beiden Seiten der Straße hinlaufen. Diese Gräben sollen nicht bloß das Wasser, welches von der Oberfläche der Straßen abfließt,

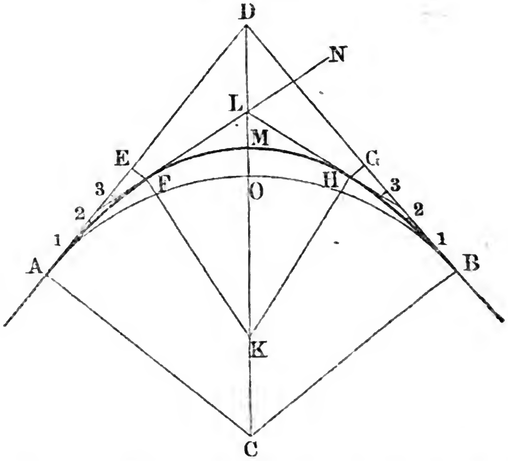
auffangen und weiterführen, sondern auch das Grund- und Quellwasser sowie das von den angrenzenden Gehängen zufließende Wasser vom Straßenkörper abhalten. Diese Gräben sind unten 2 bis 3 Fuß und oben 4 bis 6 Fuß breit, und nach einer Seite hin fallend anzulegen. Man bedeckt sie zuweilen, namentlich in Einschnitten, mit Steinplatten, oder ersetzt sie durch Thonröhren von 6 bis 12 Zoll Weite. Noch sind an denjenigen Stellen gemauerte Durchlässe oder Dohlen durch den Straßenkörper hindurchzuführen, wo die Straße eine Vertiefung oder eine Schlucht überschreitet, oder wo es nöthig ist, das Wasser von dem einen Seitengraben in den andern zu führen. Bei einer starken Neigung ist es zweckmäßig, sowohl die Sohle der Durchlässe als auch die der Seitengräben mittels Steinplatten treppenförmig anzulegen. Auch legt man in Einschnitten wohl noch besondere Fanggräben an, welche das Wasser an den Gehängen ableiten.

Die Böschung der Straßendämme ist $m = \frac{b}{a} = 1\frac{1}{2}$ bis 2, die der Einschnitte $m_1 = 2$ bis 3. Tiefere Einschnitte legt man stufenförmig an, um die Kraft des herabfließenden Wassers zu schwächen. Auch belegt man zu diesem Zwecke die Einschnittsflächen mit Steinen oder bedeckt sie mit einer trockenen Mauer. Bei schiefrigem Felsenboden, welcher leicht verwittert, haut man die Einschnittsflächen staffelförmig aus und bedeckt sie mit einer dichten Erdschicht. Ebenso haut man das steile natürliche Thalgehänge stufenförmig aus, wenn es darauf ankommt, einen Dammkörper an dasselbe anzuschütten. Wenn es endlich an Raum mangelt, wie z. B. in engen Thälern, so muß man Stützmauern an den Seitenflächen der Dämme und Einschnitte aufführen. Gewöhnliche Erdböschungen belegt man mit Rasen oder besäet man mit Gras- und Hafersamen. Um Unterwaschungen des Dammes vorzubeugen, legt man noch eine Weidenpflanzung an, oder wirft eine Steinschüttung, führt ein Steinpflaster u. s. w. auf.

§. 155. Eisenbahnen. Unterbau. Bei Ausmittelung einer Bahnlinie ist darauf zu achten, daß das Ansteigen einer Eisenbahn in Gebirgen höchstens $\frac{1}{40}$, im hügeligen Lande aber nur $\frac{1}{100}$ und im flachen Lande $\frac{1}{200}$ betragen darf. Ferner sollen auf Hauptbahnen die Curvenhalbmesser in Gebirgen mindestens 1000 Fuß, im Hügellande 2000 Fuß und in der Ebene 3500 Fuß messen. Nur in besonderen Fällen können dieselben bis auf 600 Fuß herabgehen. Zwischen zwei Gegencurven ist stets eine gerade Strecke zu legen, welche dem größten Zug an Länge gleichkommt. Die größeren Steigungen sind auf gerade Bahnstrecken zu legen. Ueber die Absteckung der Eisenbahncurven sind S. 276 die nöthigen Regeln mitgetheilt worden. Es ist aber zweckmäßig, von einer Geraden allmälig in eine Curve und ebenso von einer Curve nach und

nach in eine gerade Strecke überzugehen, und daher zwischen jeden Kreisbogen noch eine andere Curve mit allmälig abnehmendem Krümmungshalbmesser r einzuschalten. Hierzu eignet sich die elastische Linie (s. S. 376). Bezeichnet r_1 den kleinsten Krümmungshalbmesser $KF = KH$ eines solchen Bogens AF oder BH, Fig. 489, der elastischen Linie, und l die der

Fig. 489.



Abscisse $AE = BG$ gleichzusetzende Länge dieses Bogens, so ist der Krümmungswinkel α des Bogens, d. i. der Winkel, welchen die Tangenten AD und FL oder Krümmungshalbmesser CA und KF zwischen sich einschließen, durch die Formel

$$\alpha = 57^0{,}296 \frac{l}{2 r_1} = 28^0{,}648 \frac{l}{r_1}$$

und die Ordinate des Endpunktes F oder H durch den Ausdruck

$$EF = GH = a = \frac{l^2}{3 r_1}$$

bestimmt. Aus dem gegebenen Brechungswinkel $ACB = 2\,ACD = 2\beta$ der ursprünglichen Curve AOB, und dem Krümmungswinkel α folgt nun der neue Brechungswinkel

$$NLH = FKH = 2\,FKM = 2\,\beta_1 = 2(\beta - \alpha),$$

und hieraus wieder die Tangente

$$LF = LH = t_1 = r_1\, tang.\, \beta_1 = r_1\, tang.\, (\beta - \alpha).$$

Zum Abstecken der Curven ist noch die Kenntniß der Ordinaten der Zwischenpunkte nöthig. Setzt man in der Gleichung

$$y = \frac{l^2}{3 r_1} - \frac{(l - x)\, l}{2 r_1} + \frac{(l - x)^3}{6\, l\, r_1}$$ statt x; $\frac{l}{4}$, $\frac{2l}{4}$ und $\frac{3l}{4}$, so erhält man die Ordinaten der Fußpunkte 1, 2, 3:

$$y = \frac{11}{384} \frac{l^2}{r_1}, \frac{40}{384} \frac{l^2}{r_1} \text{ und } \frac{81}{384} \frac{l^2}{r_1}.$$

Der Anfangspunkt A wird von dem ursprünglichen Brechpunkte D aus mittels der durch die Formel

$$t = l + t\, cos.\, \alpha + (a + t_1\, sin.\, \alpha)\, tang.\, \beta$$

zu berechnenden Entfernung $DA = t$ bestimmt.

Ueber die Erdarbeiten bei Eisenbahnen, welche in der Regel weit größere Dimensionen annehmen, als die der gewöhnlichen Fahrstraßen, ist S. 287, sowie S. 810 u. s. w. nachzulesen. Die Querschnittsdimensionen der Eisenbahnkörper hängen vorzüglich von der Spurweite des Schienenweges ab. Derselbe ist vorschriftsmäßig 4 Fuß $8^1/_2$ Zoll $= 56^1/_2$ Zoll engl. $= 54^7/_8$ Zoll preuß. Der freie Raum zu beiden Seiten der Bahn soll mindestens 5 Fuß, und der zwischen zwei nebeneinander liegenden Bahnen 6 Fuß betragen; es ist hiernach die nöthige Kronenbreite für eine eingleisige Bahn $4{,}5 + 10 = 14{,}5$ Fuß und für eine zweigleisige $9 + 10 + 6 = 25$ Fuß, während sie gewöhnlich im ersten Fall 15, und im zweiten 24 Fuß preuß. angenommen wird. Die Böschung der Damm- und Einschnittsflächen ist $1^1/_2$ bis 2; sehr oft kommen aber auch Futtermauern und steinerne Bogen in Anwendung. Die Wasserabzugsgräben sind gewöhnlich 2 Fuß tief, unten 1 Fuß und oben 3 Fuß breit. Ueberhaupt ist der Eisenbahnkörper möglichst trocken und die Sohle des Abzugsgrabens unter die Frosttiefe des Dammkörpers zu legen. Geht eine Bahn durch Wälder, so muß auf jeder Seite derselben ein freier Raum von 50 bis 70 Fuß gelassen werden; ebenso ist es nöthig, die Bahn in einem gewissen Abstand an Häusern vorbeizuführen. Beim Kreuzen der Eisenbahn mit einer andern Straße kommen entweder Niveauübergänge oder Ueber- oder Unterbrückungen vor. Die ersteren sind möglichst selten und nur dann anzuwenden, wenn der Ausführung eines anderen Ueberganges große Schwierigkeiten entgegenstehen. Die Richtung des Weges soll beim Niveauübergang wenigstens 30 Grad von der der Eisenbahn abweichen, ferner ist hier in der Nähe der Bahn der Weg horizontal zu legen, und sind in mindestens 12 Fuß Abstand vom nächsten Bahngeleise leicht sichtbare Barrieren anzulegen, durch welche natürlich der Bahnwärter bei Annäherung eines Zuges den Weg von der Eisenbahn absperrt.

Auch hat man feststehende Barrieren zwischen der Bahn und einem daran hinlaufenden Fahr- oder Fußweg anzubringen. Ueberbrückungen sind so hoch anzulegen, daß der freie Raum über den Schienen mindestens $15^1/_4$ Fuß, und der zwischen den Pfeilern gleich der gewöhnlichen Kronenbreite des Bahnkörpers ist. Die Breite dieser Brücken ist, je nach dem Zweck derselben, 12 bis 24 Fuß. Bei einer Unterbrückung ist die Höhe der Durchfahrt 12 bis 15 Fuß, und die Weite derselben für Straßen 15 bis 20, und für Feld- und Vicinalwege, 9 bis 12 Fuß. Fußwege erfordern nur 8 bis 10 Fuß Höhe, bei 6 bis 8 Fuß Breite. Ueber- und Unterbrückungen sind sehr oft mit Wegverlegungen und Veränderungen in dem Wegniveau verbunden.

Hierbei wird entweder die Bedingung gemacht, daß auf einer Strecke von etwa 500 bis 1000 Fuß die mittlere Neigung des Weges unverändert bleibe, oder daß der Weg eine gewisse Maximalneigung, z. B. $sin. \alpha = 0{,}04$ für Haupt- und $sin. \alpha = 0{,}06$ für Nebenstraßen, nicht überschreite. Manche Wegverlegungen machen oft bedeutende Erdarbeiten nöthig.

Wenn die Höhe der Ueber- oder Unterbrückung nicht hinreichend groß ist, kann man sich mit beweglichen Brücken helfen, welche man aufzieht, wenn ein Wagenzug unter denselben durchfährt.

Am meisten Schwierigkeiten macht oft das Kreuzen von Canälen und Flüssen, da das Niveau derselben nicht verändert werden kann. Wenn eine Eisenbahn nahe über einen Canal weggeht, so kann man dieselbe mit einer Wippbrücke versehen.

Bei einer größeren Höhe der Bahn über dem Canal läßt sich natürlich eine gewöhnliche Brücke anwenden. Die Spannweite des Bogens muß natürlich mindestens der Breite des Canales sammt der des Leinpfades gleich sein; die innere Höhe desselben ist 12 Fuß zu machen. Der Uebergang einer Bahn unter einem Canal kann natürlich nur durch einen Einschnitt oder Tunnel erfolgen. Kommt das Niveau einer Eisenbahn hoch über die natürliche Bodenfläche zu liegen, so bringt man statt der Dämme steinerne Bögen an, welche dann einen sogenannten Viaduct bilden, der insbesondere dann noch eine Brücke genannt wird, wenn er ein fließendes Wasser überspannt. Um tiefe Einschnitte zu vermeiden oder bedeutende Umwege zu ersparen, führt man an manchen Stellen die Eisenbahn durch sogenannte Tunnel unterirdisch fort. Man führt die Tunnel in der Regel gerade und macht sie bei einer eingleisigen Bahn, 20 Fuß hoch und 15 Fuß weit, dagegen bei einer doppelgleisigen, 24 Fuß hoch und 24 bis 30 Fuß weit. In unzerklüftetem festen Gesteine, welches auch den Einwirkungen der Luft und des Wassers widersteht, bleibt der ausgeschossene Tunnelraum freistehen, ist aber das Gestein zerklüftet oder blätterig, weich u. s. w., so muß man diesen Raum durch ein Stein- oder Ziegelgewölbe von $1\frac{1}{2}$ bis $2\frac{1}{2}$ Fuß Stärke bekleiden. Dieses Gewölbe sowie auch der unausgemauerte Tunnel, bildet eine Hufeisenform, und steht mit seinen Füßen entweder auf Felsengrund oder auf den Enden eines nach unten gewölbten Bogens, wobei natürlich der Verticaldruck des Gewölbes auf die ganze Sohle des Tunnels vertheilt wird.

Der Angriff eines Tunnelbaues beginnt an den Mündungen desselben, wo sich der Tunnel an den Einschnitten anschließt; ist die Tunnellänge bedeutend, so erfolgt derselbe auch noch von Zwischenpunkten und zwar von Schächten oder sogenannten Lichtlöchern aus, welche man zu diesem Zwecke in der Geraden zwischen beiden Mundlöchern senkrecht niederbringt. Die Entfernung dieser Lichtlöcher von einander ist so

auszuwählen, daß die sämmtlichen Tunnelarbeiten mit den Arbeiten an der Bahn gleichzeitig zu Ende kommen können. Zwei Lothe, welche man in der Richtung des Tunnels in jedem Lichtloche herabhängt, geben dem circa 3 bis 4 Fuß weiten und 5 bis 7 Fuß hohen Richtstollen, mit welchem der unterirdische Betrieb beginnt, die nöthige Richtung an.

Die Ausmauerung eines Tunnels in einem Gestein, welches auf längere Zeit und in größeren Räumen nicht feststeht, beginnt man entweder mit Aufmauerung der Widerlager oder mit Aufführung des Gewölbscheitels. Im ersteren Falle ist es nöthig, auf der Tunnelsohle zuerst zwei Strecken zu treiben, in welchen sich die Widerlager aufführen lassen, im zweiten Falle muß man dagegen mit einer Strecke an der Tunnelförste vorausgehen, um den Raum für den Gewölbscheitel zu gewinnen. Bei Tunneln in losem oder weichem Boden, zumal in schwimmenden Gebirgen, muß man der Mauerung mit Zimmerung in sogenannten Getrieben vorausgehen.

§. 156. Eisenbahnen. Oberbau. Die Schienen einer Eisenbahn befestigt man in der Regel auf Querschwellen, seltener auf Längenschwellen, an manchen Orten auch auf Steinwürfel. Diese Stützen der Schienenbahn kommen auf ein mindestens 8 Zoll dickes Schotter- oder Kiesbett, womit die Dammkrone bedeckt wird, zu liegen. Die Steinstücke desselben müssen circa 2 Zoll dick und von der Beschaffenheit sein, daß sie der Näße und dem Frost Widerstand leisten. Um das Wasser abzuführen, sind in gewissen Abständen von einander, offene Steingraben unter der Bettung anzulegen. Auch hat man die letztere vor Auflegung der Schwellen festzurammen oder zusammenzufahren. Die Steinwürfel sind ungefähr 1 Fuß dick und 2 Fuß lang und breit; die Schwellen werden aus Holz gemacht, welches bei abwechselnder Näße und Trockenheit gut widersteht, z. B. aus Lärchenholz. Um sie dauerhafter zu machen, tränkt man sie mit Kreosot, Eisenvitriol u. s. w. (s. S. 710). Es soll das Holz zu den Schwellen Mitte März oder Mitte October geschlagen werden. Die gewöhnliche Länge der Bahnschwellen ist 7 bis 9 Fuß, die Breite 7 bis 10 Zoll, und die Höhe 5 bis 6 Zoll und sie liegen gewöhnlich im Abstand von 3 bis höchstens 4 Fuß von einander. Wegen Ersparniß bringt man auch Schwellen mit dreieckigen oder halbkreisförmigen Querschnitten in Anwendung, und legt jene mit der Kante, diese dagegen mit der ebenen Fläche nach unten in das Schotterbett.

Den Stoßschwellen, auf welchen je zwei Schienen desselben Stranges ruhen, sollen breiter sein als die Mittel- oder einfachen Tragschwellen. Dem Verrücken der Schwellen nach der Axenrichtung ist, zumal bei solchen in Bahncurven, durch Pfähle an den Enden der Schwellen zu begegnen. Auch sind in starken Curven die gegenüber stehenden Steinwürfel, welche unter den Schienenstößen liegen, fest mit einander zu verbinden. Endlich

ist der Raum zwischen den Schwellen mit Kies oder Schotter, sogenanntem Ballast, auszufüllen.

Die Eisenbahnschienen sind gewöhnlich 18 bis 20 Fuß lang und haben ein Gewicht von 20 bis 30 Pfd. pr. Fuß Länge. Die Querschnittsform derselben ist sehr verschieden, namentlich kommen Stuhlschienen, Vignol- oder Fußschienen und Hohl- oder Brückenschienen in Anwendung, doch haben, zumal in Deutschland, jetzt die Vignolschienen mit breiter Fußplatte allgemeine Anwendung gefunden. Bei den letzteren ist die gewöhnliche Höhe $4^1/_2$ bis $5^1/_2$ Zoll, die Kopfbreite $2^1/_4$ bis $2^1/_2$ Zoll und die Kopfdicke sowie die Dicke der Stehrippe, = 0,6 bis 0,8 Zoll; ferner ist die Breite der Fußplatte $3^1/_2$ bis 5 Zoll und die Dicke derselben, 0,4 bis 0,5 Zoll. Der Schienenkopf soll nach einem Halbmesser von 5 bis 7 Zoll abgerundet sein, und die ganze Schiene eine Neigung nach innen von $\sin. \alpha = {}^1/_{20}$, d. i. $\alpha = 3$ Grad erhalten.

In Curven soll nicht allein eine Erhöhung des äußeren und gleich große Senkung des inneren Schienenstranges, sondern auch eine Erweiterung des Bahngleises stattfinden. Bei Curven, welche über 3000 Fuß Halbmesser haben, fällt die Erweiterung des Spurmaaßes weg, und in Curven von 600 Fuß Halbmesser soll sie höchstens $1^1/_2$ Zoll betragen.

Die Eisenpackete, aus welchen man die Schienen walzt, sind aus verschiedenen Eisensorten zusammenzusetzen. Zu den inneren Stücken sind geringere, zu den äußeren vorzüglichere Eisensorten auszuwählen, namentlich zur Deckplatte, welche den Kopf der Schiene bilden soll. Die besseren Eisensorten Nr. 2, 3, 4 werden dadurch erhalten, daß man das Eisen wiederholt zu Stäben von 10 bis 15 Fuß Länge, 3 bis 5 Zoll Breite und $^3/_4$ bis 1 Zoll Dicke auswalzt, dann zerschneidet und in Packeten verwendet. Die gewöhnlichen Packete enthalten 12 bis 20 Eisenplatten in 7 bis 11 Schichten, sind 6 bis 7 Zoll breit, 9 bis 10 Zoll hoch und 4 bis 5 Fuß lang, so daß ihr Gewicht das der fertigen Schiene ungefähr um $^1/_4$ übertrifft. Es ist zweckmäßig, von den angelieferten Eisenbahnschienen einige vor ihrer Verwendung in Hinsicht auf Festigkeit zu prüfen (s. S. 734).

Der Niveauabstand zwischen beiden Strängen ist, wenn man nur die Centrifugalkraft in Betracht zieht, $a = \frac{c^2}{g\,r}\,b$, wo c die Fahrgeschwindigkeit, r den Curvenhalbmesser und b die Spurweite der Bahn bezeichnen.

Führt man $b = 54{,}87$ und $\frac{1}{g} = 0{,}032$ ein, so erhält man $a = 1{,}756\,\frac{c^2}{r}$ Zoll; z. B. für $c = 60$ Fuß, $a = \frac{6318}{r}$ Zoll, wonach für $r = 1000$ Fuß, $a = 6{,}32$ Zoll folgt. Nach den Annahmen deutscher Eisenbahntechniker ist für:

$r = 100$	300	600	900	1200	1500	1800 Meter
$a = 0{,}065$	0,050	0,035	0,022	0,016	0,010	0,005 Meter
$\triangle b = 0{,}030$	0,025	0,022	0,020	0,017	0,015	0,013 „

wo $\triangle b$ die Vergrößerung der Spurweite bezeichnet, welche auf geraden Strecken etwa $^3/_4$ Zoll größer sein soll als der Abstand der äußern (mit der Schiene in Berührung kommenden) Spurkranzflächen der Räder einer Are von einander.

Da nun diese Veränderungen des Gleises beim Eintritt in die und Austritt aus der Curve nur allmälig eintreten dürfen, so ist es zweckmäßig, hier nach der elastischen Linie gekrümmte Schienen einzuschalten (s. S. 816).

Die jährliche Abnutzung in der Höhe der Schienen ist erfahrungsmäßig 0,012 Zoll anzunehmen. Gußstahlschienen sind von ganz besonderer Dauer.

Wegen der Längenveränderung der Schienen beim Temperaturwechsel, welche pr. Grad 0,00001182 beträgt, soll man beim Legen derselben zwischen den Stößen einen durch ein eingeschobenes Blechstück normirten Zwischenraum frei lassen. Nimmt man die Schienenlänge 20 Fuß und die höchste Sommerwärme 40 Grad an, so hat man für folgende Temperaturen beim Schienenlegen,

$$\tau = -10^0; \quad 0^0; + 10^0; + 20^0; + 30^0;$$

die Dicke dieser Blechlehre

$$\delta = \quad 1{,}70; \quad 1{,}36; \quad 1{,}02; \quad 0{,}68; \quad 0{,}34 \text{ Linien.}$$

Die Schienen sind entweder durch Stühle, oder, wie in neuerer Zeit gewöhnlich, durch Hakennägel mit den Schwellen fest zu verbinden. Die Schienenstühle sind gußeisern und werden mittels schmiedeeiserner Nägel von $^1/_2$ bis $^3/_4$ Zoll Dicke und 5 bis 7 Zoll Länge auf den Schwellen oder den Steinwürfeln befestigt. Die Löcher zur Aufnahme dieser Nägel sind, namentlich bei den Steinwürfeln, vorher mit einem Holzdübel auszufüllen. Während ein Zwischenstuhl 20 bis 24 Pfd. wiegt, hat ein Stoßstuhl, welcher mehr Breite erhält, 30 bis 34 Pfd., und ein Stuhlnagel 0,6 Pfd. Gewicht. Die gewöhnliche Befestigung der Schienen im Stuhle erfolgt durch einen 8 Zoll langen, 2 Zoll hohen und $1^1/_2$ Zoll dicken Keil aus trockenem Eichenholz, welcher wohl noch vor seiner Verwendung durch den Druck einer hydraulischen Presse verdichtet wird. Die Hakennägel, womit man die Schienen statt der Stühle auf den Schwellen befestigt, kommen vorzüglich bei den Vignol- und Brückenschienen zur Anwendung; sie sind 6 Zoll lang, haben einen quadratischen Querschnitt von 0,5 Zoll Seitenlänge, eine Kopflänge von $1^1/_4$ Zoll und Kopfdicke von 0,8 Zoll. Die Verbindung der Schienen zu einem Strang erfolgt am besten durch

schmiedeeiserne Backenstücke oder sogenannte **Laschen**, mittels zwei Paar Schraubenbolzen. Diese Laschen sind 16 bis 20 Zoll lang, 2 bis $2\frac{1}{2}$ Zoll breit und $\frac{1}{2}$ Zoll dick, und erhalten vier längliche Löcher zur Aufnahme der $\frac{3}{4}$ Zoll dicken Bolzen. Es ist eine Regel, daß die Oberkante der Schienen am inneren Rande mindestens $1\frac{1}{2}$ Zoll über den Befestigungsmitteln, wie Stühle, Laschen u. s. w., liegen soll. Zur Vertheilung des Druckes der Schienen legt man dieselben auch wohl, namentlich wenn die Schwellen nicht aus Eichenholz bestehen, auf gewalzte Unterlagsplatten, und zwar entweder **ebene** oder an den Seiten **umgekrempelte**, welche letztere natürlich auch eine Seitenverrückung des Schienenstranges verhindern. Bei Unterstützung von Steinwürfeln legt man eine elastische Stütze von Holz, Filz, Pappe u. s. w. unter. Die Anwendung einer ununterbrochenen Unterstützung der Schienen durch Langschwellen in Verbindung mit Steinquadern oder Querschwellen bietet zwar manche Vortheile, dagegen aber auch so viele Mängel dar, daß im Allgemeinen wenigstens, einer Unterstützung durch Querschwellen der Vorzug zu geben sein möchte. Allerdings können die Schienen bei dem Langschwellensystem um $\frac{1}{5}$ leichter sein, als beim Querschwellensystem, wo man annimmt, daß der laufende Fuß Schiene ebensoviel Pfund wiegt, als die darauf fahrende Locomotive in Tonnen à 20 Centner.

Bei Ueberschreitung einer Fahrstraße im Niveau soll die Kopfläche der Schienen mit der Straßenbahn in einer Ebene liegen und nur eine Rippe für den Spurkranz von $1\frac{1}{2}$ Zoll Tiefe und $2\frac{5}{8}$ Zoll Breite frei bleiben. Sehr zweckmäßig ist hier die Anwendung von Doppelschienen, wodurch der Raum für den Spurkranz eine eiserne Umfassung erhält. Außerdem muß man diesen Raum mit besonders eingesetzten eisernen Platten ausfüttern.

§. 157. Bahnhofsanlagen. Bei Anlegung der **Stationen** ist darauf zu sehen, daß von ihnen aus die Bahn nach keiner Seite hin **steigt**, daß sie durch Fuhrwerke auf besonderen Straßen leicht zugänglich sind, leicht mit Wasser zum Speisen der Locomotive versorgt werden können und sich durch unterirdische Canäle vollkommen entwässern lassen; wogegen es nicht nöthig ist, daß die Bahn von der Station aus in gerader Linie fortgehe. Bei Abzweigungen einer Bahn ist ein gemeinschaftlicher Bahnhof nöthig; und bei Zwischenstationen müssen die in entgegengesetzten Richtungen gehenden Züge einander mit Sicherheit ausweichen können. Die **Perrons** erhalten $1\frac{1}{2}$ Fuß Höhe über den Schienenköpfen, 15 bis 20 Fuß Breite und 300 bis 400 Fuß Länge, und sind für doppelte Gleise auch doppelt anzulegen. Die Säulen, welche das Dach derselben tragen, sollen mindestens 5 Fuß vom nächsten Strang, und zwei Gleise, von Mitte zu Mitte gemessen, mindestens 12 Fuß von einander abstehen.

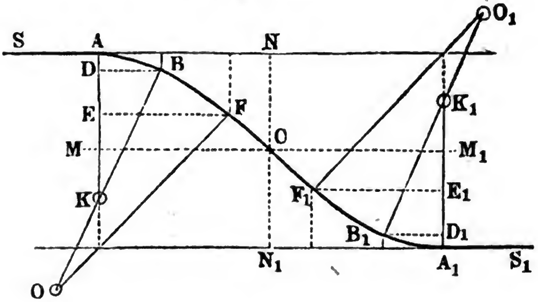
Zum Abzweigen einer Bahn sowie zum Einführen einer

Bahn in eine andere sind sogenannte **Weichen** mit drehbaren **Zungen** nöthig. Die letzteren sind 12 bis 16 Fuß lang und lassen sich mit Zugstangen und durch Hebelmechanismen um ihre senkrechten Axen drehen. Gewöhnlich sind diese Weichen **selbstwirkend** und zwar so eingerichtet, daß die Zungen mittels eines Gewichtes von selbst in die Stellung rücken, bei welcher der Zug das Hauptgeleise durchfährt, daß dagegen eine besondere Einstellung durch die Hand nöthig ist, wenn der Zug in das Seitengeleise übergehen soll, wogegen beim Einfahren in das Hauptgeleise die Zungen von den Spurkränzen der Wagenräder zurückgedrängt werden, aber nach dem Durchgange des Zuges wieder von selbst in die erste Stellung zurückgehen. Die Spitzen der Zungen müssen beim Einfahren ins Seitengeleise 4 Zoll weit aufschlagen und dürfen hierbei von der inneren Seite des Radkranzes nicht berührt werden. Eine sogenannte **Leit-** oder **Zwangschiene** dient dazu, die Spurkränze seitwärts zu schieben, und dadurch das Anstoßen an die Zungenspitzen zu verhindern. Die Spurweite kann in den Weichen um 1 Zoll vergrößert werden. Unter der Voraussetzung, daß der Abstand zwischen der Zungenspitze und dem Kreuzpunkte, wo beide Bahnen aus einander ganz heraustreten, 80 Fuß betragen soll, ist der Curvenhalbmesser der Seitenbahn 640 Fuß zu machen. Nur bei Seitenbahnen, welche zur Einführung einzelner Wagen und Locomotiven auf die Ladeplätze und in Reparaturwerkstätten dienen, genügt ein Curvenhalbmesser von 400 bis 500 Fuß.

Damit ein Zug einen vorausgehenden überholen könne, oder damit einander entgegenfahrende Züge, z. B. bei eingleisigen Bahnen, einander ausweichen können, sind sogenannte **Ausweichbahnen** nöthig.

Zwei parallele Bahnstrecken SA und A_1S_1, Fig. 490,

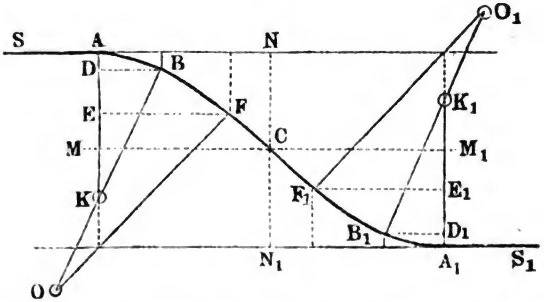
Fig. 490.



sind durch eine Curve ABF und Contrecurve $F_1B_1A_1$, sowie eine gerade Zwischenstrecke FCF_1 mit einander zu verbinden. Die letztere soll mindestens die Größe $2s = 12$ Fuß haben, und der Abstand zwischen beiden Bahnaxen soll wenigstens 11 Fuß messen.

Bezeichnet r den Halbmesser $KA = KB$ des ersten Bogenstückes und a die Höhe AD desselben, so hat man für den Centriwinkel $AKB = \beta$, $cos. \beta = \frac{r - a}{r}$, und die Ordi-

Fig. 491.



nate $BD = b = r\, sin. \beta$. Ist nun noch r_1 der Halbmesser $OB = OF$ des zweiten Bogenstückes BF, $2e$ der Axenabstand NN_1 der beiden Gleise von einander, und setzt man $r_1 \, cos. \beta + a - e = f$, so hat man für den Winkel $MCF = \beta_1$, welchen das gerade Zwischenstück FF_1 mit der Richtung der Bahnaxe einschließt,

$$cos. \beta_1 = \frac{f r_1 - \sqrt{(f r_1)^2 - (f^2 - s^2)(r^2 + s^2)}}{r^2 + s^2},$$

und hiernach die Coordinaten des Bogenendes F:

$$AE = a_1 = e - s\, sin. \beta_1 \text{ und}$$
$$EF = b_1 = r_1 \, sin. \beta_1 - (r_1 - r)\, sin. \beta.$$

Bei Schienenkreuzungen müssen natürlich die Schienen Ausschnitte für die Spurkränze erhalten, außerdem sind aber zur gehörigen Leitung der Räder noch besondere Zwangschienen nöthig.

Noch hat man auf den Bahnhöfen Schiebebühnen und Drehscheiben anzubringen; erstere sind Wagen mit 6 oder 8 Rädern, welche ein Stück Bahngeleise tragen, und in einer die Hauptbahn rechtwinkelig kreuzenden Seitenbahn fortbewegt werden und daher dazu dienen können, ein ganzes System von parallelen Bahnen mit einander in Verbindung zu setzen, sowie die Wagen, namentlich die Locomotive, in die Remisen u. s. w. ein- und aus denselben herauszufahren. Die Drehscheiben sind runde, mit einem Bahngeleise bedeckte Tische, welche sich um eine verticale Axe drehen lassen, und daher dazu angewendet werden können, ein System radial auslaufender Bahnen mit einander in Verbindung zu setzen. Uebrigens ist eine Drehscheibe noch von 8 bis 12 Rädern unterstützt, welche auf einer kreisrunden Schienenbahn ruhen, und beim Drehen mittels eines besonderen Kurbel- und Zahnradmechanismus auf derselben fortrollen. Eine

Drehscheibe für sechsräderige Wagen erhält 18, eine solche für Locomotive sammt Tender aber 37 Fuß Durchmesser. Man wendet die Drehscheiben vorzüglich auf den Ladeplätzen an, nächstdem auch zum Umwenden der Locomotive, sowie zur Verbindung von Bahngeleisen.

Noch gehören zu einer Eisenbahn Wasserstationen und Wasserkrahne, welche in 4 bis 6 Meilen Abständen von einander anzulegen sind. Der Wasserbehälter, aus welchem der Tender gefüllt wird, muß mindestens die Hälfte mehr Wasser fassen als der Tender, d. i. 300 Cubikfuß, und die Ausgußmündung soll $8^1/_4$ Fuß über der Schienenoberfläche liegen. Die Röhren, welche das Wasser aus dem Behälter nach dem Wasserkrahne führen, müssen mindestens 6 Zoll weit sein. Das Wasser für die Wasserstation ist sehr oft durch ein meist durch Dampfkraft in Bewegung zu setzendes Druckwerk in den Wasserbehälter desselben zu drücken. Sehr gewöhnlich wärmt man auch das Speisewasser der Locomotive im Wasserbehälter einer Station durch heißes Wasser oder Dampf vor.

Uebrigens gehören zu einem vollständigen Bahnhofe außer dem Haupt- oder Empfangsgebäude noch Verladungsplätze mit Rampen, Locomotiven-, Wagen- und Güterschuppen, Reparaturwerkstätte u. s. w.

Viertes Capitel.

Wasser- und Brückenbau.

---

§. 158. Brunnen und Röhrenleitungen. Die durch Regenwasser gemessene jährliche Regenmenge mißt im Mittel 20 bis 30 Zoll, im Allgemeinen mehr an hoch als an tief liegenden Orten. Nach Hagen verdunstet hiernach an der freien Oberfläche drei Viertel. Die nutzbare Regenmenge, welche in Bächen fortgeführt wird, beträgt im Mittel 0,3 bis 0,5 der gefallenen Regenmenge. Um das übrigens ganz reine Regenwasser benutzen zu können, wird es in Cisternen angesammelt. Das in den Erdboden eindringende Wasser fließt in unterirdischen Canälen abwärts und gelangt als Quelle an einer tieferen Stelle zum Ausfluß in freier Luft oder unter Wasser. Zum Auffangen dieses Wassers dienen die Brunnen, welche natürlich bis unter die wasserhaltende Erdschicht herabzuführen sind. Wenn das unterirdische Wasser zu Tage aus- oder nur wenige Fuß unter der Erde fortfließt, oder wenn die sogenannten Grundwasser, in welche sich die unterirdischen Wasseradern ergießen, nahe unter der Erdoberfläche stehen, so wendet man zum Auffangen derselben cylindrische Brunnenkessel an. Dieselben werden 4 bis 12 Fuß weit aus Bruchsteinen oder Ziegel mit Cementmörtel ausgeführt. Brunnenkästen aus Holzgerinnen sind weniger zweckmäßig, weil sie leicht faulen. Bei weichem Boden wird der Brunnenkessel über einem hölzernen Kranz aufgemauert, und nach Befinden, mit demselben durch Abgraben von unten, nach und nach herabgelassen (Senkbrunnen). Zum Emporführen von tief in der Erde fließendem Wasser dienen außer den sogenannten Wasserschächten und Wasserstollen besonders die sogenannten artesischen Brunnen, d. i. senkrecht in die Erde gebohrte cylindrische Canäle von 4 bis 12 Zoll Weite, welche nach Befinden noch mit einer Röhre von Holz oder Eisen auszufüttern sind. Je nachdem man es mit festen oder weichen Gebirgsarten zu thun hat, erfolgt das Abbohren mittels eines Meißelbohrers durch Aufschlagen, oder mittels eines Schaufelbohrers durch Druck und Drehung desselben. Der Bohrer

wird entweder an ein Gestänge geschraubt, oder an ein Seil gehangen. Das Bohrgestänge, welches gewöhnlich in Anwendung kommt, besteht aus schmiedeeisernen Stangen von 1 bis $1^3/_4$ Zoll Dicke und 10 bis 15 Fuß Länge, wird mittels eines Hebels 1 bis 3 Fuß hoch angehoben, und nach dem darauf erfolgten Aufschlagen mittels eines Querarmes um einen von der Festigkeit des Gesteins abhängigen Theil des Umfangs gedreht.

Trinkwasser sowie Wasser für häusliche Bedürfnisse, überhaupt kleine Wassermengen, führt man in Röhrenleitungen nach dem Punkte des Bedarfes. Hölzerne Leitungsröhren werden gewöhnlich aus gerade gewachsenem Nadelholz hergestellt, 12 bis 18 Fuß lang geschnitten, 1 bis 8 Zoll weit gebohrt und entweder durch conische Verzapfung oder eiserne Büchsen fest mit einander verbunden. Steinerne Röhren, namentlich solche aus Sandstein, sind gewöhnlich 4 bis 6 Fuß lang und werden entweder durch eine conische Verzapfung oder durch Wassermörtel und einen eisernen Muff mit einander verbunden. Thonröhren werden 1 bis 3 Fuß lang und 2 bis 36 Zoll weit hergestellt, sie vertragen keinen großen Druck und zumal keine Stöße. Sie werden deshalb auch meistens nur zum Drainiren verwendet. Es gehören hierher auch die Cementröhren. Gußeiserne Röhren werden aus weichem zähem Gußeisen mindestens $^3/_8$ Zoll Wandstärke 5 bis 10 Fuß lang, 1 bis 4 Fuß weit gegossen. Wegen ihrer Dicke s. S. 421. Die Verbindung dieser Röhren mit einander erfolgt durch Kränze, Schnauzen oder Muffe, mit Abdichtung von Blei, Eisenkitt, Holz u. s. w. Um diese Röhren vor Rost zu schützen, giebt man ihnen innen und außen einen Ueberzug von Pech, wobei zugleich die Reibung des Wassers in der Röhre vermindert wird. Schmiedeeiserne Röhren lassen sich von den verschiedensten Dimensionen aus Eisenblech zusammennieten, geben aber wegen der Nietköpfe größere hydraulische Hindernisse als Röhren aus dem Ganzen. Plötzliche Querschnitts- und Richtungsveränderungen sind in einer Röhrenleitung zu vermeiden. Die im letzteren Falle anzuwendenden Kropfröhren müssen nach einem Halbmesser gekrümmt sein, welcher die Röhrenweite mindestens viermal enthält. Um ferner das Ansammeln von Luft in der Röhre zu vermeiden, muß der Druck des Wassers an keiner Stelle unter den äußeren Luftdruck herabgehen. Eine aufwärts gehende Kröpfung der Röhre ist mit einem Luftständer oder Windstock zu versehen, durch welchen die sich hier ansammelnde Luft entfernen läßt. Dagegen sind an der tiefsten Stellung der Röhrenleitung Ausgußröhren oder Schlammkästen anzubringen. Uebrigens ist eine Röhrenleitung noch mit Hähnen, Schiebern oder Ventilen auszurüsten, um den Abfluß in derselben reguliren zu können. Man muß die Röhrenleitung 3 Fuß tief unter die Erde betten, um sie gegen Frost zu schützen. Außerdem ist es nothwendig, auf je 2000 Fuß Länge eine

Compensationsröhre einzuschalten. Freiliegende Röhrenstücke sind mit einem schlechten Wärmeleiter, z. B. Holz, Stroh u. s. w., einzuhüllen.

§. 159. Wasserleitungscanäle. Größere Wassermengen, zumal das Aufschlagwasser für Maschinen, sowie das Wasser zur Versorgung größerer Städte mit demselben u. s. w., werden in oben offenen Leitungen, sogenannten Leitungscanälen, fortgeführt. Sie werden gewöhnlich in die Erde ausgegraben, und heißen deshalb gewöhnlich Gräben; zuweilen erhalten sie ein aus Holz oder Eisen zusammengesetztes Bett und werden dann Gerinne genannt. Man nennt diese Leitungen Aquäducte, wenn sie mittels Brücken in größerer Höhe über der Erde, und dagegen Röschen, wenn sie in einem Tunnel unterirdisch fortgeführt werden. Da mit der Geschwindigkeit des Wassers in einer Wasserleitung auch das nöthige Gefälle derselben wächst, so sollte man zur Ersparniß an letzterem, das Wasser möglichst langsam im Graben fortführen. Die Beständigkeit und Stabilität des Grabenbettes erfordert jedoch, daß die mittlere Geschwindigkeit am Boden in demselben nicht unter 1 und nicht über 5 Fuß betrage.

Das relative Gefälle

$$\delta = \zeta \, \frac{p}{F} \, \frac{c^2}{2g} = \zeta \frac{m}{\sqrt{F}} \cdot \frac{c^2}{2g} = \zeta \, \frac{m\,Q^2}{2g\,F^{5/2}}$$

hängt natürlich von dem Querschnitte F des Grabens ab, und fällt um so kleiner aus, je größer F ist. Bei größeren Wasserleitungscanälen ist vielleicht $\delta = 0{,}00005$, und bei kleineren $\delta = 0{,}0005$. In der Regel hat man $\delta = 0{,}005$ bis $0{,}000025$. Da bei Röhrenleitungen der Querschnitt F meist kleiner ist, als bei Grabenleitungen, so fällt dort fast immer δ noch größer aus als hier. Plötzliche Richtungs- und Querschnittsveränderungen sind in einem Graben zu vermeiden, weil dadurch nicht allein Gefälle verloren, sondern auch das Bett angegriffen wird. Bei Krümmungen müssen große Krümmungshalbmesser und nach Befinden größere Querschnitte angewendet, sowie die concaven Ufer besonders verwahrt werden. Die gewöhnliche Querschnittsform eines Grabens ist ein Trapez, die eines Gerinnes aber ein Rechteck, s. S. 457, wobei die mittlere Tiefe $^1/_3$ bis $^2/_3$ der mittleren Weite beträgt. In Sand oder lockere Erde ausgehobene Gräben erhalten die Uferböschung $n = 2$, solche in fester Erde, $n = 1$, solche in trockener Mauer, $n = {}^1/_2$, und mit Mörtel aufgemauerte Gräben, $n = 0$ bis $^1/_8$. Zu beiden Seiten erhält der Graben einen 3 bis 5 Fuß breiten Saum, wovon der eine als Fußpfad herzustellen ist. Um den Graben wasserdicht zu machen, wird derselbe am Boden und an den Ufern 1 bis 2 Fuß dick mit Lehm oder Beton ausgerammt, und überdies an den letzteren noch mit einer $1^1/_2$ bis 2 Fuß dicken Mauer bekleidet. Besteht die Ausmauerung aus Ziegeln oder porösen Steinen, so überzieht man auch wohl die ganze

innere Fläche des Canales mit einem Cement. An Thalgehängen hin lassen sich die Gräben so führen, daß der Abtrag an derselben Stelle wieder als Auftrag benutzt werden kann.

Uebrigens ist es nothwendig, den Wasserleitungscanal von Zeit zu Zeit zu schlämmen, und zumal von den Wasserpflanzen zu reinigen. Auch ist es sehr zweckmäßig, den Canal zu bedecken, um im Winter der Eisbildung, und im Sommer der Verdunstung entgegenzuwirken, sowie Unreinigkeiten von demselben abzuhalten. Hölzerne Gerinne werden aus Holzgevieren und eingesetzten Pfosten ausgeführt; gußeiserne Gerinne setzt man aus Eisenplatten durch gewöhnliche Flantschen, und schmiedeeiserne Gerinne aus Eisenblech mittels Vernietung zusammen. Bei mäßigem Querschnitt ersetzt man letzteren auch durch Blechröhren, und legt dieselben wohl noch in eine mit Cement aufgeführte Ziegelmauerung.

Uebrigens sind noch an dem Wasserleitungscanal Schützen, Klappen, Abschläge oder Fluther sowie andere Regulirungs-Vorrichtungen anzubringen. Sehr zweckmäßig sind dann Vorrichtungen mit Selbststellung, z. B. Schützen mit Schwimmer u. s. w.

§. 160. Wehre. Die quer über ein fließendes Wasser wegführenden Dämme oder sogenannten Wehre sind, je nachdem sie ganze Bach- oder Flußbreite oder nur einen Theil derselben einnehmen, dichte oder lichte Wehre. Beide dienen zum Aufstauen des Wassers, und zwar, um entweder das Wasser zum Umtrieb einer Maschine oder zur Versorgung einer Stadt abzuleiten, oder um die Schiffbarkeit eines Flusses herzustellen. Die Wehre sind ferner feste oder bewegliche. Die dichten festen Wehre, welche vorzüglich zur Erfüllung des erstgenannten Zweckes dienen, sind entweder Durchlaß- oder Ueberfallwehre; letztere wieder entweder vollkommene oder unvollkommene, s. Seite 514. Die Lage der Ueberfallschwelle, von welcher die Stauung vorzüglich abhängt, wird durch einen eingerammten Aichpfahl oder neben dem Wehre angebrachten Pegel fixirt. Das Wasserquantum, welches ein Bach oder Fluß führt, ist zu verschiedenen Jahreszeiten sehr verschieden. Großwasser kommt nur auf kurze Zeit nach großen Regengüssen oder starkem Thauwetter vor, Mittelwasser ist mindestens die Hälfte des Jahres, vorzüglich im Frühjahr und Herbst, Kleinwasser nur auf kurze Zeit im Sommer vorhanden, Immerwasser ist endlich die kleinste, nur in sehr trocknen Jahren vorkommende Wassermenge. Es ist bei einer Maschinenanlage vorzüglich auf das Mittel- und Kleinwasser zu rechnen, und bei der Wehranlage darauf Rücksicht zu nehmen, daß das Großwasser von dem Wehre abgeführt werde, ohne eine Ueberschwemmung zu verursachen.

Damit das von dem Wehr herabfließende Wasser die Ufer nicht unterwasche, ist es nöthig, das Wehr an einer geraden

Flußstrecke anzulegen, oder wenigstens den abfallenden Wasserstrom gegen ein hartes Felsenufer zu leiten. Man führt zu diesem Zwecke auch das Wehr schräg gegen den Strom, oder zweiflügelig, mit der Spitze gegen den Strom, oder bogenförmig, mit der Convexität gegen den Strom auf. Man vergrößert dadurch auch die Breite des Ueberfalles, während die Aufstauung vor dem Wehre eine kleinere wird. Wenn ein solches Bogenwehr gegen starke Ufermauern gestützt wird, erhält es eine besondere Stabilität. Auch giebt man wohl der Wehrkappe eine Einbiegung nach unten, um die Abflußmenge in der Mitte größer zu machen als an den Seiten. Der Querschnitt eines Wehres hat die Form eines Fünfeckes mit einer horizontalen Basis, die Sohle, zwei verticalen Seitenflächen, die Brust und der Rücken, und zwei geneigten Seitenflächen, die Vor- und Abschußdecke. Letztere stoßen in der sogenannten Wehrkappe oder dem Wehrsattel zusammen, welcher entweder von einer abgerundeten Holzschwelle, die Wehrschwelle, oder bloß von einer abgerundeten Mauer gebildet wird. Bei den hölzernen Wehren legt man die Wehrschwelle entweder auf eine starke Spund- oder auf eine zwischen Pfählen liegende Balkenwand, und bekleidet Brust und Rücken ebenfalls durch Spundwände. Uebrigens wird das ganze Wehr über einem Rost von mit Steinen ausgefülltem Fachwerk ausgeführt, und noch mit Bohlen überdeckt. Den Abschußboden führt man gewöhnlich mit 1/4 Neigung ununterbrochen, zuweilen aber auch in Stufen, bis zum Flußbett herab; nur bei Felsengrund kann man das Wasser von dem Wehre auf das Sturzbett frei herabfallen lassen. Steinerne Wehre werden entweder über einem Pfahlrost mit Spundwänden, oder über einer eingerammten Betonmasse mittels gewöhnlicher Scheibenmauerung mit hydraulischem Mörtel ausgeführt, und mittels Gewölbmauerung bedeckt oder abgepflastert. Wenn das Sturzbett nicht felsig ist, so läßt man den Abschußboden in einer concaven Fläche auslaufen, setzt also den vom Wasser bespielten Theil des Querprofiles des Wehres aus einer convexen und einer concaven Curve zusammen.

Durch Schleusenwehre, bei welchen der Aufstau mittels Schützen bewirkt wird, kann man den Aufstau in weiteren Grenzen reguliren und nach Befinden ganz aufheben, so daß beim Eintritt von Hochwasser, der Austritt des Wassers aus seinem Bett, sowie auch das Ablagern von Sand und Steinen vor dem Wehre verhindert wird. Die Schützen sind 6 bis 15 Fuß breit, werden aus 2½ bis 4 Zoll dicken Bohlen zusammengesetzt, und kommen in die 3½ bis 4 Zoll tiefen Falzen der sogenannten Griessäulen zu liegen. Zum Aufziehen und Niederlassen dieser Schützen dient in der Regel eine auf dem sogenannten Griesholm gelagerte Holzwelle, an welche die Schütze entweder mittels Ketten oder mittels gezahnter Stangen angeschlossen ist, und welche entweder durch einen

Hebel oder durch eine Winde direct oder mittels eines Zahnradvorgeleges umgedreht werden kann. Zu den beweglichen Wehren gehört das Balkenwehr, welches aus lose über einander liegenden Balken oder Bohlen gebildet wird, ferner das Nadelwehr, welches aus aufrechtstehenden Pfosten besteht, die sich gegen zwei Balken stützen, wovon der obere in einem Falz beweglich ist. Andere beweglichen Wehre bestehen aus Thüren mit horizontaler Umdrehungsaxe, und lassen sich so einrichten, daß sie sich bei hohem Wasserstand von selbst öffnen, sowie bei tiefem von selbst verschließen.

§. 161. Teiche. Die Teiche haben den Zweck, das Fluthwasser von Bächen und Flüssen aufzufangen, um entweder Ueberschwemmungen zu verhindern, oder um das angesammelte Wasser zu einer andern Zeit in der Landwirthschaft und dem Gewerbe, zumal aber beim Maschinenbetrieb nützlich verwenden zu können. Der Fassungsraum eines Teiches hängt nicht allein von dem Wasserbedarf, sondern auch von der Größe des von der sogenannten Wasserscheide umschlossenen Sammelreviers ab. Jedenfalls kann ein Teich nur dann gefüllt werden, wenn sein Fassungsraum kleiner ist als die Fluthwassermenge des Sammelreviers. Bezeichnet F den Flächenraum des Sammelreviers und a die Höhe der Fluthwassermenge, welche allerdings an jedem Orte durch Beobachtungen besonders zu ermitteln ist, und annähernd ein Drittel von der nutzbaren, oder $1/9$ von der ganzen Regenmenge h eines Sammelreviers beträgt, so läßt sich der größte Fassungsraum eines Teiches $V = Fa$ annähernd $= 1/9\,Fh = 2/9\,F$ Cubikfuß setzen. Durch Anlegung von Gräben und Röschen kann man das Sammelrevier noch vergrößern. Uebrigens ist es bei einer Teichanlage um so vortheilhafter, je kleiner die Oberfläche und die Dammlänge derselben bei einem gewissen Fassungsraum ausfällt, je tiefer also auch ein Teich ist. Deshalb legt man die Teiche in tiefe und weite Thäler und die Dämme derselben an enge Stellen derselben. Das Sammelrevier eines Teiches wird allerdings um so größer, je tiefer derselbe im Thale liegt, aber das nutzbare Gefälle des aufgesammelten Wassers nimmt mit diesem Tieferliegen ab; wenn es demnach darauf ankommt, eine mit der Wassermenge und dem Gefälle wachsende Wasserkraft im Teiche anzusammeln, so ist es vortheilhafter, den Teich an einer mittleren Stelle im Thale anzulegen. Noch hat man bei Anlegung eines Teiches auf die Beschaffenheit des Teichgrundes Rücksicht zu nehmen, zerklüftete, ausgehöhlte, sowie Sand-, Sumpf- und Morastböden sind zu vermeiden, zumal beim Dammgrunde. Fester Thon- oder dichter Felsengrund ist der beste. Zuweilen kann man durch Ausrammen mit Lehm, oder mit sandigem Thon, oder mit Beton, undichte Stellen im Teichgrund wegbringen. Ueber Aufnahme und Volumenbestimmung eines Teiches s. Seite 290, sowie über die eines Teichdammes Seite 207. Man führt den Teichdamm in der Regel

aus Erde auf, seltener aus Stein oder gar aus Holz, versieht ihn aber noch mit einer Lehmbrust, und bekleidet diese noch mit einer Schutz- oder Terrassenmauer. Der ganze Dammkörper kommt in einen Grundgraben von 5 bis 20 Fuß Tiefe zu stehen, welcher entweder bis auf dichten Lehm- oder Felsengrund herabgehen oder eine Pfahlrostsohle erhalten muß, und nach Befinden, weit in die Gehänge hinein zu führen ist. Bei Herstellung des Dammes ist sowohl der Erdkörper als auch die Lehmbrust schichtenweise aufzutragen und festzustampfen, und das zufließende Wasser durch einen Graben oder eine Röhre abzuleiten. Die Dammkappe soll 3 Fuß über dem höchsten Wasserspiegel liegen und ist mindestens 10, und wenn ein Weg darüber hingeführt wird, 20 Fuß breit zu machen. Der Rücken und die Brust des Dammes erhalten gewöhnlich die Böschung $^3/_2$, oder den Böschungswinkel von 34 Grad. Die Stabilität der Teichdämme ist wie die der Futtermauern zu beurtheilen. Zum Ablassen des Wassers aus den Teichen dienen die Teichgerinne und die Fluther. Die Teichgerinne sind gewöhnlich eiserne Röhren, welche durch den Dammkörper hindurchgehen und an der Einmündung mit einem Zapfen, Schieber oder einer Klappe, dem sogenannten Striegel, versehen sind. Gewöhnlich sitzt der Striegel in einer langen Stange, der Striegelstange, fest, welche entweder innerhalb eines besonderen Thürchens senkrecht oder an der Brust des Teichdammes geneigt emporgeführt wird, und oben im Striegelhäuschen mittels eines Kurbel- und Schraubenmechanismus, nach Bedürfniß gehoben und gesenkt werden kann. Jeder Teich erhält mindestens zwei Gerinne, das gewöhnliche Abflußgerinne und das Schlämm- oder Fischgerinne. Das letztere mündet am tiefsten in den Teich ein, und wird nur geöffnet, wenn es darauf ankommt, den Teich zu fischen oder zu schlämmen. Das Abflußgerinne schließt sich an den Graben an, welcher das Wasser nach dem Punkte des Bedarfs führt, welcher, wie bei manchen Fabrik- oder Hüttenanlagen, entweder unmittelbar unter dem Teiche liegt, oder, wie zumal bei Wasserversorgungsteichen von Bergwerken und Städten, sich in größerer Entfernung vom Teiche befindet. Damit bei hohem Wasserstande das Gefälle vom Teichspiegel bis Teichgerinne nicht ganz verloren gehe, legt man noch ein oder mehrere Gerinne über das Hauptablaßgerinne, oder schließt an das Teichgerinne außen eine Steigröhre an, und schlägt bei gefülltem Teiche das Wasser durch die höhere Mündung oder das höher liegende Gerinne auf eine in der Nähe des Teiches befindliche Mühle oder andere Maschine.

Das Fluther oder Fluthbett ist ein 4 bis 5 Fuß tiefer, 15 bis 30 Fuß breiter Einschnitt in der Dammkappe, zum Ablassen des Fluthwassers aus dem bereits gefüllten Teiche. Man legt die Fluther nahe an den Gehängen an, giebt ihnen ein steinernes Bett und verschließt sie durch ein Balken- oder ein anderes leicht zu eröffnendes oder sich selbst regulirendes Wehr

§. 162. Ent- und Bewässerungsanlagen. Um eine sumpfige Landstrecke zu entwässern oder auszutrocknen, muß man entweder das Wasser derselben tiefer, oder den Boden derselben höher legen, oder eine künstliche Entwässerung durch Wasserhebungsmaschinen in Anwendung bringen. Die erste Art der Entwässerung ist zu bewirken durch Entwässerungscanäle, Entwässerungsstollen, ferner durch Abhalten des von außen zufließenden Wassers mittels Dämme u. s. w. und durch Tieferlegen und Rectificiren der durchströmenden und benachbarten Bäche und Flußstrecken. Zu den Entwässerungscanälen gehören auch die Sickergräben und Unterdrains, wodurch Felder und Wiesen von übermäßiger Wasseransammlung befreit werden. Statt der steinernen Sickergräben wendet man jetzt gewöhnlich irdene Röhren an. Diese Röhren sind bei $\frac{1}{2}$ Zoll Wanddicke, 1 bis 3 Fuß lang und $1\frac{1}{2}$ bis 12 Zoll weit, und werden durch irdene Muffe von 4 bis 6 Zoll Länge mit einander verbunden. Sie kommen in Gräben von 3 bis 5 Fuß Tiefe, je nach der Beschaffenheit des Bodens, in Entfernungen von 10 bis 25 Fuß von einander zu liegen, und erhalten ein Gefälle von 0,003 bis 0,010, wobei das Wasser in derselben mit einer Geschwindigkeit von mindestens 4 Fuß abfließen soll. Die verdeckten Straßenschleusen, Dohlen, Sielen, oder Abzugscanäle in Städten, welche zur Ableitung des verunreinigten Wassers dienen und durch Rinnen oder Röhren mit den Gossen oder Straßengräben in Verbindung stehen, werden mit einem großen Gefälle von 0,001 bis 0,020 angelegt und erhalten, damit sie begangen werden können, eine Höhe von 5 bis 6 Fuß, bei einer Weite von 2 bis 3 Fuß. Uebrigens stehen diese Schleusen noch durch Lichtlöcher mit der Straße in Verbindung. Es ist nothwendig, daß diese Schleusen das Wasser bei starken Regengüssen, dessen größte Höhe vielleicht stündlich 1 Zoll betragen kann, schnell ableite. Um diese Schleusen zu schlämmen, hat man Schützen oder Stauthore in denselben anzubringen, und diese schnell zu eröffnen, nachdem sich das Wasser vor denselben aufgestaut hat. In Seestädten kann man zu diesem Zwecke das Wasser zur Fluthzeit hinter diesen Thoren ansammeln, und diese in der Ebbezeit eröffnen.

Das Höherlegen des Sumpfbodens zum Zwecke der Entwässerung erfolgt entweder dadurch, daß man Erde von benachbarten Anhöhen in Karren oder Wagen hinschafft oder durch Bäche und Flüsse auf die zu erhöhende Bodenfläche hinschaffen läßt. Im letzteren Falle kommen entweder sogenannte Schlammwiesen, oder sogenannte Colmationen, oder Ablagerungen zur Anwendung, welche letztere sich von den ersteren dadurch unterscheiden, daß hier das zufließende Wasser durch eine Umdeichung des Bodens zum Absetzen der mit sich führenden Erde genöthigt wird.

Zu der Bewässerung einer Wiese oder eines Feldes eignet sich vorzüglich das Wasser der durch Felder und Ortschaften

fließenden Bäche, wogegen das Wasser aus Moor- und Torfboden der Vegetation nicht zuträglich ist. Die Bewässerung erfolgt entweder durch Ueberstauung oder durch Ueberrieselung; während im ersten Falle das ganze Feld wiederholt jedes Mal einige Tage lang unter Wasser gesetzt wird, läßt man im zweiten Falle das Wasser in einer dünnen Schicht über der Wiesenfläche wegfließen. Die Ueberrieselung erfolgt entweder durch den Hangbau, wo das Wasser in Gräben über eine einzige geneigte Wiesenfläche hingeführt wird, oder durch Rückenbau, wo die zu bewässernde Oberfläche in rückenförmige Beete getheilt, und das Wasser in einem Graben auf dem Rücken, und, nach Befinden, an den Gehängen derselben hingeführt wird. Die Wassermenge, welche die Berieselung einer Wiese erfordert, wird sehr verschieden angegeben. Jedenfalls ist dieselbe mindestens so groß, daß sie täglich eine 0,25 Zoll hohe Wasserschicht erfordert, wonach sie bei der Fläche F Quadratfuß, 0,0208 F Cubikfuß, oder pr. Morgen à $180 \,.\, 144 = 25920$ Quadratfuß, 539 Cubikfuß, d. i. per Stunde $22^{11}/_{24}$ Cubikfuß beträgt. Wenn Wasser hinreichend vorhanden ist, verwendet man aber viel größere Mengen zur Ueberrieselung; z. B. auf 1 Morgen pr. Sec. 1 Cubikfuß, wonach die Höhe der täglichen Wasserschicht nahe 1 Meter beträgt. Die Berieselungsabhänge erhalten 0,05 bis 0,08 Steigung. Die eigentlichen Bewässerungsgräbchen, welche das Wasser aus dem Vertheilungsgraben nehmen, sind nahe horizontal, 4 bis 5 Zoll tief und 8 bis 12 Zoll breit, und die Entwässerungsgräbchen beim Rückenbau, welche das Wasser in einen Hauptentwässerungsgraben führen, haben nahe dieselben Dimensionen.

§. 163. Städtische Wasserversorgung. Das Wasser, welches die Quellen und Flüsse liefern, ist selten ganz reines Wasser (HO, Aequivalentzahl $8 + 1 = 9$), sondern enthält außer Kohlensäure oft noch mehrere mineralische Unreinigkeiten. Das reinste Wasser kommt in der Regel aus dem Urgebirge, Granit, Gneiß. u. s. w.; es enthält nur atmosphärische Luft und Kohlensäure mechanisch eingeschlossen. Die gewöhnlichen Unreinigkeiten des Wassers sind Kalk- und Eisensalze; der doppeltkohlensaure Kalk insbesondere ist es, welcher die sogenannte Härte des Wassers verursacht. Um denselben aus dem Wasser zu entfernen, hat man nur Kalkwasser mit einer gleichen Menge Kalkerde hinzuzufügen, weil sich dann einfach-kohlensaurer Kalk bildet, welcher sich im Wasser vollständig niederschlägt. Die Härte des Wassers wächst mit der Menge seines Kalkgehaltes. Während das Regenwasser weich ist, fällt das Flußwasser meist schon hart und das Quellwasser noch härter aus. Das Wasser, welches durch stark bevölkerte und angebaute Landstriche führt, ist oft auch noch durch animalische Stoffe verunreinigt. Die Reinigung des Wassers von den in ihm schwebenden Theilchen wird durch Niederschlagen in großen Behältern, worin das Wasser längere Zeit, z. B. 1 Tag lang ruhig stehen

bleibt, bewerkstelligt; eine vollständigere Absonderung der mechanischen, und zum Theil auch der organischen Unreinigkeiten, wird aber durch das Filtriren erlangt. Hierbei sickert das unreine Wasser mit der kleinen Geschwindigkeit von $\frac{1}{2}$ bis 1 Fuß stündlich, durch Schichten von Steinen, Kies, Sand, Kohlen und Schwämmen hindurch und fließt zuletzt gereinigt ab. Da sich die Unreinigkeiten des Wassers in den feinen Zwischenräumen des Filters nach und nach anhäufen, so ist von Zeit zu Zeit eine Reinigung desselben nöthig, welche sich wohl dadurch bewirken läßt, daß man das Wasser eine kurze Zeit lang in umgekehrter Richtung durch das Filter führt, wobei es unter einem stärkeren Drucke nach und nach aus der Schicht mit feinem Sande in die mit gröberen Kies- oder Gesteinstücken strömt. Beim Filtriren in Gefäßen sind die verschiedenen Filterschichten durch durchlöcherte Eisenplatten von einander getrennt, und wird der nöthige Druck durch eine nach Befinden 100 Fuß hohe Wassersäule erzeugt.

Man kann annehmen, daß ein Mensch zu seinem eigenen Bedarf täglich $1\frac{2}{3}$ Cubikfuß Wasser nöthig hat, und zwar $\frac{2}{3}$ Cubikfuß zum Trinken und Kochen, und 1 Cubikfuß zum Waschen. Dieses Wasserquantum ist jedoch in Städten, um den Bedarf der Gewerbe, sowie zum Straßenreinigen u. s. w. zu decken, zwei- bis dreimal so groß. Dieser hiernach zu ermessende Wasserbedarf größerer Städte kann meist nur zum kleinsten Theil durch Brunnen geliefert werden; es ist dazu nöthig, entweder das Wasser aus hierzu besonders construirten Teichen oder mittels besonderer Wehren aus benachbarten Bächen oder Flüssen zu entnehmen. Wenn sich ein solcher Fassungspunkt nahe an der Stadt befindet, so liegt er in der Regel nicht hoch genug, um das Wasser von demselben unmittelbar in die städtischen Wasserreservoirs, in die höheren Stockwerke der Gebäude u. s. w. leiten zu können; man hat vielmehr noch besondere Druck- oder Pumpenwerke nöthig, welche das Wasser auf eine solche Höhe drücken, daß es selbst über die Dächer der Häuser zu fließen und insbesondere bei Feuersbrünsten, seine nützlichen Dienste leisten kann. Diese Pumpen werden in der Regel durch starke Dampfmaschinen von je 200 Pferdekräften in Bewegung gesetzt, welche das Wasser durch Niederdruckpumpen auf die Filterbassins schaffen, und von da durch Hochdruckpumpen in das Speisereservoir drücken. Die Filterbassins werden über einer Betonschicht von $\frac{1}{2}$ Fuß Dicke und etwa $90 \cdot 360 = 32400$ Quadratfuß Grundfläche, durch Mauerwerk in Cement 6 bis 10 Fuß hoch aufgeführt und mit einer Filtrirschicht von 3 bis 7 Fuß Höhe ausgefüllt. Letztere besteht aus Sand- und Kieslagen, deren Korn von oben nach unten zu allmälig größer wird. Das stetig zufließende Wasser bedeckt die Filtrirschicht 2 Fuß hoch, sickert nach und nach durch dieselbe hindurch und gelangt unten durch Löcher in einen aufgemauerten Canal, welcher der Länge nach durch das Bassin hindurch läuft und sich an ein eisernes Rohr anschließt,

wodurch das gereinigte Wasser in das Reinwasserbassin gelangt. Von der Filtrirschicht ist nur die obere feine Sandlage von Zeit zu Zeit und zwar durch Ueberrieselung mit reinem Wasser, zu reinigen.

Um die Stöße, welche das Wasser durch die absetzende Bewegung des Pumpenwerks erhält, unschädlich zu machen und eine nahe gleichförmige Bewegung des Wassers in den Röhren zu erlangen, bringt man noch Windkessel und Druck- oder Standröhren in Anwendung. Der Fassungsraum eines Windkessels ist 50mal so groß zu machen, als der eines Pumpencylinders. Es ist eine kleine Luftpumpe anzubringen, welche den Verlust der Luft durch Absorption u. s. w. wieder ersetzt. Die Standröhre ist entweder einfach oder doppelt; im letzteren Falle steigt das Wasser in der einen Röhre empor und in der zweiten nieder; wogegen die Wassersäule in der einfachen Standröhre nur kleine Schwankungen macht. Statt der letzteren bringt man auch wohl einen sogenannten Accumulator (s. Seite 542) an. Da der Wasserverbrauch zu verschiedenen Stunden des Tages sehr verschieden ist, der größte stündliche Bedarf ungefähr das Doppelte von dem mittleren stündlichen mißt, so ist die Anwendung von Sammel- oder Vertheilungsbehältern von großem Vortheil. Ein solches Reservoir muß wenigstens die Hälfte der Wassermenge fassen, welche in einem Tage verbraucht wird; gewöhnlich macht man aber den Inhalt desselben gleich dieser täglichen Wassermenge. Natürlich muß dasselbe noch über dem höchsten Punkt der Stadt liegen, welcher mit Wasser zu versorgen ist. Man mauert diese Behälter aus Steinen oder Ziegeln auf, stellt sie auch wohl aus Eisenplatten her, und versieht sie entweder mit einem einfachen Dache oder mit einer bedachten Ueberwölbung, um das Wasser in demselben gegen Wärme und Kälte, gegen Staub, Ruß u. s. w. zu schützen. Von dem Vertheilungsbehälter wird das Wasser durch Hauptröhren nach den Hauptpunkten der Stadt und von da durch Vertheilungsröhren in einzelne Straßen geleitet. Die Weite dieser Röhren ist für den größten stündlichen Bedarf nach der Formel

$$d = \sqrt[5]{\frac{(1+\zeta_0)\,d+\zeta l}{2gh}\left(\frac{4Q}{\pi}\right)^2} = 0{,}482\sqrt[5]{(1{,}5\,d+\zeta l)\frac{Q^2}{h}}$$

Fuß zu berechnen, in welcher l die Länge, h die Druckhöhe, Q die Wassermenge pr. Sec. und ζ den Reibungscoefficienten (s. S. 440) bezeichnen. Man ersieht hiernach, daß bei gleicher Lange und bei gleichem Gefälle, die Weiten der Zweigröhren wie die Quadrate der fünften Wurzeln der Wassermengen wachsen sollen. Die Druckhöhe für eine Hauptröhre mit einer Reihe von gleichen Zweigröhren, welche in gleichen Abständen von einander liegen, ist nur ein Drittel von der Druckhöhe, welche nöthig wäre, um das ganze Wasserquantum am Ende der Hauptröhre abzulassen. Es ist zweckmäßig, die Vertheilungsröhren an den beiden Enden mit den Hauptröhren zu verbinden. Die stetige

Speisung ist einer intermittirenden, wo das Wasser nur zur gewissen Zeit durch die Röhren fließt, und in besondern Speisebehältern aufgefangen wird, vorzuziehen. An den Vertheilungspunkten sind besondere Bassins oder Brunnen herzustellen. Das Wasser fließt aus den Vertheilungsröhren entweder durch Standröhren oder Brunnen auf der Straße, oder durch enge Zweigröhren von Blei oder Gußeisen in den Wohngebäuden ab. Die Ausmündungen dieser Röhren sind mit Hähnen oder Ventilen zu versehen, deren Eröffnung durch einen Schwimmer regulirt werden kann. Man stellt das Ausgußrohr der Straßenbrunnen über die gepflasterten Straßenrinnen und versieht es noch mit einem Schraubengewinde, um Schläuche anschrauben zu können, wodurch sich das Wasser weiter fortführen, in die Feuerspritzen leiten läßt u. s. w. Auch erhalten die unter dem Straßenpflaster hinlaufenden Vertheilungsröhren besondere, mit Hähnen zu verschließende Ansatzröhren, an welche sich ebenfalls Schläuche anschrauben lassen. Endlich sind auch noch Ventile oder Spünde in den Röhren anzubringen, welche eröffnet werden, wenn es darauf ankommt, die Röhren zu schlämmen.

§. 164. Schifffahrtscanäle und Schleusen. Die Schifffahrtscanäle sind entweder Seitencanäle oder Verbindungscanäle; im ersten Falle ersetzen sie eine unschiffbare Flußstrecke, im zweiten Falle dienen sie zur Verbindung zweier Flüsse, und überschreiten daher die Wasserscheide zwischen beiden. Diese Canäle bestehen aus söhligen Strecken mit zwischenliegenden, durch Schleusenkammern gebildeten Absätzen. Die Querschnittsdimensionen der Schifffahrtscanäle sind folgende: Kleinste Breite am Boden = 2mal größte Schiffsbreite (wegen des Ausweichens zweier Boote) und zwar 12 bis 50 Fuß, kleinste Tiefe des Wassers = größter Tiefgang des Schiffes + 1,5 Fuß, und zwar 4 bis 20 Fuß, kleinste Querschnittsfläche = 6mal Inhalt des Hauptschiffquerschnittes. Die Seiten des Canales erhalten gewöhnlich die Böschung $cotg. \theta = {}^3/_2$, oder $\theta^0 = 33^0,42'$. Der Leinpfad liegt gewöhnlich $1^1/_2$ bis 3 Fuß über dem Wasserspiegel und ist 10 bis 12 Fuß breit, während die gegenüberliegende Dammfläche nur 4 Fuß Breite hat. Die Kraft zum Transport auf Schifffahrtscanälen ist bei mäßiger Fahrgeschwindigkeit viel kleiner als auf Eisenbahnen. Während bei kleiner Fahrgeschwindigkeit die Zugkraft auf Eisenbahnen $^1/_{300}$ der Bruttolast ist, beträgt sie auf Schifffahrtscanälen nur $^1/_{1500}$ derselben. Da obnedies die Anlagen, Unterhaltungs- und Betriebskosten bei der Canalförderung in der Regel geringer ausfallen als bei Eisenbahnen, so sind in allen den Fällen, wo es nicht auf Schnelligkeit des Fortschaffens ankommt, die Schifffahrtscanäle den Eisenbahnen vorzuziehen. Die Speisung eines Seitencanales erfolgt theils durch den Fluß selbst, an dem er hinläuft, theils durch Seitenbäche desselben. Zur Speisung der Verbindungscanäle sind dagegen beson-

dere Speisebassins und Speisegräben nothwendig. Die ersteren sind gewöhnliche Teiche (s. Seite 831), worin das Quell-, Regen- und Fluthwasser angesammelt wird, und Speisegräben sind gewöhnliche Gräben, welche das Wasser aus Bächen, Flüssen und Teichen dem Canale zuführen. Bei Auswahl des Canalweges über eine Wasserscheide ist dahin zu trachten, daß die Scheitelstrecke in einem Gebirgssattel, oder, nach Befinden in einen besonders hierzu ausgeführten Tunnel zu liegen komme, welcher hinreichend Wasserzufluß zum Speisen dieser Strecke hat, wobei natürlich die Speisebassins ihre Dienste thun können. Außerdem muß man wohl besondere Wasserhebungsmaschinen zum Herbeischaffen des Speisewassers in Anwendung bringen, oder die Schiffe durch besondere Aufzüge oder Rampen über den Gebirgskamm transportiren. Uebrigens sind sowohl die Speiseteiche als auch die Schifffahrtscanäle selbst mit Fluthgerinnen oder sogenannten Leerläufen zu versehen, durch welche das überflüssige Wasser nach Regengüssen, starkem Thauwetter u. s. w. abgelassen werden kann. Je zwei an einander anstoßende Canalstrecken oder sogenannte Haltungen sind in der Regel durch eine einfache Kammerschleuse, deren Gefälle 5 bis 10 Fuß mißt, mit einander in Verbindung zu setzen. Diese Schleusen bestehen in der Hauptsache aus der Kammer und den beiden Häuptern sammt den darin befindlichen Schleusenthoren. Kommt es darauf an, ein Schiff von der untern Haltung auf die obere zu heben, so wird, nachdem es in die Kammer eingefahren worden ist, das Unterthor geschlossen, sowie die Schütze im Oberthor geöffnet, und nach gehöriger Füllung der Kammer, das Schiff durch das vorher zu öffnende Oberthor gezogen. Soll hingegen ein Schiff abwärts gehen, so wird, nachdem es in die Kammer eingefahren ist, das Oberthor geschlossen, sowie die Schütze des Unterthors geöffnet, und nachdem das Wasser in der Kammer bis zum Niveau des Unterwassers gesunken ist, das Schiff durch das vorher zu öffnende Unterthor fortgeschafft. Statt der Schützen in den Thoren wendet man auch wohl Dohlen oder sogenannte Umläufe an, welche die Kammer mit beiden Canalstrecken verbinden, und ebenfalls durch Schützen verschlossen werden können. Die Thore sind sogenannte Stemmthore mit je zwei Flügeln, welche sich mittels der sogenannten Anschlagsäulen unter einem stumpfen Winkel von 140 bis 145 Grad gegen einander stemmen und unten an die sogenannten Drempel oder die Schlagschwellen anschlagen. Mittels eines langen Hebels, des Drehbaumes, läßt sich jeder Thorflügel um eine verticale Axe, die sogenannte Wendesäule, drehen, welche sich in der sogenannten Wendenische befindet, unten auf einem eisernen Zapfen steht und oben durch ein Halslager festgehalten wird. Damit sich die Thorflügel nicht senken, versieht man sie mit diagonal laufenden Strecken und Zugstangen, und läßt sie mittels Rädern auf einer bogenförmigen

Schienenbahn in der Sohle der Schleusenhäupter laufen. Um das Gewicht der Schleusenthore durch den Auftrieb des Wassers aufzuheben, stellt man diese auch aus Eisenblech hohl her. Uebrigens ist es natürlich nöthig, die Thore nach unten zu, z. B. durch eine dichtere Stellung der Thorriegel, stärker zu machen. Zum Drehen der Thore kann man statt des Drehbaumes auch eine Zugstange in Verbindung mit einer Winde anwenden. Auch hat man in Nordamerika Schleusenthore mit horizontaler Drehaxe angewendet. Der Boden einer Schleusenkammer muß gehörig wasserdicht sein, und dem Wasserdruck von unten widerstehen können. Hölzerne Böden werden durch einen 5 bis 6 Zoll dicken Bohlenbeschlag gebildet, welcher auf einem Schwellen- oder Pfahlrost mit der nöthigen Thon- oder Mörtelfüllung zu liegen kommt. Steinerne Böden sind in nach unten gerichtete Bögen aufzumauern und auf eine festgestampfte Thon- oder Betonlage zu betten. Die Kammerwände sind entweder gewöhnliche Bohlenwände oder gewöhnliche Ufermauern aus Werkstücken oder Bruchsteinen mit Eckenbesatz aus Quadern, oder sie sind aus Ziegeln oder Klinkern in hydraulischem Mörtel aufgeführt. Die Dicke dieser Mauerwände ist gewöhnlich $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{2}$ der Höhe, und zwar mindestens 4 Fuß. Auch zieht man zum Schutz des Schleusengrundes nach Befinden noch Spundwände durch den Erdboden.

Die Länge einer einfachen Schleuse soll die des längsten Schiffes wenig, und die Breite derselben die größte Schiffsbreite um 1 Fuß übertreffen, während ihre größte Tiefe gleich sein soll dem Schleusengefälle, plus der Tauchung des Schiffes, plus $1\frac{1}{2}$ Fuß. Wenn das Gefälle zwischen zwei Haltungen über 10 Fuß beträgt, so wendet man eine Doppelschleuse mit 3 Thoren an, besser ist es aber, eine dritte Haltung einzuschalten und zwei einfache getrennte Schleusen anzubringen. Bei starkem Verkehr wendet man auch Doppelschleusen an, in welchen zwei Schiffe neben einander Platz finden. Der Wasserbedarf bei Schleusen von unvollkommenem Verschluß der Thore ist von dem Verbrauch beim Schleusen abhängig, da in den gewöhnlichen Fällen die Verluste durch Verdunstung und Filtrationen des Wassers sehr unbedeutend sind. Der tägliche Verlust durch das unvollkommene Abschließen der Thore kann zwar sehr verschieden sein, wird aber gewöhnlich dem Bedarf von 6 bis 7 einfachen Durchschleusen gleich gesetzt. Der letztere hängt von dem Volumen einer Schleusenkammer, d. i. dem Producte $V = Gh$ aus dem Querschnitt G der Kammer und der senkrechten Höhe h zwischen dem Ober- und Unterwasserspiegel, sowie von dem Volumen des vom Schiffe verdrängten Wassers ab, welches $W = \frac{Q}{\gamma}$ zu setzen ist, wenn Q das Gewicht des ganzen Schiffes bezeichnet. Geht ein Schiff von unten nach oben, so ist der Wasserbedarf zum Schleusen, $= V + W$, geht es aber

in der vorher leer gewesenen Kammer abwärts, so beträgt dieser Bedarf nur $V - W$; folglich ist dieser Bedarf für ein auf- und ein abgehendes Schiff zusammen, $M = 2V$. Wären diese beiden Schiffe ungleich belastet, also W_1 beim Abwärtsfahren, von W beim Aufwärtsfahren verschieden, so hätte man im letzteren Falle $M = 2V + W - W_1$. Wenn dagegen das abwärts fahrende Schiff eine gefüllte Schleusenkammer antrifft, so ist das Wasserquantum zum Niederlassen, $= - W$, und daher der Wasserbedarf für einen Auf- und einen Niedergang nur $M = V$, oder allgemeiner, $M = V + W - W_1$. Bei doppelten und mehrfachen Schleusenkammern ist der Wasserbedarf größer als bei einfachen Schleusen mit zwischen befindlichen Haltungen. Die Zeit zum Durchschleusen ist auf S. 451 angegeben. Um mit dem Wasser zum Durchschleusen möglichst zu sparen, bedient man sich sogenannter Seitenbassins, welche beim Ablassen der Schleusenkammer einen Theil des Wassers auffangen, und bei dem zum Niederlassen eines Schiffes nöthigen Füllen desselben wieder zurückgeben. Es ist zweckmäßig, mehrere solcher Speisebassins in verschiedener Höhe und mit möglichst großem Querschnitt, oder Speisebassins mit Schwimmer in Anwendung zu bringen.

Sehr oft lassen sich Schifffahrtscanäle mittels Brücken oder sogenannter Aquäducte über Straßen, Flüsse, Thäler u. s. w. wegführen.

§. 165. Flüsse. Die Betten, in welchen die Flüsse allmälig aus dem Hochland in das Tiefland und bis zum Meer herabfließen, haben einen, immer kleiner und kleiner werdenden Abhang, so ist z. B. das Gefälle der Elbe pr. Meile Erstreckung, im Riesengebirge gegen 60 Fuß, im übrigen Böhmen 7 bis 9 Fuß, in Sachsen 4 bis 6 Fuß, und in Preußen $2^1/_2$ bis 3 Fuß. In Folge davon wird auch die Geschwindigkeit derselben mit der Erstreckung allmälig kleiner, und es setzen sich, namentlich die bei Hochfluthen, am oberen Theile des Flußbettes abgerissenen Steinstücke nach und nach am unteren Theile desselben wieder ab. Dies hat zur Folge, daß sich das Flußbett von unten herauf durch Anschwemmung allmälig erhöht, und ein allmäliges Zurückgehen des Gefälles der Flußbetten eintritt. Es ist leicht zu ermessen, daß die Angriffe des Wassers bei großen und die Ablagerungen desselben bei kleinen Geschwindigkeiten am stärksten ausfallen; daß ferner ein steiniges oder kiesiges Flußbett im gewöhnlichen Zustande, wo das Wasser nicht über 4 Fuß schnell fließt, im stabilen, dagegen bei Hochwasser im instabilen Zustande ist.

Das instabile Bett eines Baches bildet lauter steile Absätze, mit wenig geneigten Abhängen wechselnd, wobei das Wasser abwechselnd aus der Ruhe in Bewegung übergeht. Instabile Flußbetten sind unaufhörlichen Veränderungen unterworfen, durch ein zufälliges Hinderniß wird das Wasser nach dem einen

Flußufer getrieben und dasselbe angegriffen, so daß sich hier eine Concavität bildet, welche aber nach und nach immer größer wird, da sich auch der Stromstrich nach dieser Seite zieht, während dagegen das entgegengesetzte Ufer durch Absetzen von Erde Convexität annimmt. Wenn endlich die weitere Aushöhlung des Ufers eine Stelle erreicht, wo das Material dem Wasser hinreichenden Widerstand entgegensetzt, so gelangt das Bett in einen stabilen Gleichgewichtszustand.

So lange ein solches widerstehendes Flußufer nicht erreicht ist, findet natürlich auch ein unaufhörlicher Wechsel in der Gestalt desselben statt.

Die Ufer eines Flusses schützt man gegen den Angriff des Wassers durch Bepflanzung mit Weiden, sowie durch Weidenzäune und durch Faschinen oder Weidenbündel von 9 bis 12 Zoll Dicke und 12 bis 20 Fuß Länge, welche man durch 4 Fuß lange Pfähle fest mit dem Erdboden verbindet, und nach Befinden noch mit Steinen bedeckt; ferner durch Steinschüttung oder Steinpflasterung, durch Roste mit Steinfüllung u. s. w., wobei sehr oft eine Flacherlegung der Ufer nöthig ist. Auch gehören hierher die Buhnen, Deiche oder Parallelwerke und Durchstiche, durch welche sich aber auch noch andere Zwecke der Stromregulirung, z. B. die Veränderung und Verlegung des Strombettes, erreichen lassen.

Die Buhnen sind, wie die lichten Wehre (s. S. 829), Dämme, welche von einem Ufer aus nahe rechtwinklig in den Strom hineingehen, und entweder aus dem Wasser hervorragen oder vom Wasser bedeckt werden. In Folge der Verengung des Flußbettes, welche die Buhnen hervorbringen, erzeugen dieselben eine Aufstauung des Wassers, wobei es vor derselben eine kleinere, dagegen im freien Theil des Querprofiles eine größere Geschwindigkeit und hinter der Buhne eine Wirbelbewegung annimmt. Bei diesem veränderten Bewegungszustand des Flusses setzen sich die erdigen Theile aus dem Wasser vor und besonders hinter der Buhne nieder und es entsteht so eine allmälige Verlandung, wogegen das frei gebliebene Strombett und das gegenüberstehende Ufer durch die erhöhte Kraft des durchfließenden Wassers angegriffen werden, wenn sie nicht eine hinreichende Stabilität oder Festigkeit besitzen. Nach ihrem nächsten Zwecke unterscheidet man Schutz-, Treib-, Fang-, Schöpf-, Trennungs- und Sperrbuhnen von einander. Während die Schutzbuhnen dazu dienen, das Flußufer gegen den Abbruch zu bewahren, haben die Treibbuhnen den Zweck, der Versandung der Flüsse entgegen zu wirken, und bezwecken Fangbuhnen, einen Theil des Flusses zu verlanden. Schöpfbuhnen sollen einen Theil des Flußwassers in einer anderen Richtung ableiten, Trennungsbuhnen, welche bei der Ausmündung eines Flusses in einem anderen anzubringen sind, haben der Versandung des letzteren entgegen zu wirken, und Sperrbuhnen dienen zum Absperren ganzer Flußarme bei Strom-

regulirungen. Während die sogenannten Deiche nur zum Schutz eines Flußbettes bei Hochwasser dienen, haben die **Parallelwerke** den Zweck, das Bett eines Flusses durch Verlandung zu verengen. Diese Dämme sind in der Richtung des Stromes, und zwar bis ins Niveau des Hochwassers aufzuführen und mit Seitenöffnungen zu versehen, durch welche sich die abgesperrten Räume mit Wasser füllen können, dessen Niederschläge die Verlandung dieser Räume bewirken.

Die sogenannten **Durchstiche** werden dann angewendet, wenn es darauf ankommt, eine Flußstrecke gerade zu legen oder die Serpentine derselben zu beseitigen und die Versumpfung derselben zu verhindern. Man führt in der Regel den Durchstich mit einer kleineren Breite und geringeren Tiefe aus, und überläßt die Vergrößerung seines Querprofiles der Kraft des durchströmenden Flusses. Wenn das Flußbett unterhalb des Durchstiches keine große Widerstandsfähigkeit besitzt, so ist es allerdings besser, dem Durchstich gleich anfangs den zur Erhaltung einer mäßigen Geschwindigkeit nöthigen größeren Querschnitt zu geben. Außerdem kann ein Durchstich oder die Geradelegung einer Flußstrecke das Flußbett unterhalb derselben in Gefahr bringen. Ueberhaupt sind die Flußbetten in mäßigen Flußkrümmungen stabiler als in geraden Flußstrecken. Um die Ablagerungen in einem Flusse zu beseitigen, bringt man entweder **Baggermaschinen** oder **Treibbuhnen** oder sogenannte **Spülschleusen** in Anwendung. Um endlich einen Fluß an einer seichten Stelle **schiffbar** zu machen, baut man auch Wehre mit Schleusen ins Flußbette. Letztere sind entweder einfache **Stau-** oder sogenannte **Kammerschleusen**. Die Kammerschleusen bringt man nahe am Ufer an, und unterscheiden sich von den Kammerschleusen in Canälen nur dadurch, daß sie keine Fallmauer haben, folglich die Thore derselben auf einer und derselben Sohle stehen.

§. 166. Brücken. Jedes Bauwerk, durch welches über der natürlichen Bodenfläche eine Weg- oder Wassercommunication ohne einen Damm hergestellt wird, ist in dem einen Falle ein **Viaduct**, und im anderen ein **Aquäduct**, im Allgemeinen aber eine **Brücke**. Die Brücken sind entweder **feste** oder **bewegliche**, und erstere wieder entweder **steinerne** oder **hölzerne** oder **eiserne**. Zu den letzteren gehören die **Zug-**, **Wipp-**, **Dreh-**, **Roll-** und **Hubbrücken**, sowie die **Schiff-** und **fliegenden Brücken**.

Der Ort einer festen Brücke ist durch die Lage und Richtung der herzustellenden Communication in der Regel nur ungefähr bestimmt; es läßt sich daher bei Festsetzung desselben oft noch darauf Rücksicht nehmen, daß der Baugrund der Brücke ein fester und unveränderlicher sei, daß der Fluß oder das Thal durch sie möglichst rechtwinkelig und in einer solchen Höhe überschritten werde, bei welcher der unter ihr stattfindende Verkehr und das unter ihr fließende Wasser sogar zur Zeit der

Hochfluth nicht gestört werde, daß ferner die Brücke weder unnöthig lang, noch sehr hoch ausfalle, daß der Anschluß der Brücke an den übrigen Communicationsweg keine große Schwierigkeit verursache, nicht lange und hohe Dämme, Viaducte oder Einschnitte und auch keine ansehnliche Curven nöthig mache, daß sich auch das Bett des zu überschreitenden Flusses im Gleichgewichtszustande befinde u. s. w. Vor dem Entwurf der Brücke ist die Größe der Durchflußöffnungen zu ermitteln. Dieselben müssen natürlich selbst das Hochwasser ohne große Aufstauung durchlassen. Die Breite derselben ist (s. Seite 515)

$$b_1 = \frac{0{,}141\, Q}{(a + \frac{2}{3} h)\sqrt{h}} = \frac{0{,}141\, a b c}{(a + \frac{2}{3} h)\sqrt{h}}$$ Fuß zu machen,

wenn b die Breite des freien Flusses, a die mittlere Höhe, h die zulässige Stauhöhe und c die mittlere Geschwindigkeit des noch unaufgestauten Wassers bezeichnen. Unter der Voraussetzung, daß die größte stündliche Regenmenge 0,5 Zoll beträgt, läßt sich die größte Durchflußmenge pr. Sec. $Q = 0{,}000012 F$ Cubikfuß setzen, wenn F den Inhalt der Fläche des Flußgebietes bezeichnet.

Die Geschwindigkeit des Wassers zwischen den Brückenpfeilern, $v = \sqrt{c^2 + 2gh}$, soll nicht so groß ausfallen, daß das durchfließende Wasser im Stande ist, das Bett anzugreifen. Kiesbetten leisten bei 2, Betten von $1\frac{1}{2}$ Zoll dicken Geröllen, bei 3, solche im schiefrigen oder weichen Gestein, Ziegeln u. s. w. bei 4 bis 5, und Betten im festen Gestein, bei 6 bis 10 Fuß Geschwindigkeit des Wassers hinreichenden Widerstand. Wenn hiernach auf der einen Seite das Flußbett an der Baustelle nicht zu sehr verengt werden darf, ist es aber auch unzweckmäßig, dasselbe zu sehr zu erweitern, weil sich dann bei niedrigem Wasserstande leicht Ablagerungen bilden, und das Wasser einen der Fundirung der Brücke nachtheiligen Lauf annimmt. Die Stauhöhe h hängt vorzüglich von der Beschaffenheit und Gestalt der Ufer ab, ist aber mit der von ihr abhängigen Stauweite s (s. Seite 516) in einer gewissen Grenze zugleich eingeschränkt.

Die Breite einer Brücke für Fahrstraßen ist 15 bis 30 Fuß und die für eine Eisenbahn, 24 Fuß. Bei Auswahl des Baumaterials zu Brücken hat man nicht allein den Preis desselben, sondern auch die Beschaffenheit des Baugrundes, die Höhe und Länge, sowie den Zweck der Brücke in Betracht zu ziehen. Bei gutem Baugrund und gutem, wohlfeilem Baumaterial und einer mittleren Brückenhöhe ist jedenfalls, zumal wegen ihrer Dauerhaftigkeit, eine steinerne Brücke allen anderen vorzuziehen, in entgegengesetzten Fällen sind in der Regel eiserne Brücken, und ausnahmsweise, nur bei Ueberfluß an gutem Bauholz, hölzerne Brücken anzuwenden, welche natürlich den ersteren an Dauerhaftigkeit weit nachstehen. Die eisernen Brücken gestatten größere Spannweiten sowie schwächere Pfeiler

und verengen überhaupt das Flußbett weniger als die steinernen Brücken. Während die gewöhnliche Spannweite bei steinernen Brücken 50 bis 150 Fuß mißt, ist dieselbe bei eisernen Brücken 200 bis 450 Fuß; ausnahmsweise, namentlich bei Kettenbrücken, sogar 850 Fuß. Auch läßt sich bei eisernen Brücken die Brückenbahn tiefer legen als bei den steinernen Brücken, weshalb bei Eisenbahnen sehr oft den ersteren der Vorzug zu geben ist.

Die steinernen Brücken sind entweder in Halbkreis- oder in Stich- oder in Korbbögen, und letztere wieder entweder in gedrückten oder in überhöhten Bögen auszuführen. Die Stichbögen geben die größten Durchflußöffnungen, erfordern aber sehr dicke Pfeiler und Widerlager; die Halbkreisbögen verengen das Flußbett am meisten, haben aber bei gleicher Spannweite den geringsten Schub. Elliptische oder aus Kreisbögen zusammengesetzte Korbbögen stehen in jeder Beziehung zwischen den Stich- und Halbkreisbögen zwischen inne. Die Anzahl der Bögen einer steinernen Brücke ist gewöhnlich eine ungerade, damit kein Pfeiler in die Mitte des Flußbettes zu stehen kommt. Wenn das fließende Wasser, über welches die Brücke führt, weder schiffbar noch großen Anschwellungen und starken Eisgängen ausgesetzt ist, so kann man diese in kleinen Halbkreisbögen ausführen, außerdem hat man aber weitere Korb- oder Stichbögen in Anwendung zu bringen. Reißende schiffbare Flüsse erfordern nach Befinden 80 Fuß weite Bögen. Die Spann- oder Bogenhöhe soll bei Stichbögen höchstens $1/8$, und bei Korbbögen $1/4$ der Spannweite betragen. Letztere sind 3, 5, 7, 9 Kreisbögen von gleichen Centriwinkeln, und vielleicht so zusammenzusetzen, daß die Bogenhalbmesser eine arithmetische Progression bilden (s. Seite 801). Ueber die Stärke der Bögen, Pfeiler und Widerlager sowie die Stabilität der ganzen Brücke überhaupt ist auf Seite 476 das Wichtigste mitgetheilt. Die Brückenpfeiler erhalten gewöhnlich bei Halbkreisbögen $1/5$, bei Korbbögen $1/4$ und bei Stichbögen $1/3$ der Spannweite zur Dicke. Die Fundamente derselben sind in Banquets von 1 Fuß Höhe und Breite so anzulegen, daß sie rund herum um $1/5$ bis $1/3$ der Pfeilerdicke vorstehen. Uebrigens erhalten die Pfeiler nach oben gewöhnlich $1/20$ bis $1/15$ Verjüngung in den Querschnittsdimensionen, und sowohl an der Vorder- als an der Hinterfläche, abgerundete oder zugeschärfte Schnäbel, welche nicht allein zum Schutz gegen schwimmende Körper, sondern auch zur Verhinderung der Wirbelbildung im durchfließenden Wasser dienen sollen. Die beste Querschnittsform dieser Pfeilerschnäbel ist ein gleichschenkliges Dreieck mit abgerundeter Spitze, oder eine halbe Ellipse, deren längere Halbaxe in der Richtung des Stromes liegt. Die Gewölbanfänge sind bei stark gedrückten Bögen in das Niveau des höchsten Wasserstandes, und bei Korb- und Halbkreisbögen nur um $1/4$ bis $1/2$ der Bogenhöhe unter dieses Niveau zu legen, wogegen der Gewölbscheitel mindestens

noch 3 Fuß über demselben liegen muß, damit schwimmende Körper von der Brücke nicht aufgehalten werden. Die Flügelmauern stellt man gewöhnlich unter 45^0 gegen die Widerlagsmauern, und erhalten $1/_{24}$ bis $1/_{18}$ Böschung. Wegen der Ausführung der Brücke s. Seite 799 u. s. w.

Das mit der nöthigen Uebermauerung und den nöthigen Canälen zur Abführung versehene Brückengewölbe wird zum Schutz gegen die Nässe mit einer 3 bis 6 Zoll dicken Mörtel- oder Betonschicht bedeckt und zu beiden Seiten mit Gurtsteinen besetzt, worauf die $3^1/_2$ Fuß hohe Brüstung oder das Geländer zu stehen kommt. Die Fahrbahn erhält ein 1 Fuß dickes Sand- oder Kiesbett, ist entweder eine Schotter- oder eine Pflasterstraße und erhält die nöthige Wölbung zur Abführung des Wassers.

Die hölzernen Brücken erhalten in der Regel steinerne Widerlager oder Landfesten, deren Stärke wie die der Futtermauern zu ermitteln ist; hölzerne Widerlager, welche wegen ihrer geringen Dauer selten angewendet werden, bestehen entweder aus Holzgevieren, oder aus eingerammten Pfählen und Spundwänden. Die Unterstützung der Brücke in den Zwischenpunkten erfolgt entweder durch Joche oder Pfeiler. Die ersteren bestehen aus Pfählen von 8 bis 12 Zoll Dicke und 6 bis 18 Fuß Länge, welche in der Richtung des Stromes 2 bis 4 Fuß weit von einander eingeschlagen und am Kopf durch das Jochholm mit einander verbunden werden. Hohe Joche bestehen aus einem Grund- und einem aufgesetzten Joche, auch wohl aus je zwei einfachen Jochen. Die steinernen Pfeiler für Holzbrücken erhalten bei der Höhe h die obere Dicke $0{,}2\,h + 21$ Zoll, und die Böschung $1/_{20}$ bis $1/_{12}$. Bei Spannweiten unter 24 Fuß kann man einfache Balkenbrücken anwenden, welche aus Trägern oder Streckbäumen von 12 bis 16 Zoll Dicke bestehen und in je 2 bis 3 Fuß Abstand von einander entweder unmittelbar auf die Jochholme oder auf sogenannte Sattelhölzer zu liegen kommen. Die Fahrbahn der Brücke kann bestehen 1) aus einem einfachen oder doppelten Bohlenbelag von je 3 bis 5 Zoll Dicke, oder 2) aus einem Bohlenbelag von 4 bis 5 Zoll Dicke mit einer 6 bis 8 Zoll hohen Kiesschicht, und nach Befinden einer 2 Zoll dicken Lehmschicht, oder 3) aus einer Bohlenlage von 4 bis 5 Zoll Dicke und einem auf Sand gebetteten Holz- oder Steinpflaster. Das Holzpflaster ist vorzüglich bei bedeckten Brücken anwendbar. Um das Wasser von der Brückenbahn schnell abzuleiten, giebt man derselben eine Wölbung von $1/_{40}$ bis $1/_{60}$ der Breite. Die Begrenzung der Bahn erfolgt durch sogenannte Bord- oder Saumschwellen und durch das hölzerne oder eiserne Geländer. Um die Brückenjoche oder Pfeiler vor dem schwimmenden Eise zu sichern, bringt man noch sogenannte Eisbrecher vor denselben an. Dieselben werden entweder durch steinerne Rücken gebildet, welche von

den Brückenpfeilern aus, dem Strome mit 45 Grad Neigung entgegengerichtet sind, oder sie sind 12 bis 15 Zoll dicke, mit einem scharfen Eisenrücken versehene und in Abständen von 4 bis 9 Fuß vor der Brücke in geneigter Lage eingerammte Holzpfähle.

Durch Unterstützung einer Brückenbahn mittels Häng- oder Spreng- oder Häng- und Sprengwerke ist es möglich, hölzerne Brücken von 100 bis 300 Fuß Spannweite zu construiren. Ebenso lassen sich mit Bogenhäng- und Sprengwerk- sowie mit Fachwerk- oder Gitterbrücken in und ohne Bögen große Spannweiten erzielen. Zur Berechnung dieser Brücken wird S. 484 sowie 494 u. s. w. Anleitung gegeben.

Eiserne Brücken sind entweder von Guß- oder aus Schmiedeeisen. Das Gußeisen eignet sich wegen seiner großen Druckfestigkeit vorzüglich zu Brückenpfeilern und zu Bogenträgern oder Bogenrippen. Die gußeisernen Brückenpfeiler bestehen entweder aus hohlen eisernen, durch Streben und Bänder mit einander verbundenen Säulen, oder aus durchbrochenen, etagenförmig über einander gesetzten und gehörig zusammengeschraubten Gußeisenplatten. Die gußeisernen Bogenträger werden entweder aus platten- oder röhrenförmigen Gußstücken zusammengesetzt und an den Enden mittels eiserner Platten gegen steinerne Pfeiler oder Widerlager gestemmt. Wäre die Brücke stets gleichmäßig belastet, so könnte den Trägern derselben eine solche Form (nahe die der Parabel) gegeben werden, daß dieselben nur Druck auszuhalten haben; da aber die Belastung einer Brücke veränderlich und oft sehr ungleich vertheilt ist, so muß die Brücke auch noch Biegungskräften widerstehen können. Hierzu ist aber das Gußeisen weit weniger geeignet als das Schmiedeeisen. Da ohnedies das letztere ein zuverlässigeres und ein den Stößen weit mehr widerstehendes Baumaterial ist als das Gußeisen, so wendet man, wenigstens bei größeren Brückenconstructionen, das Schmiedeeisen fast ausschließlich an.

Die schmiedeeisernen Brücken sind entweder Steh- oder Hängebrücken, und erstere wieder entweder Balken- oder Bogenträger-Brücken. Während die Stehbrücken an ihren Enden mittels Rollen auf horizontalen Flächen aufruhen und daher gar keinen Horizontalschub ausüben, sind die einen horizontalen Zug ausübenden Enden der Hängebrücken fest mit dem Fundamente verbunden. Die schmiedeeisernen Balkenträger sind entweder Blech- oder Gitterbalken, und werden im ersten Falle aus gewalztem Eisenblech von $^3/_8$ bis $^3/_4$ Zoll Dicke, und im zweiten aus gewalzten Eisenstäben von $^1/_2$ bis 1 Zoll Dicke und 3 bis 4 Zoll Breite zusammengenietet. Die Querschnitte der Blechträger sind entweder I oder [] förmig (s. S. 492). Zu den letzteren gehören auch die Röhrenbrücken von Stephenson, bei welchen die Fahrbahn durch

den Träger selbst hindurchgeht. Um die Tragfähigkeit dieser Träger zu erhöhen, bringt man an den Fuß- und Deckplatten noch zellenförmige Verstärkungen an. Die Gitterbalken, welche in der Hauptsache aus zwei Streckbalken mit zwischengestellten Streben und Zugstangen bestehen, fallen bei gleicher Tragfähigkeit leichter aus als die Blechträger; Gitterbrücken bestehen gewöhnlich aus zwei 15 bis 25 Fuß hohen Gitterwänden, welche nicht allein unten durch die Querschwellen für die hindurchgehende Fahrbahn, sondern auch oben durch eiserne Bänder und Streben mit einander verbunden sind. Die Bogenträger aus Eisenblech oder Gitterstäben sind bei rationeller und sorgfältiger Ausführung den geraden Blech- und Gitterträgern vorzuziehen, da sie bei gleicher Tragkraft noch leichter als diese ausfallen. Dieselben bestehen in der Hauptsache aus einem gebogenen Druck- und einem geraden oder gebogenen Zugbalken mit zwischen befindlichen Blech- oder Gitterwänden, oder einfachen Verstrebungen. Bei dem Pauli'schen Brückensysteme, wonach z. B. die Rheinbrücke bei Mainz construirt ist, besteht der den Druck aufnehmende Balken in einem kastenförmigen Blechbogen, der Zugbalken in einem aus aufeinander liegenden Flacheisen gebildeten Spannbogen, und die Verbindung beider Bögen in einem aus verticalen Streben und geneigten Zugstangen bestehenden Fachwerk. Die größte Spannung des zu dieser Brücke verwendeten Schmiedeeisens beträgt pr. Quadratcentimeter $^{1600}/_3$ Kilogr., d. i. pr. Quadratzoll 7300 Pfd.

Die Hängebrücken sind entweder Draht- oder Ketten- oder Bandeisenbrücken (s. S. 489). Diese Brücken erhalten gewöhnlich $^1/_{16}$ bis $^1/_{12}$ der Spannweite zur Bogenhöhe, und bestehen aus 4 bis 16 Strängen von zusammen 35 bis 450 Quadratzoll Querschnitt, bei 200 bis 1000 Fuß Spannweite und 18 bis 45 Fuß Breite. Die Hängestäbe, welche die Brückenbahn tragen, und mit besonderen Stellschrauben zu versehen sind, stehen 5 bis 12 Fuß von einander ab. Um der ganzen Brücke mehr Steifigkeit zu geben, werden nicht bloß die Bodenschwellen unter einander verstrebt, sondern auch die Seiten mit Gitter- oder Fachwerkswänden bekleidet. Auch giebt man wohl zu diesem Zwecke den Hängestäben eine Neigung nach der Mitte zu, oder verbindet die Brückenbahn noch durch schräg ziehende Drahtseile mit dem Felsengrund und den Brückenpfeilern. Die Spannseile oder Ketten führen vermittels eiserner, auf Rollen ruhenden Sättel über die Pfeiler in den Erdboden, wo sie entweder durch starke Widerlagsmauern oder festen Felsengrund festgehalten werden.

Sachregister.

A.

B.

C.

D.

G.

T.

U.

Z.

Berichtigungen.

Seite 89, Zeile 13 von unten lies 1,075 statt 1,705.
„ 189, „ 10 von unten lies $104^0,25$ statt $140^0,25$.
„ 270, „ 20 von oben lies $\alpha = BAR$ statt BAR.
„ 270, „ 22 „ „ lies $\frac{d}{2r}$ statt $\frac{d}{r}$.
„ 270, „ 24 „ „ lies $\alpha = 0{,}061011'' \, d$ statt $C = 0{,}122022'' \, d$.
„ 314, untere Tabelle, Zeile 3 von unten „ 137,1 statt 237,1.
„ 316, Tabelle K, Zeile 5 von unten, Spalte 5 „ 96,63 statt 96,36.
S. 318, Tab. L, Z. 8 v. u., Sp. 4 lies 13,29 statt 12,29.
S. 318, Tab. L, Z. 5 v. u., Sp. 5 lies 75,89 statt 75,68.
S. 318, Tab. L, Z. 4 v. u., Sp. 3 lies 98,55 statt 98,45.
S. 318, Tab. M, Z. 17 v. u., Sp. 3 lies 1,672 statt 1,632.
S. 321, Tab. N, Z. 8 v. u., Sp. 6 lies 197,75 statt 199,75.
S. 321, Tab. N, Z. 9 v. o., Sp. 2 lies 39,05 statt 39,00.
S. 322, Tab. O, Z. 4 v. o., Sp. 5 lies 14,536 statt 1,4536.
Seite 327, Zeile 8 von unten Spalte 7 lies 0,8294 statt 0,8298.
Seite 328, Tabelle II., zweite von unterste Reihe, Spalte 4 „ 13,23 statt 12,23.
Seite 381, Zeile 9 von oben „ $\frac{bh^3 - 3\pi b_1 a_1^3}{hl} \frac{T}{6}$ statt $\frac{bh^3 - 3\pi b_1 a_1^3}{h} \cdot \frac{T}{6}$.
„ 430 „ 16 „ unten „ $h_2{}^{3/2}$ statt $h_3{}^{3/2}$.
„ 449 „ 7 „ „ „ $\left(1{,}645 \frac{F}{F_1} - 1\right)^2$ statt $1{,}645 \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2$.
„ 464 „ 12 „ oben „ §. 487 statt §. 448.
„ 504 ist in Fig. 382 die Mitte der punktirten horizontalen Linie AA mit E statt mit D zu bezeichnen.
„ 507, Zeile 4 von oben lies BO statt BC.

Seite 586, Zeile 13 von unten lies $\frac{h}{\pi d} = 0{,}0255 + \frac{0{,}0127}{d}$ statt $\frac{h}{2\pi d} = 0{,}01273 + \frac{0{,}00637}{d}$.

„ 586, Zeile 11 von unten lies 0,0509; 0,0382 und 0,0318 Zoll statt 0,02547; 0,01910 und 0,01591 Zoll.

„ 586, Zeile 10 von unten lies $2^0,55'$; $2^0,11'$ und $1^0,49'$ statt $1^0,27'$; $1^0,5'$ und $0^0,55'$.

„ 592, Zeile 2 von oben lies in C statt in B.

„ 592, „ 10 „ „ lies AO_1 statt AO.

„ 592, „ 15 „ „ lies G_2 statt G_3.

„ 595, „ 11 von unten lies von den Zapfenmitten A und C statt vom Zapfenmittel A.

„ 597, Zeile 5 von oben lies 0,000212 statt 0,0212 und 0,00212 statt 0,212.

„ 601, „ 7 von unten lies 0,85 d statt 0,8 d.

„ 601, „ 5 und 4 von unten lies Abstand CO statt Halbmesser ON.

„ 632, Zeile 4 von oben lies $\frac{l}{a} \geqq 5$ statt $\frac{l}{a} \geqq 6$.

„ 635, „ 15 von unten lies $146^0, 58'$ statt $146^0, 45'$ und $33^0, 2'$ statt $33^0, 5'$.

„ 639, „ 3 von oben lies Kurbelarme B statt Kurbelarme r.

„ 657, „ 5 „ „ „ $\frac{b_1 - b_2}{2a}$ statt $\frac{b_1 - b_2}{a}$.

„ 657, „ 6 „ „ „ Wellenhalbmesser statt Wellendurchmesser.

„ 659, „ 6 „ „ „ $b =$ statt $r_1 =$

„ 685, „ 20 „ „ „ Klappventiles statt Kegelventiles (NB. nicht zu verwechseln mit der vorhergehenden Zeile).

„ 697, Zeile 15 von unten lies $\frac{2 Q_1 h_1 \gamma_1}{\eta}$ statt $\frac{Q_1 h_1 \gamma_1}{2\eta}$.

„ 801, „ 9 „ „ „ 478 statt 475.

„ 832, „ 24 von oben lies Thürmchens statt Thürchens.